LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF NORTH DAKOTA
GRAND FORKS

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A67

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Siebenter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1846.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des siebenten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände, als Fortsetzung des Aufsatzes X. in Thl. V. Heft 2. Von dem Herrn Doctor Barfuss zu Weimar	I.	3
IV.	Nochmalige Einreden gegen Herrn Doctor Schlömilch. Von Demselben	I.	29
V.	Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx\,dx$. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	I.	38
VI.	Ueber das von Herrn Clausen in Thl. V. Heft 2. S. 279. angegebene Theorem. Von Demselben	I.	46
XII.	Einige Bemerkungen über die Abhandlung Thl. VI. Heft 2. Nro. XXIX. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	107
XII.	Mathematische Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen	I.	112
XIV.	Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Band VI. Heft 1. dieses Archivs. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	II.	149
XV.	Ueber Poinsot's Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen. Von dem Herausgeber	II.	153
XVI.	Ueber eine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen. Von Demselben	II.	162

409423

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVII.	Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre. Von Demselben . .	II.	168
XXI.	Allgemeine Sätze für eine Theorie der höheren Differentialquotienten. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	II.	204
XXIII.	Einige Bemerkungen über die Wörter Variation, variabel u. s. w. Von dem Herrn Doctor G. Strauch, Lehrer der Mathematik zu Muri im Kanton Aargau	II.	221
XXVII.	In quaestionem a Celeb. A. Göpel in T. VI. pag. 33. propositam complete solvendam. Auct. Dr. E. G. Björling, ad Academ. Upsal. Docens Mathes.	III.	266
XXVIII.	Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx$ und $\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx$. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	270
XXXII.	Eigenthümliche, leicht fassliche, in systematischem Zusammenhange stehende Beweise bekannter wichtiger Sätze aus der Combinationslehre. Von dem Herrn Professor Dr. Hessel an der Universität zu Marburg	III.	295
XXXIII.	Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen. Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison.) ausgezogen von dem Herausgeber	III.	305
XXXV.	Sur les fractions partielles. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue	III.	316
XXXVI.	Ein Theorem über Fakultäten. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	331
XXXVIII.	Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	III.	334
XL.	Ueber Legendre's Theorem von den Euler'schen Integralen zweiter Art. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	IV.	348
XLI.	Ueber die Verwandlung der Funktionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach stei-		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung		Heft.	Seite.
	genden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten. Von Demselben	IV.	353
XLIII.	Ueber zwei Sätze aus der Algebra und der Zahlenlehre. Nach der Abhandlung: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres par M. Poinsot in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville. Janvier et Février 1845. frei bearbeitet von dem Herausgeber	IV.	367
XLIV.	Applications des théorèmes relatifs à la théorie des fractions partielles. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue	IV.	386
XLV.	Ein Paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen. Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover . .	IV.	402
XLVI.	Ueber die geometrische Darstellung complexer Functionen. Von Demselben	IV.	411
XLVII.	Zur Entwickelung in Reihen und Summirung der Reihen. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	IV.	430
	Geometrie.		
VII.	Ueber die Construction der Normalen, Tangenten und Krümmungshalbmesser an solchen Curven, welche durch einen Punkt beschrieben werden, der mit zwei andern nach einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Punkten fest verbunden ist. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	48
VIII.	Beweis des Lehrsatzes: Wenn ein beliebiges Dreieck in einer Ebene so bewegt wird, dass sich die Endpunkte seiner Basis fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden befinden, so wird von seiner Spitze eine Ellipse beschrieben. Von Demselben	I.	64
XII.	Ueber die Trisection des Winkels. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	I.	108
XIII.	Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	113

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXIII.	Note sur quelques propriétés des arcs egaux de la lemniscate. Par M. Chasles	II.	217
XXIX.	Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion. Von dem Herrn Dr. O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena	III.	274
XXX.	Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie. Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg	III.	284
XXXIX.	Entwickelung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen der zweiten Ordnung. Von dem Herrn Dr. J. R. Boyman, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Malmedy	IV.	337
XLVIII.	Beiträge zu den Elementen der Geometrie. Von Herrn Rudolf Wolf, Docenten der Mathematik und Archivar der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Bern	IV.	440

Trigonometrie.

XII.	Ueber die Auflösung der Gleichung $(\sin\frac{1}{3}C)^3 - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}C + \frac{1}{4}\sin C = 0$. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin . .	I.	109
XII.	Ueber die Reihen $\sin x + \sin(x+z) + \sin(x+2z) + \ldots + \sin(x+nz)$ und $\cos x + \cos(x+z) + \cos(x+2z) + \ldots + \cos(x+nz)$. Von Demselben	I.	110
XXIV.	Zur sphärischen Trigonometrie. Von dem Herrn Doctor Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	III.	225

Geodäsie.

I.	Ueber die Ursache der Oscillationen der Luftblase einer Libelle oder eines Niveau's . . .	I.	1
IX.	Völlig strenge und allgemeine Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. Von dem Herausgeber	I	68
XII.	Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel. Von Demselben	I.	104
XXV.	Ueber die in dem Aufsatze Theil III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe. Von Demselben	III.	238

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Mechanik.		
X.	Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre. (Fortsetzung der Abhandlung Thl. V. Nr. XXI.) Von dem Herrn Dr. Barfuss zu Weimar	I.	93
XXVI.	Schreiben des Herrn Professor Steichen an der École militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber	III.	260
XXXIV.	Ueber die Cycloide als Brachystochrone. Von dem Herausgeber	III.	308
XLII.	Ueber eine Anwendung des in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesenen Hauptsatzes der Theorie der bestimmten Integrale. Von Demselben	IV.	358
	Astronomie.		
XVIII.	Die Epochen der Geschichte der Menschheit; eine historisch-philosophische Skizze von Dr. E. F. Apelt, ausserordentlichem Professor zu Jena	II.	181
XIX.	Auflösung des Keplers'chen Problems nach Newton, verglichen mit der jetzt noch gebräuchlichen numerischen Auflösung, mitgetheilt von dem Herrn Dr. J. Ph. Wolfers, astronomischen Rechner an der K. Sternwarte zu Berlin	II.	184
	Physik.		
XII.	Formel für die Ausdehnung der Dämpfe. Von Herrn Bary, professeur de Physique au collége de Charlemagne	I.	103
XX.	Welche Lage muss man einem Stahlstabe geben, damit er das Maximum der magnetisirenden Wirkung eines kreisförmigen electrischen Stromes erfahre? Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	II.	190
XXXI.	Ueber die Dehnung und das Zerreissen prismatischer Körper unter der Voraussetzung, dass die spannende Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse des Körpers wirkt. Von dem Herrn Fabriken-Commissions-Rathe A. F. W. Brix zu Berlin	III.	288

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
L.	Nouvel observatoire météorologique sur le sommet du Vésuve	IV.	448

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

XII.	J. F. Daniell's Tod	I.	106
XII.	Fermat's Schriften	I.	107
XII.	Schriften von Desargues	I.	107
XXIII.	Schriften von Desargues	II.	217
XXIII.	V. Cousin über Roberval	II.	218
XXIII.	Ueber D'Alembert	II.	220
L.	Kepler's Schriften	IV.	446
L.	Die mathematische Gesellschaft in London . .	IV.	447

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

III.	Ueber eine gewisse Gattung von Aufgaben für Prüfungen Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover	I.	27
XI.	Aufgabe von dem Herrn Dr. O. Schlömilch zu Jena	I.	100
	Andere vermischte Aufgaben	I.	101
XXII.	Vermischte Aufgaben	II.	214
	Arithmetischer Satz	II.	216
XXXVII.	Divisionsexempel	III.	333
	Divisionsexempel	III.	334
XLIX.	Aufgabe aus der Stereometrie. Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover	IV.	444
XLIX.	Aufgabe aus der Integralrechnung. Von Demselben	IV.	445

Literarische Berichte*).

XXV.	. . . . .	I.	365
XXVI.	. . . . .	II.	381
XXVII.	. . . . .	III.	393
XXVIII.	. . . . .	IV.	409

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Ueber die Ursache der Oscillationen der Luftblase einer Libelle oder eines Niveaus.

(M. s. Archiv. Thl. VI. Nr. XLVIII. S. 400.)

Société Philomatique de Paris.

(Extraits inédits des procès-verbaux.)

Suite de la séance du 19 avril 1845.

Physique. — M. Ath. Peltier lit la note suivante sur la cause des oscillations du niveau à bulle d'air:

„M. Liagre, lieutenant du génie belge, a présenté à l'Académie des sciences de Bruxelles un mémoire sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les moyens de remédier à cette cause d'erreur. Cet officier formule le résultat de ses observations et de ses expériences dans les termes suivants: „Un niveau à bulle d'air très bon et très sensible étant calé sur un plan invariable, si l'une des extrémités de sa bulle vient à se trouver en présence d'une température supérieure à celle de l'autre extrémité, la bulle tout entière marche du côté d'où émane la chaleur.“

„Après avoir décrit les expériences propres à constater le fait et après avoir fait remarquer combien ce déplacement de la bulle d'air a dû occasioner d'écarts dans les observations, écarts que l'on attribuait tantôt aux dilatations inégales de la monture de tout l'appareil, tantôt à quelque infidélité de la construction, M. Liagre avoue que c'est en vain qu'il a cherché une explication satisfaisante du phénomène, et qu'il a dû se borner à l'indication du moyen qui lui a paru le plus propre pour éviter cette cause d'erreur. (Voyez le rapport de M. Quetelet communiqué à l'Académie en 1844.)

„La cause du déplacement de la bulle d'air d'un niveau me parait facile à expliquer par l'application de principes connus et

Digitized by Google

au moyen de quelques expériences spéciales. A l'état d'équilibre, la pression est égale dans toute la masse d'un fluide, quelle que soit la différence de la température de ses diverses parties; conséquemment, ce n'est point dans le fluide seul qu'il fallait chercher la cause de ces variations, mais dans l'addition d'une résistance étrangère. Cette résistance est le produit de l'attraction capillaire du verre pour l'eau ou pour l'alcool, résistance qui est égale sur toute la paroi du tube, lorsque ce dernier possède la même température en tous ses points, mais qui s'affaiblit inégalement lorsque la température n'est point uniforme. Lors donc que le liquide renfermé dans ce tube varie de température d'une manière inégale, lorsqu'une des extrémités du niveau est plus échauffée que l'autre, la force capillaire y est affaiblie, ainsi que la résistance au déplacement de la bulle d'air: cette dernière, placée entre deux forces dissemblables, s'avance vers la portion chauffée, jusqu'au nouvel équilibre qui s'établit entre la moindre résistance d'une part et la pesanteur croissante de l'autre.

„Une expérience très simple démontre combien cette résistance capillaire est puissante dans le déplacement de la bulle d'air. J'ai fait entrer deux cylindres d'eau, distants de 5 à 10 centimètres, dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts, afin de leur laisser toute la liberté de leur mouvement. On pose le tube horizontalement, et lorsque le tout est équilibré, on chauffe l'un des cylindres d'eau. La bulle marche d'abord quelque peu vers le côté chauffé, mais bientôt, en s'échauffant par son contact avec le cylindre chaud ou par la flamme de la lampe que l'on passe au-dessous du tube, elle s'agrandit en s'étalant d'un seul côté, du côté où l'on a diminué la résistance capillaire par l'élévation de la température: l'autre cylindre d'eau reste stable à la même place. Si la différence des températures est faible, le côté froid recule lorsqu'on chauffe la bulle d'air, mais toujours moins que le côté chaud et dans la proportion de leur différence. Dans le niveau d'eau, la bulle d'air soumise, comme dans l'expérience précédente, à deux résistances inégales, s'allonge ou se déplace en raison de leur différence et cause des erreurs d'observation parce que l'on rectifie l'instrument d'après la nouvelle position qu'elle a prise.

„Lorsque l'on emploie le mercure au lieu d'eau ou d'alcool, la cause d'erreur que nous venons de rappeler existe également, mais la marche de la bulle d'air est en sens inverse. Sa progression ou son extension se fait du côté froid. La raison de cette inversion est facile à démontrer. Dans un tube de verre, le mercure n'est pas en contact avec la substance même du tube, mais avec la couche de vapeur d'eau qui est toujours attenante aux parois. Le mercure et le verre ont une grande affinité d'adhésion l'un pour l'autre, comme le prouve l'étamage des tubes barométriques dans lesquels on fait bouillir trop longtemps le mercure. Dans l'état ordinaire, il y a une couche de vapeur d'eau, interposée entre le verre et le mercure, qui s'oppose à leur adhésion. En chauffant l'un des cylindres de mercure, on diminue d'une part la force capillaire du verre pour la vapeur et d'autre part on amincit cette même couche séparatrice. Il en résulte que l'attraction du tube pour le mercure croît à mesure qu'on détruit l'obstacle qui les séparait, et en même temps la résistance au déplacement:

Digitized by Google

lors donc que l'on chauffe la bulle d'air, la résistance du côté chauffé étant devenue supérieure à celle du côté froid, c'est ce dernier qui recule et le côté chaud reste en repos ou se déplace moins que l'autre. Voilà, suivant nous, la cause du déplacement de la bulle d'air dans les niveaux d'eau ou d'alcool.

III.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände, als Fortsetzung des Aufsatzes X. in Thl. V. Heft 2.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

Es scheint mir nöthig, dass ich einige Worte über den Gesichtspunkt vorausschicke, aus welchem man diese und die etwa noch folgenden Abhandlungen ähnlichen Inhaltes zu betrachten habe. Als ich mich in dem Aufsatze XXV. (Theil IV.) zum ersten Male gegen die gegenwärtig von vielen Mathematikern verfolgte Richtung in der Analysis erklärte, kam es mir zunächst nur darauf an, die Grundlosigkeit der gegen die älteren Theorien gerichteten Vorwürfe an eben den Beispielen nachzuweisen, von welchen die Gegner, im Vertrauen auf eine scheinbar strenge Rechnung, ihre Beweisgründe entnehmen. Beispiele der Art liessen sich zu Hunderten vermehren und auf eine ganz ähnliche Weise behandeln; allein da dieser Weg auf Wissenschaftlichkeit kaum einige Ansprüche machen dürfte, und leicht zu fruchtlosem Hin- und Herreden führt, so verliess ich ihn sogleich wieder und suchte vielmehr die wichtigsten Momente der Theorie und die dabei obwaltenden Schwierigkeiten in einem mehr systematischen Zusammenhange zu erörtern. Die Abhandlung X. in Theil V. soll der Anfang dieser Erörterungen sein, und vielleicht darf ich hoffen, nicht nur über die hier in Rede stehenden Grundgedanken einiges Licht verbreitet, sondern auch die echte Grundlage der binomischen, der exponentiellen und der logarithmischen Entwikkelungen nachgewiesen und dieselben in ihr richtiges Verhältniss zur Elementararithmetik, wie diese bis jetzt sich gebildet hat, gesetzt zu haben. Die letzte Grundlage dieser Entwickelungen ist

Digitized by Google

der arithmetische Satz von der Multiplication der Summe, wie nämlich das Totalproduct als eine Summe von Partialproducten der Glieder erscheint, die sich in besondern Fällen nach gewissen Gesetzen zusammenstellen lassen. Dabei meine ich durchaus nicht, Neues vorgetragen zu haben; das Wesentliche ist schon oft, und namentlich in der mathematischen Naturphilosophie von Fries gelehrt worden.

§. 2.

Meine nächste Absicht ist nun die, dass ich, dem gewöhnlichen Gange zu Folge, an die Exponentialreihen die trigonometrischen Entwickelungen anschliesse und deren Fundamente erkläre. Hierbei stösst man allerdings auf einige Schwierigkeiten, deren Lösung die neuere Analysis, indem sie nur convergirende Reihen zulassen will, bei Seite schiebt, freilich ohne zu beachten, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihen mit diesen Schwierigkeiten nicht die entfernteste Verwandtschaft hat. — Der wichtigste Schritt in dieser Lehre ist dann geschehen, wenn die Relation zwischen dem Bogen und seinen trigonometrischen Functionen gefunden ist und hierfür habe ich den Grundgedanken schon früher ausgesprochen. Gewöhnlich gründet man die Entwickelungen auf die Reihen:

$$\sin mx = m_1 \cos x^{m-1} \sin x - m_3 \cos x^{m-3} \sin x^3 + \ldots.,$$

$$\cos mx = \cos x^m - m_2 \cos x^{m-2} \sin x^2 + m_4 \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots.$$

wo, wie bekannt, m_1, m_2, u. s. w. die Binomialcoefficienten für den Exponenten m bedeuten. In der That empfehlen sich dieselben durch ihre Einfachheit für den besagten Zweck besser als andere zusammengesetztere, besonders da sie für ein ganzes absolutes m auf einem sehr elementaren Wege gefunden werden können. Für andere Werthe von m muss man die nach Moivre benannten Formeln zu Hülfe nehmen; dieselben verursachen jedoch bei gebrochenen Exponenten, wegen der Vieldeutigkeit der Wurzeln, einige Schwierigkeiten, die vielleicht bis jetzt noch nicht genügend gelöst sind. Ja es scheint, als ob einige Mathematiker ein Misstrauen in den Gebrauch der imaginären Grössen setzten; andere glauben wenigstens der Wissenschaft einen Dienst zu thun, wenn sie die Betrachtung des Imaginären so viel als möglich beseitigen und dasselbe in ein höheres Gebiet der Analysis verweisen, gleichsam als ob dazu eine höhere mathematische Einsicht gehöre, wo man dann freilich fragen möchte, was elementarer sei als diejenigen Formen, auf welche uns schon die Auflösung quadratischer Gleichungen hinweist.

Einen grossen Mangel fühlt man freilich bei allen bisherigen Darstellungen der Moivreschen Formeln dadurch, dass man über den Zweck und die Bedeutung der Form $i = \sqrt{-1}$ gar keine Auskunft findet, und ich möchte gar fragen, ob irgend ein Schriftsteller darüber im Klaren gewesen sei. Wenigstens beruht jener unglückselige Streit über die Eulersche Reihe

Digitized by Google

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a + \ldots.$$

lediglich auf einem Missverständnisse der Bedeutung von i in den Moivreschen Formeln. Ich will daher dieselben nach meinen Kräften erläutern und bei ihrer Feststellung mich des allgemeineren Zeichens $\sqrt{k-1}$ statt $\sqrt{-1}$ bedienen.

§. 3.

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke

$$p_1 = \cos a_1 + \sqrt{k-1}.\sin a_1,$$
$$p_2 = \cos a_2 + \sqrt{k-1}.\sin a_2$$

mit einander, so findet man leicht

$$p_1 p_2 = \cos(a_1 + a_2) + \sqrt{k-1}\,.\sin(a_1+a_2) + k \sin a_1 \sin a_2.$$

Multiplicirt man nochmals mit

$$p_3 = \cos a_3 + \sqrt{k-1}.\sin a_3,$$

so findet sich

$$p_1 p_2 p_3 = \cos(a_1+a_2+a_3) + \sqrt{k-1}\,.\sin(a_1+a_2+a_3) + k(\sin(a_1+a_2)\sin a_3 + p_3 \sin a_1 \sin a_2),$$

und wenn noch ein vierter Factor

$$p_4 = \cos a_4 + \sqrt{k-1}.\sin a_4$$

hinzukommt:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \cos(a_1+a_2+a_3+a_4) + \sqrt{k-1}\,.\sin(a_1+a_2+a_3+a_4) + k(\sin(a_1+a_2+a_3)\sin a_4 + p_4 \sin(a_1+a_2)\sin a_3 + p_3 p_4 \sin a_1 \sin a_2).$$

Man kann hieraus schon das Bildungsgesetz für beliebig viele Factoren abnehmen, denn man findet:

$$\text{I)}\quad p_1 p_2 p_3 \ldots p_m = \cos(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m) + \sqrt{k-1}\,.\sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_m)$$
$$+ k \left\{ \begin{array}{l} \sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_{m-1})\sin a_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-2})\sin a_{m-1}\,.\,p_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-3})\sin a_{m-2}\,.\,p_{m-1}p_m \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-4})\sin a_{m-3}\,.\,p_{m-2}p_{m-1}p_m \\ \text{u. s. w.} \\ + \sin(a_1+a_2+\ldots a_{m-r})\sin a_{m-r-1}\,.\,p_{m-r-2}\ldots p_m \\ \text{u. s. w.} \\ + \sin a_1 \sin a_2\,.\,p_3 p_4 p_5 \ldots p_m. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Nehmen wir nun alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält die besondere Gleichung

$$\text{II)}\quad p^m = \cos ma + \sqrt{k-1}\,.\sin ma$$
$$+k\sin a \left\{ \begin{array}{l} \sin(m-1)a + p\sin(m-2)a + p^2\sin(m-3)a \\ + p^3\sin(m-4)a + \ldots\ldots p^{m-2}\sin a \end{array} \right\}$$

und diese beiden Ausdrücke sollen den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen. $\sqrt{k-1}$ kann sowohl eine positive als auch eine negative Grösse vorstellen.

§. 4.

Die Gleichung II) enthält zunächst das Mittel zur Summirung der Reihen:

$$\Sigma(v^m \sin ma) = v\sin a + v^2\sin 2a \ldots\ldots + v^m \sin ma,$$
$$\Sigma(v^m \sin ma) = 1 + v\cos a + v^2\cos 2a \ldots\ldots + v^m \cos ma.$$

Obgleich dieselben einem jeden bekannt sind, so darf ich sie hier doch nicht ganz mit Stillschweigen übergehen, da sie in speciellen Fällen einige Schwierigkeiten darbieten, welche die Anhänger der neueren Ansichten gern zu ihrem Vortheil auslegen möchten. Da in der Gleichung II) k jede beliebige Grösse sein darf, so kann man $p = \cos a + \sqrt{k-1}\,.\sin a$ als unabhängig von a ansehen, wenn dann nur k aus p und a bestimmt wird. Man hat zunächst:

$$\frac{p^m - \cos ma - \sqrt{k-1}.\sin ma}{k\sin a} = \sin a.p^{m-2} + \sin 2a.p^{m-3} \ldots\ldots$$
$$+ \sin(m-2)a\,.p + \sin(m-1)a,$$

und dann

$$\sqrt{k-1} = \frac{p-\cos a}{\sin a}, \qquad k = \frac{1-2p\cos a + p^2}{\sin a^2}.$$

Werden diese Werthe in die letzte Gleichung gesetzt und dividirt man zugleich beiderseits mit p^{m-1}, so findet man

$$\frac{p^m \sin a + \sin(m-1)a - p\sin ma}{(1-2p\cos a + p^2)\,p^{m-1}}$$
$$= \frac{\sin a}{p} + \frac{\sin 2a}{p^2} + \ldots + \frac{\sin(m-1)a}{p^{m-1}}.$$

Setzt man aber $\frac{1}{p} = v$ und m statt $m-1$, so erhält man sogleich:

Digitized by Google

$$\text{III)}\quad v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a \ldots\ldots + v^m \sin ma$$
$$= \frac{v\sin a + v^{m+2}\sin ma - v^{m+1}\sin(m+1)a}{1 - 2v\cos a + v^2}.$$

Multiplicirt man nun von den Gleichungen:

$$\Sigma(v^m \sin ma) = v\sin a + v^2\sin 2a + \ldots . v^m \sin ma,$$
$$\Sigma(v^m \cos ma) = 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + \ldots v^m \cos ma$$

die erste mit $v\cos a$, die zweite mit $v\sin a$ und addirt die Producte, so erhält man

$$v\cos a \,.\, \Sigma(v^m \sin ma) + v\sin a \,.\, \Sigma(v^m \cos ma)$$
$$= v\sin a + v^2\sin 2a \,.\, \ldots . + v^{m+1}\sin(m+1)a = \Sigma(v^{m+1}\sin(m+1)a);$$

also, wenn man die Formel III) zu Hilfe nimmt:

$$\text{IV)}\quad 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + \ldots\ldots v^m \cos ma$$
$$= \frac{1 - v\cos a + v^{m+2}\cos ma - v^{m+1}\cos(m+1)a}{1 - 2v\cos a + v^2}.$$

Die Reihen in III) und IV) stellen blosse Summen und keine Entwickelungen vor. Einen grossen Irrthum begeht man aber, wenn man die Summe dadurch in eine Entwickelung zu verwandeln glaubt, dass man den Zeiger des allgemeinen Gliedes unendlich nimmt. Doch hiervon ist schon die Rede gewesen. Will man die Functionen haben, aus welchen die ins Unbestimmte fortgesetzten Reihen

$$v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a + \ldots\ldots,$$
$$1 + v\cos a + v^2\cos 2a + v^3\cos 3a + \ldots\ldots$$

entwickelt werden können, so muss man Alles, was in den Summenformeln noch vom Stellenzeiger m abhängt, weglassen. Man erhält dadurch:

$$\text{V)}\quad v\sin a + v^2\sin 2a + v^3\sin 3a + \ldots\ldots = \frac{v\sin a}{1 - 2v\cos a + v^2},$$

$$\text{VI)}\quad 1 + v\cos a + v^2\cos 2a + v^3\cos 3a + \ldots\ldots = \frac{1 - r\cos a}{1 - 2v\cos a + v^2}.$$

Denn man hat z. B. aus III):

$$\frac{v\sin a}{1 - 2v\cos a + v^2} = v\sin a + v^2\sin 2a + \ldots . v^m \sin ma$$
$$- \frac{v\sin ma - \sin(m+1)a}{1 - 2v\cos a + v^2}\, v^{m+1},$$

und da dieses nun für jeden Werth von m gilt, so folgt eben, dass die Entwickelung in V) richtig ist. Zugleich folgt hieraus, dass

Digitized by Google

$-\frac{v\sin ma-\sin(m+1)a}{1-2v\cos a+v^2}v^{m+1}$ die Entwickelung von $v^{m+1}\sin(m+1)a$ $+v^{m+2}\sin(m+2)a+\ldots$ sein muss. Diejenigen, welche nur convergirende Reihen zulassen wollen, kommen der Hauptsache nach auf dasselbe zurück; sie verwandeln die Summe durch Weglassung eines Theiles der Summenformel in eine Entwickelung, beurtheilen aber das, was man weglassen muss, danach, ob es für den unendlich grossen Stellenzeiger m verschwindet, wobei sie denn den Werth der allgemeinen Grösse in der Entwickelung in gewisse Grenzen einschliessen müssen.

Setzt man in V) und VI) $v=1$, so findet sich

$$\text{VII)}\quad \sin a+\sin 2a+\sin 3a\ldots.=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a,$$

$$\text{VIII)}\quad 1+\cos a+\cos 2a+\cos 3a\ldots.=\tfrac{1}{2}.$$

Diese Ausdrücke haben in den Fällen, wo $a=0$ oder $=\pm 2n\pi$ ist, ihre Schwierigkeiten, die ich nun gründlich beseitigen will. Schon früher habe ich die Frage aufgeworfen, welchen Werth der Ausdruck $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ habe, wenn $v=1$ und $a=0$ genommen wird. Nimmt man erst $a=0$, so hat man $\frac{1-v}{(1-v)^2}=\frac{1}{1-v}$, welches denn für $v=1$ unendlich wird. Wird aber erst $v=1$ gesetzt, so wird jener Ausdruck von a ganz unabhängig und $=\frac{1}{2}$. Diese beiden Werthe müssen dem Ausdrucke $\frac{1-v\cos a}{1-2v\cos a+v^2}$ in dem genannten Falle doch wohl zukommen, und folglich stellt auch die Entwickelung eben diese beiden Werthe dar. Die Entwickelung $1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ hat nämlich allerdings den Werth $\frac{1}{2}$ für $a=0$, der ihr für alle übrigen a zukommt; allein sie wird in diesem Falle zugleich auch identisch mit anderen Entwickelungen, denen der Werth ∞ zukommt. Sucht man dieselbe auf einem anderen Wege, als dem obigen, so wird sich die Unbestimmtheit für $a=0$ allemal offenbaren.

Wenn ich nun mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2}=1+\cos a+\cos 2a+\ldots.$ rechne, so muss ich Acht haben, ob $a=0$ wird oder nicht. Im ersten Falle rechne ich mit einem nicht allgemein richtigen Werthe der Entwickelung und erhalte, wenn auch nicht gerade falsche, doch wenigstens einseitige Resultate. Dann muss man zu der allgemeineren Formel in VI) zurückgehen, und um dieses durch ein Beispiel zu erklären, wähle ich ein schon früher besprochenes.

Herr Doctor Schlömilch sagt in seiner Abhandlung (Thl. III. Seite 277.), wenn man die (unrichtige) Gleichung

$$\cos x+\cos 2x+\ldots.=-\tfrac{1}{2}$$

mit $f(x).dx$ multiplicire und zwischen den Grenzen 0 und a integrire, so erhalte man:

$$A)\quad \int_0^a f(x)dx+2\left[\int_0^a f(x)\cos x\,dx+\int_0^a f(x)\cos 2x\,dx+\ldots.\right]=0.$$

Weil aber eigentlich

Digitized by Google

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

sei, so folge, dass der Ausdruck in *A*) nicht $=0$ sein könne, sondern derselbe sei vielmehr

$$= \mathrm{Lim}\int_0^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)\,dx$$

für wachsende n, worüber man in Thl. I. Seite 417. nachlesen könne, wo jener mit Lim. bezeichnete Ausdruck $=\pi f(0)$ gefunden wird. Aber es ist doch

$$\mathrm{Lim}\int_b^a \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x)dx = 0,$$

und nur wenn $b=0$ ist, findet die Ausnahme statt. Man subtrahire nun in VI) beiderseits $\frac{1}{2}$, so wird

$$\tfrac{1}{2} + v\cos x + v^2\cos 2x + \ldots = \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{1-2v\cos\alpha+v^2},$$

also

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx + 2\left[v\int_0^a \cos x\,\varphi(x)dx + v^2\int_0^a \cos 2x\,\varphi(x)\,dx + \ldots\right]$$
$$= J = (1-v^2)\int_0^a \frac{\varphi(x)\,dx}{1-2v\cos x+v^2}.$$

Damit ich hier nicht zu weit von meinem Zwecke abkomme, will ich $\varphi(x)$ constant $=\beta$ setzen. Dann ist das allgemeine Integral $J = \beta\,.\,\mathrm{arc}\cos\frac{-2v+(1+v^2)\cos x}{1-v\cos x+v^2}$ + Const, also J zwischen den Grenzen $\pm 2n\pi$ und $a = \beta\,.\,\mathrm{arc.cos}\frac{-2v+(1+v^2)\cos a}{1-v\cos a+v^2} - \beta\,\mathrm{arc.cos}\,(1)$. Dieses verwandelt sich für $v=1$ in $\beta\,\mathrm{arc.cos}\,(-1) - \beta\,\mathrm{arc.cos}\,(1)$, worin der Ausdruck $\pi\beta$ enthalten ist. Zwischen den Grenzen $\pm n\pi$ und $\pm m\pi$ verwandelt sich der allgemeine Ausdruck J in $\beta\,\mathrm{arc.cos}\,(1) - \beta\,\mathrm{arc.cos}\,(1)$.

Wenn man aber in dem allgemeinen Integral J von vorn herein $r=1$ nimmt, so erhält man zwischen zwei beliebigen Grenzen $J = \mathrm{arc.cos}\,(-1) - \mathrm{arc.cos}\,(-1)$, worin der Werth 0 begriffen ist. Die mordernen Demonstrationen stellen noch die Bedingung, dass a nicht $> \frac{1}{2}\pi$ oder wenigstens nicht grösser als π sein solle, was aber nach Obigem offenbar unrichtig ist. Ueberhaupt bin ich der Meinung, dass die Sache durch die jüngst betretenen Wege am wenigsten erledigt ist und dass wir uns, in Folge obiger Darstellung, veranlasst fühlen sollten, tiefere Untersuchungen über die nach La Grange und Fourier benannten Formeln anzustellen, und

Digitized by Google

dabei auf Gründe zu fussen, welche uns tiefer in die Natur der Sache eindringen lassen, als die Con- und Divergenz. Doch mehr zu sagen, ist hier die Stelle nicht.

Gleicher Behandlung, wie die Reihe in VIII), unterliegt auch die in VII). Dieselbe giebt uns für $a=0$ das paradoxe Resultat $0+0+0+\ldots\ldots=\infty$. Dieses Paradoxon lässt sich freilich durch den Rest der Reihe erklären; allein wenn man in dem allgemeineren Ausdrucke V) $a=0$ nimmt, so erhält man wieder $0+0+\ldots\ldots=0$. Indem man solche Unbestimmtheiten endlicher Formeln bloss an ihren Entwickelungen bemerkt, kann man freilich zu dem Fehlschlusse gelangen, dass der Grund aller Irrungen in der Divergenz liege.

Zuletzt will ich noch an einem Beispiele zeigen, wie klar die analytische Sprache der Reihe VII) sei, ungeachtet ihrer Unbestimmtheit für $a=0$. Setzt man für $\sin a$ die Reihe $a-\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots$ und so auch für $\sin 2a$ u. s. w., so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}a=(1+2+3+\ldots\ldots)a-(1^3+2^3+3^3\ldots\ldots)\frac{a^3}{1.2.3}\ldots\ldots$$

Nun ist $1+2+3\ldots\ldots$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x=1$, $1^3+2^3+3^3\ldots$ der Werth der Entwickelung von $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$ für $x=1$ u. s. w. Also hätten wir $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a=\infty a-\frac{\infty^4 a^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$ Da nun bekanntlich eine Function nicht nach lauter positiven Potenzen der Hauptgrösse entwickelt werden kann, wenn die Coefficienten der Reihe unendlich werden, so sagt die Formel VII), dass man die Cotangente nicht nach lauter positiven Potenzen des Bogens entwickeln könne. Doch so etwas wird benutzt, um die Richtigkeit der divergirenden Reihen in Zweifel zu ziehen.

§. 5.

Doch ich komme nun zum Hauptzwecke, nämlich zur Feststellung der Moivreschen Formeln. Wir kehren deshalb zu den Formeln in I) und II) zurück. In I), in dem mit k multiplicirten Theile, behalten die Coefficienten aller Producte aus den verschiedenen p einerlei Grösse und Vorzeichen, wenn man sämmtliche a negativ nimmt. Da aber dadurch der Factor p_m aus $\cos a_m+\sqrt{k-1}.\sin a_m$ in $\cos a_m-\sqrt{k-1}.\sin a_m$ sich verwandelt, und dieses eben auch geschieht, wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, so ist es in der Gleichung I) einerlei, ob man alle a, oder ob man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt.

Denkt man sich nun in dem mit k multiplicirten Theile die Producte der p nach dem gewöhnlichen Multiplicationsgesetz aufgelöst, so werden sich sämmtliche Glieder in zwei Klassen abtheilen lassen, in solche, welche gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ enthalten und folglich rational sind, und dann in solche, welche

Digitized by Google

ungerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ haben und folglich irrational bleiben. Indem man in der ersten Klasse die Potenzen von $k-1$ auflöst, erhält man eine Reihe $Ak+Bk^2+Ck^3\ldots$, welche für ein gerades m (=Anzahl aller a) bis zu $k^{\frac{m}{2}}$ und für ein ungerades bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ aufsteigt. Sondert man aus den Gliedern der zweiten Klasse den Factor $\sqrt{k-1}$, so behalten sie nur gerade Potenzen von $\sqrt{k-1}$ und geben daher eine Reihe $\sqrt{k-1}\,(A'k+B'k^2+C'k^3+\ldots.)$, welche bis zu $k^{\frac{m}{2}-1}$ bei geradem und bis zu $k^{\frac{m-1}{2}}$ bei ungeradem m aufsteigt.

Man hat also

IX) $$p_1p_2\ldots.p_m=\cos(a_1+a_2+\ldots.a_m)+Ak+Bk^2+\ldots. +(\sin(a_1+a_2+\ldots.a_m)+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1},$$

und es ist nicht weiter nöthig, dass man das Bildungsgesetz von $A, B\ldots. A', B'\ldots.$ kenne.

Nehmen wir nun zuerst alle a einander gleich, so werden auch alle p identisch, und man erhält

X) $$p^m=(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots. +(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1}.$$

Wird aber die Quadratwurzel negativ genommen, oder nimmt man, was nach dem Vorigen dasselbe ist, a negativ, so wird:

$$(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots. -(\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.)\sqrt{k-1}.$$

Daraus folgt nun sogleich

XI)
$$\frac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m+(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2}$$
$$=\cos ma+Ak+Bk^2+\ldots.$$
und
$$\frac{(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^m-(\cos a-\sqrt{k-1}.\sin a)^m}{2\sqrt{k-1}}$$
$$=\sin ma+A'k+B'k^2+\ldots.$$

Man sieht nun deutlich, welche Vortheile man durch den Gebrauch des Imaginären hier erlangt, indem durch dasselbe alle Glieder, welche noch den Factor k haben, sogleich beseitigt werden. Hierfür kann man Folgendes bemerken. Das Product $p_1p_2p_3\ldots.p_m$ lässt sich immer so entwickeln, dass man zwei Theile erhält, von denen der eine rational ist, der andere mit dem Factor $\sqrt{k-1}$ behaftet bleibt. Gelingt es nun, den beiden Theilen der Entwickelung verschiedene Formen zu geben, dass man also $P+Q\sqrt{k-1}$ das eine Mal und $P'+Q'\sqrt{k-1}$ das andere Mal erhält, so müssen wir schliessen, dass $P=P'$ und $Q=Q'$ sei. Denn wenn man $\sqrt{k-1}$ negativ nimmt, erhält man $P-Q\sqrt{k-1}=P'-Q'\sqrt{k-1}$, und wenn diese Gleichung mit der vorigen $P+Q\sqrt{k-1}=P'+Q'\sqrt{k-1}$ verbunden wird, so folgt sogleich $P=P'$, $Q=Q'$. Man kann also die Elimination von $\sqrt{k-1}$ ganz

Digitized by Google

umgehen und dafür sagen, dass in der Gleichung $P+Q\sqrt{k-1}=P'+Q'\sqrt{k-1}$ der rationale Theil nur dem rationalen, der irrationale nur dem irrationalen gleich sein könne.

Aber hierbei fällt sogleich in die Augen, dass die Betrachtung gar nicht an einen besondern Werth von k geknüpft und dass daher auch die Giltigkeit der Resultate nicht auf bestimmte Werthe von k beschränkt ist. Wer indessen im Anfange der Betrachtung durchaus nur reelle Werthe für $\sqrt{k-1}$ zulassen wollte, müsste dann überlegen, dass z. B. P und P' Functionen bloss von k und nicht mehr von $\sqrt{k-1}$ sind, die für $k \geqq 1$ immer gleiche Werthe haben, und hieraus müsste die Gleichheit von P und P' auch in allen anderen Fällen nachgewiesen werden. Da dieses keine Schwierigkeiten hat, so will ich nicht länger dabei verweilen.

Die Gleichungen IX), X) und XI) gelten also auch für $k=0$, so dass, wenn nun $p_r=\cos a_r+i\sin a_r$ ist:

$$\text{XII)}\quad p_1 p_2 p_3 \ldots . p_m = \cos(a_1+a_2+a_3+\ldots . a_m) + i\sin(a_1+a_2+a_3+\ldots . a_m),$$

$$\text{XIII)}\quad (\cos a+i\sin a)^m = \cos ma + i\sin ma,$$

$$\text{XIV)}\quad \begin{cases} \cos ma = \dfrac{(\cos a+i\sin a)^m+(\cos a-i\sin a)^m}{2}, \\ \sin ma = \dfrac{(\cos a+i\sin a)^m-(\cos a-i\sin a)^m}{2i}; \end{cases}$$

und wenn man noch das Binom $(\cos a \pm i\sin a)^m$ auflöst:

$$\text{XV)}\quad \begin{cases} \cos ma = \cos a^m - m_2 \cos a^{m-2}\sin a^2 + m_4 \cos a^{m-4}\sin a^4 \ldots . , \\ \sin ma = m_1 \cos a^{m-1}\sin a - m_3 \cos a^{m-3}\sin a^3 + m_5 \cos a^{m-5}\sin a^5 \ldots \end{cases}$$

Alle diese Formeln sollen zunächst nur für ganze positive Werthe von m gelten, doch reichen sie noch für die goniometrische Darstellung der m Werthe von $\sqrt[m]{\pm 1}$ aus. Aus XIII) folgt nämlich, wenn man $\frac{a}{m}$ statt a setzt:

$$\cos\frac{a}{m}+i\sin\frac{a}{m}=(\cos a+i\sin a)^{\frac{1}{m}},$$

sofern man an diese Form noch keine andere Forderung stellt, als dass die Entwickelung ihrer $m$ten Potenz $=\cos a+i\sin a$ werden soll. Nimmt man nun $a=2\mu\pi$ oder $=(2\mu+1)\pi$, so wird $\cos a+i\sin a=+1$ oder $=-1$, und man hat

$$\text{XVI)}\quad \begin{cases} \sqrt[m]{+1} = \cos\dfrac{2\mu\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\mu\pi}{m}, \\ \sqrt[m]{-1} = \cos\dfrac{2\mu\pi}{m}-i\sin\dfrac{2\mu\pi}{m}. \end{cases}$$

Digitized by Google

§. 6.

Ich komme nun zur Erörterung des Falles, wo in den Moivreschen Formeln der Exponent ein Bruch ist. Hier lassen sich nun zwar die Rechnungen mit dem allgemeineren Zeichen $\sqrt{k-1}$ fortführen; da indessen die Formeln IX) und X) des vorigen §. allgemein für jeden Werth von k gelten, so kann man der weitläufigeren Rechnung durch den Gebrauch des Imaginären überhoben sein. Hierbei darf man aber die daselbst gestellte Bemerkung nicht übersehen, dass, wenn für dieselbe Form zwei Entwickelungen $P+iQ$ und $P'+iQ'$ gefunden worden sind, $P=P'$ und $Q=Q'$ sein muss. Dieser Schluss ist unfehlbar, und mit ihm gleichbedeutend ist das Eliminationsverfahren durch eine zweite Gleichung, die man erhält, wenn man i negativ nimmt; aber man hat hier oft ein Eliminationsverfahren in Anwendung gebracht, das zwar beim ersten Anblick tadellos erscheint, aber demungeachtet sich als ein sehr gefahrvolles erweist.

Aus XIII) lässt sich auf eine leichte Weise folgern, dass

$$\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a=\sqrt[n]{(\cos a+i\sin a)^m}$$
$$=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

sein muss. Da aber dieser Ausdruck wegen der Vieldeutigkeit der zu $\cos a$ und $\sin a$ gehörigen Bögen ein vieldeutiger ist, so pflegt man gewöhnlich die Vieldeutigkeit durch Hinzufügung des Factors $1^{\frac{m}{n}}$ zu erklären, ohne weitere Rücksicht darauf zu nehmen, dass es doch eines Beweises bedürfte, dass die Vieldeutigkeit jenes Ausdrucks durch den Factor $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt werde. Doch wenn wir auch hiervon absehen, so schloss man ferner auf die Gleichung

$$\cos\frac{m}{n}a-i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$$

von jener ersten dadurch, dass man a negativ nahm und meinte dann weiter die Gleichungen

$$2\cos\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}+(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u+v,$$

$$2i\sin\frac{m}{n}a=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}-(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}=u-v$$

begründet zu haben. Aber auf solche Art ist das Imaginäre nur bei Bögen des ersten Quadranten eliminirt; man muss bei grösseren Bögenwerthen die conjugirten Formeln $(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ und $(\cos a-i\sin a)^{\frac{m}{n}}$ nicht dadurch aus einander herleiten, dass man a negativ nimmt, sondern man muss i negativ werden lassen, damit

Digitized by Google

auch das i in dem Factor $1^{\frac{m}{n}}$ an der Veränderung mit Theil nimmt. Dabei wird es denn freilich nothwendig, dass man vorher die Formel $\cos a \pm i \sin a$ auf Bögen des ersten Quadranten reducire. Statt dessen setzte man aber immer obiges $u+v$ satt $2\cos\frac{m}{n}a$ und $u-v$ statt $2i\sin\frac{m}{n}a$ und umgekehrt, ohne den bestimmten Ausdruck für die Vieldeutigkeit jener Formeln in Rechnung zu nehmen, verlor dadurch auch am Ende alle Vieldeutigkeit und hatte nur für Bögen des ersten Quadranten giltige Resultate. Aber, was noch schlimmer war, man nahm auf etwaige Factoren $=i$, die ausser dem i der Moivreschen Formeln in die Rechnung sich einschlichen, gar keine Rücksicht und eliminirte daher ganz falsch, erhielt folglich auch falsche Resultate, und während nun die früheren Mathematiker allen Scharfsinn aufboten, um den Irrthum zu finden, so haben viele Neuere dagegen die Schuld des Irrthumes dahin geschoben, wo alles weitere Ergründen aufhören musste, nämlich auf die Divergenz der Reihen. Darum geben sie sich auch nicht die Mühe nachzuweisen, wie die Divergenz der Reihen Ursache zu Fehlern wird, sondern glauben genug zu thun, wenn sie zeigen, dass man bei Vermeidung divergirender Reihen nichts Falsches, wenn auch nichts Allgemeines, erhält.

§. 7.

Aus dem im vorigen §. Gesagten geht zur Genüge hervor, dass man bei der Feststellung der Moivreschen Formeln für gebrochene Exponenten die Vieldeutigkeit der Wurzeln Anfangs ganz vermeiden muss. Es sei a ein (positiver oder negativer) Bogen des ersten Quadranten und $x=\cos a$, $y=\sin a$, so wird x immer eine positive Zahl sein. Man hat dann

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=(x+\sqrt{k-1}.y)^{\frac{m}{n}}$$
$$=x^{\frac{m}{n}}+\binom{\frac{m}{n}}{1}x^{\frac{m}{n}-1}y\sqrt{k-1}+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^{\frac{m}{n}-2}y^2(k-1)$$
$$+\binom{\frac{m}{n}}{3}x^{\frac{m}{n}-3}y^3(k-1)^{\frac{3}{2}}+\ldots.,$$

was wir mit $R+S\sqrt{k-1}$ bezeichnen können, so dass R und S nur noch von k, nicht aber von $\sqrt{k-1}$ abhängen. Man hat also

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=R+S\sqrt{k-1}.$$

Man setze $R=q\cos\varphi$ und $S=q\sin\varphi$, also $tg\,\varphi=\frac{S}{R}$, so wird $q=\sqrt{R^2+S^2}$. Daher

$$(\cos a+\sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}=q(\cos\varphi+\sqrt{k-1}.\sin\varphi),$$

Digitized by Google

und folglich

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^m = q^n(\cos\varphi + \sqrt{k-1}.\sin\varphi)^n,$$

oder nach §. 5:

$$\left.\begin{matrix}\cos ma + Ak + Bk^2 \ldots. \\ +(\sin ma + A'k + B'k^2 \ldots.)\sqrt{k-1}\end{matrix}\right\} = q^n \left\{\begin{matrix}\cos n\varphi + \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k^2 + \ldots. \\ +(\sin n\varphi + \mathfrak{A}'k + \mathfrak{B}'k^2 \\ \quad + \ldots.)\sqrt{k-1}\end{matrix}\right.$$

woraus nun folgt:

$$\cos ma + Ak + Bk^2 \ldots. = q^n(\cos n\varphi + \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k^2 \ldots);$$
$$\sin ma + A'k + B'k^2 \ldots. = q^n(\sin n\varphi + \mathfrak{A}'k + \mathfrak{B}'k^2 \ldots).$$

Diese Gleichungen sind richtig für jedes $k \geq 1$, sie sind daher für alle Werthe von k richtig, und wenn man nun $k=0$ setzt, so findet man:

$$\cos ma = q^n \cos n\varphi, \quad \sin ma = q^n \sin n\varphi.$$

Um den Werth von $q = \sqrt{R^2 + S^2}$ für $k=0$ zu erhalten, multiplicire man die Gleichung

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}} = R + S\sqrt{k-1}$$

mit

$$(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}} = R - S\sqrt{k-1},$$

so erhält man

$$(1 - k\sin a^2)^{\frac{m}{n}} = R^2 + S^2 - S^2 k.$$

Setzt man hier $k=0$, so folgt $q^2 = R^2 + S^2 = 1$, $q=1$, und folglich $\cos ma = \cos n\varphi$, $\sin ma = \sin n\varphi$, daher

$$\varphi = \frac{m}{n}a.$$

Nimmt man nun die Werthe, in welche die Reihen R und S für $k=0$ sich verwandeln, so erhält man:

$$\text{XVII)} \quad \cos\frac{m}{n}a = \cos a^{\frac{m}{n}} - \left(\frac{m}{n}\right)_2 \cos a^{\frac{m}{n}-2}\sin a^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_4 \cos a^{\frac{m}{n}-4}\sin a^4 \ldots,$$

$$\sin\frac{m}{n}a = \left(\frac{m}{n}\right)_1 \cos a^{\frac{m}{n}-1}\sin a - \left(\frac{m}{n}\right)_3 \cos a^{\frac{m}{n}-3}\sin a^3 + \left(\frac{m}{n}\right)_5 \cos a^{\frac{m}{n}-5}\sin a^5 \ldots\ldots$$

Dieses gilt jedoch nur, wenn der Bogen a im ersten Quadranten liegt, wie man sich auf folgende Weise überzeugen kann. Aus

Digitized by Google

den Gleichungen $\cos ma = \cos n\varphi$ und $\sin ma = \sin n\varphi$ liesse sich allerdings $n\varphi = 2\mu\pi + ma$ folgern, wo μ eine ganze positive oder negative Zahl sein kann. Dieses gäbe $\varphi = \frac{2\mu\pi + ma}{n}$, so dass also die erste der obigen Reihen $= \cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ wäre. Allein dieselbe kann nur einen von den in $\cos\frac{2\mu\pi + ma}{n}$ enthaltenen Werthen vorstellen, und da sie für $a = 0$ den Werth 1 hat, so muss auch $\cos\frac{2\mu\pi}{n} = 1$, und folglich $\mu = 0$ sein.

Daher giebt jene erste Reihe den $\cos\frac{m}{n}a$, wenn a spitz ist, und dann kann sie nicht zugleich zur Darstellung von $\cos\frac{m}{n}(2\mu\pi + a)$ dienen. Auch gilt sie nicht mehr für solche Werthe von a, für welche $\cos a$ negativ ist, weil die ganze Rechnung darauf ruht, dass $\cos a$ positiv sei.

§. 8.

Will man nun für die Vieldeutigkeit der Moivreschen Formeln bei gebrochenem Exponenten einen klaren Ausdruck erhalten, so wird man sämmtliche Wurzeln auf eine primitive zurückführen müssen. Es sei x die absolute Grösse des Cosinus eines Winkels A und y bedeute den (positiven oder negativen) Sinus desselben Winkels, so wollen wir die Zurückführung auf diejenige Wurzel des Binoms $(x + iy)^{\frac{m}{n}}$ machen, welche durch

$$x^{\frac{m}{n}} - \binom{m}{n}_1 x^{\frac{m}{n}-2} y^2 + \binom{m}{n}_2 x^{\frac{m}{n}-4} y^4 - \ldots$$
$$+ i\left(\binom{m}{n}_1 x^{\frac{m}{n}-1} y - \binom{m}{n}_2 x^{\frac{m}{n}-3} y^3 + \ldots\right)$$

ausgedrückt wird, wenn man für die gebrochenen Potenzen $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur ihre absoluten Werthe nimmt. Ist a der (positive oder negative) spitze Bogen, der zu x als Cosinus und zu y als Sinus gehört, so ist diese Wurzel nach §. 7. $= \cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a$.

Ferner ist klar, dass für jeden Werth von b

$$(\cos b + i\sin b)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}b + i\sin\frac{m}{n}b,$$

wenn man an den Ausdruck zur Linken nur die Forderung stellt, dass seine $n$te Potenz $= (\cos b + i\sin b)^m$ werden soll. Auch fällt

Digitized by Google

alle Vieldeutigkeit dieses Ausdruckes hinweg, wenn man nicht bloss die Werthe von $\cos b$ und $\sin b$ im Auge hat, sondern den Werth des Bogens b selbst als einen bestimmten voraussetzt. Denn dann würde zwar die $m$te Potenz von

$$\cos\frac{2\mu\pi+mb}{n}+i\sin\frac{2\mu\pi+mb}{n}$$

immer noch dieselben Werthe von $\cos b$ und $\sin b$, aber verschiedene Werthe von b liefern.

Nun hat man

$$\cos(b+a)+i\sin(b+a)=(\cos b+i\sin b)(\cos a+i\sin a),$$

und wenn man dieses zur Potenz vom Grade $\frac{m}{n}$ erhebt:

$$\text{XVIII)}\quad (\cos(b+a)+i\sin(b+a))^{\frac{m}{n}}$$
$$=(\cos\frac{m}{n}b+i\sin\frac{m}{n}b)\,(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}.$$

Ist aber hier a ein spitzer Bogen, dessen Cosinus $=x$ und dessen Sinus $=y$ ist, und nimmt man $b=2\mu\pi$, so wird zu $2\mu\pi+a$ doch noch x als Cosinus und y als Sinus gehören, und wenn man also $2\mu\pi+a$ mit A bezeichnet, so hat man:

$$\text{XIX)}\quad (\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=(\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n})\,(x+iy)^{\frac{m}{n}}.$$

So ist der Ausdruck zur Linken in XIX) im Allgemeinen n verschiedener Werthe fähig, so fern man nämlich nur die Werthe von $\cos A$ und $\sin A$, nicht aber zugleich auch den von A berücksichtigt. Geschieht das letztere, so verschwindet natürlich auch die Vieldeutigkeit, und man muss $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. nehmen, je nachdem A im 4.0+1sten, 4.1+1sten, 4.2+1sten, u. s. w. Quadranten liegt. Diese Bemerkung ist für den Gebrauch der Formel XIX) nicht ohne Wichtigkeit.

Da aber $\cos\frac{2m\mu\pi}{n}+i\sin\frac{2m\mu\pi}{n}$ die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ vorstellt, so verwandelt sich der Ausdruck XIX) in

$$(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}=1^{\frac{m}{n}}(x+y)^{\frac{m}{n}},$$

so dass die Vieldeutigkeit von $(\cos A+i\sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch die n Werthe von $1^{\frac{m}{n}}$ wirklich dargestellt wird.

Und weil $(x+iy)^{\frac{m}{n}}=(\cos a+i\sin a)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}a+i\sin\frac{m}{n}a$, so verwandelt sich XIX) in

Digitized by Google

$$(\cos A + i\sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2m\mu\pi + ma}{n} + i\sin\frac{2m\mu\pi + ma}{n}$$
$$= \cos\frac{m}{n}A + i\sin\frac{m}{n}A,$$

so dass also die allgemeine Giltigkeit der Moivreschen Formeln, die Manche in Zweifel gezogen haben, für diesen Fall gerechtfertigt ist.

Nimmt man nun hierin A oder i negativ, so erhält man

$$(\cos A - i\sin A)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}A - i\sin\frac{m}{n}A,$$

und aus dieser Gleichung endlich mit der vorigen:

$$\cos\frac{m}{n}A = \frac{(\cos A + i\sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i\sin A)^{\frac{m}{n}}}{2},$$

$$\sin\frac{m}{n}A = \frac{(\cos A + i\sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i\sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i};$$

und auch diese Formeln lassen sich noch rechtfertigen, wenn man nur eine solche Verbindung der Wurzeln nimmt, dass das Imaginäre sich hebt. *Sobald man also mit den Ausdrücken*

$$\frac{(\cos A + i\sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i\sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

$$\text{und } \frac{(\cos A + i\sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i\sin A)^{\frac{m}{n}}}{2}$$

die Bedingung verbindet oder verbinden muss, dass das Imaginäre sich heben soll, so wird man auch den ersten $= \cos ma$, den andern $= \sin ma$ zu setzen haben. *Aber man darf nicht glauben, dass diese Bedingung immer mit jenen Ausdrücken zu verbinden sei*; dieselben sind vielmehr die Stellvertreter noch einer anderen imaginären Form, und wenn uns der Verlauf einer Rechnung auf sie hinführt, so müssen wir uns hüthen, die genannte Bedingung mit ihnen voreilig zu verbinden. Nur wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, oder wenn bei gebrochenem Werthe von $\frac{m}{n}$ der Bogen a im ersten Quadranten liegt, ist der erste jener Ausdrücke allemal unbedingt $= \cos\frac{m}{n}a$, der andere $= \sin\frac{m}{n}a$, denn dann ist mit den

Digitized by Google

oben genannten Urwerthen von $(\cos A \pm i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ kein anderer Werth von $1^{\frac{m}{n}}$ zu verbinden als die 1.

Die Gleichung XIX) gilt aber nur, wenn $\cos A$ eine positive Grösse ist. Ist $\cos A$ negativ, so wird A im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. positiven oder negativen Quadranten liegen. Man nehme dann in XVIII) $b = (2\mu+1)\pi$ und setze $(2\mu+1)\pi + a = A$, so wird immer $\cos A = -x$ und $\sin A = -y$ sein, und man erhält:

$$\text{XX)}\ (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$$

$$= (\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n})\ (x+iy)^{\frac{m}{n}},$$

wo nun $\mu = 0, = 1, = 2$, u. s. w. zu nehmen ist, je nachdem A im $4.0+3$, $4.1+3$, $4.2+3$, u. s. w. Quadranten liegt. Man sieht also, dass wenn die Zurückführung auf die oben bezeichnete Urwurzel von $(x+iy)^{\frac{m}{n}}$ gemacht werden soll, die Verschiedenheit aller n Werthe von $(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}}$ durch den Factor $\cos \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} + i \sin \frac{m(2\mu+1)\pi}{n} = (-1)^{\frac{m}{n}}$ dargestellt wird. Auch folgt auf gleiche Weise wie oben

$$\cos \frac{m}{n} A + i \sin \frac{m}{n} A = (\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}},$$

und zugleich erhellet auch, dass die Ausdrücke

$$\frac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} + (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2} = \tfrac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$$

und $\dfrac{(\cos A + i \sin A)^{\frac{m}{n}} - (\cos A - i \sin A)^{\frac{m}{n}}}{2i} = \dfrac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \dfrac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$

nichts anderes als $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ bedeuten, wenn noch die Bedingung hinzugedacht wird, dass in den Wurzelverbindungen das Imaginäre sich heben soll. Ohne diese Bedingung aber giebt es jetzt, wo $\cos A$ negativ ist, ausser für ganze Werthe von $\frac{m}{n}$, keinen Fall, wo man jene Ausdrücke unbedingt mit $\cos \frac{m}{n} a$ und $\sin \frac{m}{n} a$ zu vertauschen sich erlauben dürfte.

Es ist jetzt nur noch nöthig, dass ich die imaginäre Bedeutung der Ausdrücke $\frac{1}{2} U^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{2} V^{\frac{m}{n}}$ und $\frac{1}{2i} U^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2i} V^{\frac{m}{n}}$ angebe. Zu dem Ende bezeichne man $(\pm 1)^{\frac{m}{n}}$ durch $\eta + i\vartheta$, so hat man

Digitized by Google

$$U^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,(x+iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,(\cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a).$$

Wird aber der Bogen A negativ genommen, so wird auch y negativ, und es verwandelt sich U in V. Daher

$$V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,(x-iy)^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,(\cos\frac{m}{n}a - i\sin\frac{m}{n}a).$$

Daher

$$\tfrac{1}{2}\,U^{\frac{m}{n}} + \tfrac{1}{2}\,V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,\cos\frac{m}{n}a,$$

$$\tfrac{1}{2i}\,U^{\frac{m}{n}} - \tfrac{1}{2i}\,V^{\frac{m}{n}} = (\eta + i\vartheta)\,\sin\frac{m}{n}a.$$

§. 9.

Ueber die Moivreschen Formeln mit negativem Exponenten ist nur wenig zu sagen übrig. Die Betrachtung lässt sich auch hier mit der allgemeineren Grösse $\sqrt{k-1}$ statt des i beginnen und, man erhält zuletzt ähnliche Resultate, wie bei positiven Exponenten. Denn wenn zuerst m eine ganze Zahl ist, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^m(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}$$

$$= \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^m}{(1-k\sin a^2)^m},$$

welches sich nach §. 5. in

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-m}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \cos ma + Ak + Bk^2 + \ldots. \\ -(\sin ma + A'k + B'k^2 + \ldots.)\sqrt{k-1} \end{matrix}\right\} : (1-k\sin a^2)^m$$

verwandelt, woraus sich alsbald alles Weitere ergiebt.

Ist aber der Exponent ein Bruch $= \frac{m}{n}$, so hat man

$$(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}.$$

Hier lassen wir nun den Bogen a zuerst im ersten Quadranten liegen und lösen $(\cos a + \sqrt{k-1}.\sin a)^{-\frac{m}{n}}$ auf in

$$\cos a^{-\frac{m}{n}} + \left(-\frac{m}{n}\right)_2 \cos a^{-\frac{m}{n}-2} \sin a^2.(k-1) + \ldots.$$

Digitized by Google

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{m}{n}\right)_1 \cos a^{-\frac{m}{n}-1} \sin a \\ +\left(-\frac{m}{n}\right)_3 \cos a^{-\frac{m}{n}-3} \sin a^3 . (k-1 \ldots .\end{array}\right\} \sqrt{k-1}$$

$$= R' + S' \sqrt{k-1}.$$

Nach §. 7. lässt sich aber $(\cos a - \sqrt{k-1}.\sin a)^{\frac{m}{n}}$ in $R - S\sqrt{k-1}$ verwandeln, so dass man also

$$R' = \frac{R}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}, \qquad S' = \frac{-S}{(1-k\sin a^2)^{\frac{m}{n}}}$$

erhält. Daher für $k=0$

$$R' = R = \cos\frac{m}{n}a = \cos\left(-\frac{m}{n}a\right),$$

$$S' = -S = -\sin\frac{m}{n}a = \sin\left(-\frac{m}{n}a\right).$$

Man sieht hieraus, dass die Reihen in XV) für jeden Werth von m gelten, wenn der positive oder negative Bogen a nur im ersten Quadranten liegt.

Bei $(\cos A + i\sin A)^{-\frac{m}{n}}$ muss man ebenfalls die Reduction auf das Binom $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ machen, wo x die absolute Grösse von $\cos A$ und $y = \sin A$ ist. Man wird da

$$(\cos A + i\sin A)^{-\frac{m}{n}} = \left(\cos\frac{2m\mu\pi}{n} - i\sin\frac{2m\mu\pi}{n}\right)(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ positiv ist, und

$$(\cos A + i\sin A)^{-\frac{m}{n}}$$

$$= \left(\cos\frac{(2\mu+1)m\pi}{n} - i\sin\frac{(2\mu+1)m\pi}{n}\right)(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$$

wenn $\cos A$ negativ ist, erhalten. Unter $(x+iy)^{-\frac{m}{n}}$ ist diejenige Wurzel zu verstehen, welche durch

$$x^{-\frac{m}{n}} - \left(-\frac{m}{n}\right)_2 x^{-\frac{m}{n}-2} y^2 + \left(-\frac{m}{n}\right)_4 x^{-\frac{m}{n}-4} y^4 \ldots .$$

$$+ i\left[\left(-\frac{m}{n}\right)_1 x^{-\frac{m}{n}-1} y - \left(-\frac{m}{n}\right)_3 x^{-\frac{m}{n}-3} y^3 + \ldots .\right]$$

berechnet wird, indem man für $x^{-\frac{m}{n}}$, $x^{-\frac{m}{n}-1}$, u. s. w. nur die

absoluten Zahlenwerthe setzt. Hieraus ist aber klar, dass die Ausdrücke XIX) und XX) auch für negative Werthe von $\frac{m}{n}$ gelten.

§. 10.

Zuletzt will ich noch die Anwendung der bisherigen Theorie an einem Beispiele zeigen, und zu dem Ende die berüchtigte Reihe

$$U = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a \ldots.$$

wählen, welche Euler als die Entwickelung von $2^n \cos a^n$ gefunden hatte und die nach ihm für alle Werthe von n und a gelten sollte. Aber Poisson entdeckte nachher, dass diese Reihe für $n = \frac{1}{2}$ und $x = \pi$ nicht mehr richtig sei, und seitdem ist sehr viel über diese Sache verhandelt worden. Mir scheint in der hier gegebenen Theorie die allereinfachste Auflösung der Verwickelung zu liegen. Es sei n überhaupt ein positiver oder negativer Bruch $\frac{p}{q}$ und zuerst $\cos a$ positiv. Der spitze Bogenwerth zu $\cos a$ sei φ, so ist allgemein, wenn k eine ganze Zahl bedeutet:

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi + i\sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi - i\sin\left(\frac{p}{q} - 2k\right)2\mu\pi\right](\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} + i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{2p\mu\pi}{q} - i\sin\frac{2p\mu\pi}{q}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Hier setzen wir zur Abkürzung

$$\cos\frac{2p\mu\pi}{q} \pm i\sin\frac{2p\mu\pi}{q} = \begin{pmatrix} R \\ R' \end{pmatrix},$$

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix};$$

und erhalten

$$\cos\left(\frac{p}{q} - 2k\right)a = RP^{\frac{p}{q} - 2k} + R'P'^{\frac{p}{q} - 2k}.$$

Dadurch verwandelt sich die Reihe

$$U = \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2 \cos\left(\frac{p}{q} - 4\right)a + \ldots$$

Digitized by Google

in

$$U=\tfrac{1}{2}R\,(P^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P^{\frac{p}{q}-4}+\ldots.)$$

$$+\tfrac{1}{2}R'\,(P'^{\frac{p}{q}}+\left(\frac{p}{q}\right)_1 P'^{\frac{p}{q}-2}+\left(\frac{p}{q}\right)_2 P'^{\frac{p}{q}-4}+\ldots.)$$

$$=\tfrac{1}{2}R(P+\tfrac{1}{P})^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'\,(P'+\tfrac{1}{P})^{\frac{p}{q}}.$$

Aber man hat

$$P+\tfrac{1}{P}=\cos\varphi+i\sin\varphi+\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}$$

$$=\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos\varphi-i\sin\varphi=2\cos\varphi,$$

und eben so

$$P'+\tfrac{1}{P'}=2\cos\varphi.$$

Unsere Reihe wird also

$$U=\tfrac{1}{2}R(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}+\tfrac{1}{2}R'\,(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}=\tfrac{1}{2}(R+R')\,2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}},$$

$$\text{d. h. } U=\cos\frac{2p\mu\pi}{q}\,.\,2^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

Daher ist allgemein

$$\text{XXI)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{2p\mu\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\cos\frac{p}{q}a+\left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a+\left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a+\ldots.$$

und dabei ist $\cos\varphi=\cos a$, und man muss nach §. 8. $\mu=0$, $=1$, $=2$, u. s. w. setzen, je nachdem a im 1sten, 5ten, 9ten, u. s. w. Quadranten liegt. Ist $q=1$, also $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl n, so wird $\cos\frac{2p\mu\pi}{q}=1$, und man erhält die gemeine Reihe

$$2^n\cos a^n=\cos na+n_1\cos(n-2)a+n_2\cos(n-4)a+\ldots..$$

die für positive und negative ganze n allgemein gilt.

Ist nun zum Zweiten cos a negativ, so wird man setzen müssen.

$$\cos(\frac{p}{q}-2k)\,a$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)\pi+i\sin(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)a](\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+\tfrac{1}{2}[\cos(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)\pi-i\sin(\frac{p}{q}-2k)(2\mu+1)a](\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

Digitized by Google

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q} + i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q} - i\sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k},$$

unter φ immer denjenigen spitzen Bogen verstanden, der zu $\cos a$ als blosser Zahl gehört. Dadurch erhält man auf gleiche Weise wie vorhin:

$$\text{XXII)}\quad 2^{\frac{p}{q}}\cos\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1\cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2\cos\left(\frac{p}{q}-4\right)a + \ldots.$$

und man muss $\mu = 0$, $= 1$, $= 2$, u. s. w. nehmen, je nachdem a im 3ten, 7ten, 11ten, u. s. w. Quadranten liegt. Unter $2^{\frac{p}{q}}$ und $(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ sind immer nur absolute Zahlen zu verstehen.

Nehmen wir nun hier mit Poisson $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$, $a = \pi$, so ist $\cos\varphi = 1$, und man erhält, weil $a = \pi$ im 3ten Quadranten liegt und folglich $\mu = 0$ ist:

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).1^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + \ldots.) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(1+1)^{\frac{1}{3}},$$

welches nun nicht mehr unrichtig ist.

Wird in XXII) $q = 1$ genommen, so erhält man abermals die gewöhnliche Reihe. Denn $\cos\varphi^{\frac{p}{q}}$ wird der Grösse nach doch immer $= \cos a^{\frac{p}{q}}$, aber $= +\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei geradem und $= -\cos a^{\frac{p}{q}}$ bei ungeradem Exponenten. Dagegen wird $\cos\frac{p}{q}(2\mu+1)\pi = -1$ bei ungeradem und $= +1$ bei geradem $\frac{p}{q}$; daher der Werth von XXII) immer $= 2^{\frac{p}{q}}\cos a^{\frac{p}{q}}$.

Hätte ich aber anfangs

$$\cos(\tfrac{p}{q}-2k)a = \tfrac{1}{2}(\cos a + i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\cos a - i\sin a)^{\frac{p}{q}-2k}$$

gesetzt und mit diesem Ausdrucke die Rechnung gemacht, ohne mich weiter um die Vieldeutigkeit der Wurzeln zu kümmern, so hätte ich ein nur für Werthe von a im ersten Quadranten passendes Resultat erhalten, eben weil jene Voraussetzung nur für solche Werthe von a passt.

Indessen ist die Formel

Digitized by Google

$$2^n \cos a^n = \cos na + n_1 \cos(n-2)a + n_2 \cos(n-4)a \ldots.$$

anfangs, wenn ich nicht irre, auf einem anderen Wege gefunden worden, bei welchem man die klare Uebersicht über die Rechnung verlor. Man setzte

$$u = \cos a + i \sin a,$$
$$v = \cos a - i \sin a,$$

so dass $2\cos a = u + v$ wird. Dadurch erhielt man

$$2^n \cos a^n = (u+v)^n = u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots.,$$

welches sich, weil $uv = 1$ ist, in

$$2^n \cos a^n = u^n + n_1 u^{n-2} + n_2 u^{n-4} + \ldots.$$

verwandelt. Weil es aber einerlei ist, ob man $u+v$ oder $v+u$ schreibt, so hat man auf gleiche Weise

$$2^n \cos a^n = v^n + n_1 v^{n-2} + n_2 v^{n-4} + \ldots.,$$

und wenn man beide Reihen für $2^n \cos a^n$ addirt:

$$2^n \cos a^n = \frac{v^n + u^n}{2} + n_1 \left(\frac{v^{n-2} + u^{n-2}}{2}\right) + n_2 \left(\frac{v^{n-4} + u^{n-4}}{2}\right) + \ldots.$$

Bis hierher ist die Rechnung ohne Tadel und der Ausdruck für jeden Werth von n und a richtig. Nun setzte man aber

$$\frac{u^n + v^n}{2} = \frac{(\cos a + i \sin a)^n + (\cos a - i \sin a)^n}{2} = \cos na,$$

und beging hier die Unvorsichtigkeit. Wenn n eine ganze positive oder negative Zahl ist, so kann man nur $\cos na$ statt $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, desgleichen auch nur, wenn bei gebrochenem n der Bogen a im ersten Quadranten liegt. Aber wenn im letzteren Falle a den ersten Quadranten überschreitet, so kann man noch etwas Anderes für $\frac{u^n + v^n}{2}$ setzen, und womit will man denn beweisen, dass gerade hier in $\frac{u^n + v^n}{2}$ das Imaginäre bei aller Vieldeutigkeit der Wurzeln sich heben müsse (§. 8.). Hiermit aber hat der Streit alle Bedeutung verloren und die analytische Allgemeinheit der Binomialreihe ist auch hier gerechtfertigt.

Doch ich fürchte, dass dieser Aufsatz schon zu lang geworden und schliesse für dies Mal mit folgenden Bemerkungen. Hat man sich denn in diesem Streite wirklich gefragt, was man unter dem Ausdrucke $2^n \cos a^n$ bei gebrochenen Exponenten denken wolle? Wollte man die verschiedenen Werthe von $\cos a^n$ bei gebrochenem n darstellen, so entsprach die Rechnung der Voraussetzung nicht. Setzen wir $\frac{p}{q}$ statt n und bezeichnen $(\pm 1)^{\frac{p}{q}}$ durch $\eta + i\vartheta$. Sei fer-

Digitized by Google

ner φ der zu $\cos a$ als Zahl gehörige spitze Bogenwerth, so ist $a^{\frac{p}{q}-2k} = (\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2k}$, und wir haben $2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots.]$. Nehmen wir aber a negativ, so wird auch $\sin\varphi$ negativ und man findet

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots]$$

und wenn man nun beide Reihen addirt, so erhält man, da, wegen des spitzen Werthes von φ, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anderes als $\cos\frac{p}{q}\varphi$ sein kann:

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)[\cos\frac{p}{q}\varphi + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q} - 2\right)\varphi + \ldots.],$$

welches eben nichts weiter sagt, als

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = 2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}.$$

War der Sinn der oben angegebene, so durfte das Imaginäre aus der Reihe nicht verschwinden.

Wollte man aber die Ausdrücke in XXI) und XXII) erhalten, so hätte man bedenken müssen, dass in $(\cos a)^{\frac{p}{q}}$ selbst noch das Imaginäre steckt, das man aber ganz unberücksichtigt liess und somit gegen den Sinn von i verstiess (§. 5. u. §. 6.), das man fälschlich für eliminirt hielt. Man hätte dann statt der eben angeführten Gleichung

$$2^{\frac{p}{q}}(\cos a)^{\frac{p}{q}} = (\eta + i\vartheta)[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots]$$

vielmehr

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= (\eta + i\vartheta)[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots.]$$

setzen sollen. Wird hier i negativ genommen, so findet sich

$$2^{\frac{p}{q}}(\eta - i\vartheta)(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$
$$= (\eta - i\vartheta)[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)_1 (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}-2} + \ldots.]$$

und indem man nun beide Reihen addirt, erhält man, da nach §. 8. $(\eta + i\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} + (\eta - i\vartheta)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}}$ nichts anders als $2\cos\frac{p}{q}a$ ist,

Digitized by Google

$$2^{\frac{p}{q}}\eta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \cos\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \ldots,$$

welches die Ausdrücke in XXI) und XXII) darstellt. Subtrahirt man dieselben Reihen, so erhält man noch

XXIII) $$2^{\frac{p}{q}}\vartheta(\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \sin\frac{p}{q}a + \left(\frac{p}{q}\right)_1 \sin\left(\frac{p}{q}-2\right)a + \left(\frac{p}{q}\right)_2 \sin\left(\frac{p}{q}-4\right)a + \ldots,$$

wo nun $\vartheta = \sin\frac{2\mu p\pi}{q}$ oder $= \sin\frac{(2\mu+1)p\pi}{q}$ gesetzt werden muss, je nachdem $\cos a$ positiv oder negativ ist.

III.

Ueber eine gewisse Gattung von Aufgaben für Prüfungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den mathematischen Aufgaben, welche sowohl hier als anderwärts zum Gebrauch für Schulen vorgelegt werden, vermisse ich eine gewisse Gattung, die mir namentlich zum Behufe von schriftlichen Prüfungen besondere Vorzüge zu besitzen scheint. Es ist bekannt, wie wenig solche Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen entsprechen, deren Lösung einen besonderen Kunstgriff, einen glücklichen Einfall erfordert, bei dessen Aufsuchung die Schüler vielleicht Stunden zubringen können, ohne ihn dennoch zu finden. So darf man z. B., wenn man etwa bei einer Abiturienten-Prüfung den Ptolemäischen Lehrsatz zum Beweisen vorlegt, — vorausgesetzt, dass dieser im Laufe des Unterrichts selbst nicht vorgekommen ist, — zuverlässig erwarten, dass kaum Einer auf die dazu nöthige Hülfslinie verfallen wird, so dass mithin allen denen, welche sich vergebens darüber abgemühet haben (und diese pflegen gerade die besseren zu sein), die Gelegenheit, den wirk-

Digitized by Google

lichen Bestand ihrer Kenntnisse zu zeigen, abgeschnitten ist. Von der anderen Seite können aber auch diejenigen Aufgaben dem Zwecke der Prüfungen nur theilweise genügen, welche im Laufe des Unterrichts wirklich vorgekommen sind; denn hier wird die Lösung zu sehr Gedächtnisssache, und kann zu keinem Urtheil über die gewonnenen Fähigkeiten des Schülers führen.

Von beiden Uebelständen frei scheint mir diejenige Gattung von Aufgaben zu sein, welche ich hiermit in Anregung bringen will. Das Charakteristische dieser Aufgaben besteht darin, dass in ihnen der Zusammenhang zwischen zwei als veränderlich angesehenen Grössen aus einer dem Schüler bekannten Sphäre gegeben, und dabei gefordert wird, während die eine dieser beiden Grössen alle Werthe innerhalb eines gewissen Intervalls durch läuft, die zugehörigen Werthe der andern Grösse anzugeben. Die Lösung dieser Aufgaben erfordert keine besondere Erfindungsgabe von Seiten des Schülers, und dennoch verlangt sie mehr als eine todte Wiederholung vorgetragener Lehren; sie eignet sich demnach in gleicher Weise für den fähigen, wie für den schwachen Schüler, und liefert deshalb auch den besten Massstab zu einer vergleichenden Beurtheilung beider. Ich will einige Aufgaben hersetzen, die sich für schriftliche Abiturienten-Prüfungen eignen möchten, zu welchem Zwecke ich sie theilweise bereits angewandt habe. Dass sie nicht zu leicht sind, darüber glaube ich die Erfahrung aller denkenden Lehrer für mich zu haben. Die Zahl derselben wird jeder Lehrer ohne Mühe vermehren können.

1. Anzugeben, welche Werthe die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2-7x+m=0$ successiv durchlaufen, wenn man m alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen lässt.

2. In derselben Gleichung alle (positiven und negativen) Werthe anzugeben, welche m durchlaufen darf, damit die Wurzeln der Gleichung nicht imaginär werden.

Eine dieser beiden Aufgaben möchte völlig hinreichen, um sich darüber zu versichern, wie ein Schüler die Theorie der quadratischen Gleichungen verstanden hat. Dasselbe gilt von der folgenden dritten Aufgabe in Bezug auf die Begriffe der trigonometrischen Functionen.

3. Anzugeben, welche Werthe der Winkel ψ in der Formel $\operatorname{tang}\psi=1+\sin\alpha-\cos\alpha$ allmälig durchläuft, wenn man α allmälig alle Werthe von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt.

4. Anzugeben, was aus den übrigen Bestandtheilen eines Dreiecks wird, wenn man eine Seite und einen ihr anliegenden Winkel ungeändert beibehält, aber den gegenüberliegenden Winkel alle Werthe durchlaufen lässt, deren er fähig ist.

Diese Aufgabe, der sich noch viele andere zur Seite stellen lassen, kann sowohl zu geometrischer als zu trigonometrischer Behandlung vorgelegt werden.

Digitized by Google

5. Anzugeben, für welche Werthe von x der Ausdruck $\log \frac{1+x}{1-x}$ im briggischen Systeme successiv die Werthe 0, 1, 2, 3.... bis ∞, sowie -1, -2, -3.... bis $-\infty$ annimmt.

Auch physikalische Aufgaben lassen sich so behandeln, z. B.

6. Die Lage des Spiegelbildes von einem gegebenen Objecte in einem sphärischen Convexspiegel anzugeben, bei allen möglichen Entfernungen vom Spiegel, die das Object successiv annehmen kann.

Ich füge hinzu, dass sich diesen Aufgaben, wenn man sie in den Unterricht selbst hineinziehen will, bequem die Betrachtung von Maximis und Minimis anknüpfen lässt, und darf sie schliesslich allen Lehrern zum Versuche empfehlen.

IV.

Nochmalige Einreden gegen Herrn Doctor Schlömilch.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

In dem Aufsatze, in welchem ich die Moivre'schen Formeln festzustellen bemüht bin, habe ich zwar die Erklärung abgegeben, dass ich den Weg der Streitschriften verlassen und dagegen die wichtigsten Momente der analytischen Theorien lieber unabhängig von zufälligen Einreden anderer in einem mehr geordneten Vortrage erläutern wollte; allein die beiden, von Herrn Dr. Schlömilch gegen mich gerichteten Aufsätze in Theil V. Heft 4. dieses Archives sind durchaus von der Art, dass ein gänzliches Schweigen nicht stattfinden kann. Denn abgesehen von allen Persönlichkeiten, so lassen sich aus jenen Aufsätzen doch einige Bemerkungen herholen, welche

Digitized by Google

für die Beleuchtung der Theorie nicht ohne Wichtigkeit sind. Ich habe mich über Herrn Dr. Schlömilchs Einreden in der That sehr gefreut, um so mehr, als im Eingange Hoffnung vorhanden schien, dass ein Einverständniss bald möglich sein werde; als ich aber diejenigen Ideen, welche die Seele der ganzen Analysis ausmachen: syntaktische Bedeutungen als Hinterthüren, Einheit der Formen als unglückliche Einbildungen bezeichnet sah, da musste ich die gefasste Hoffnung alsbald wieder aufgeben.

Dass ich diesen Streit um die Methode der unbestimmten Coefficienten und die divergirenden Reihen selbstständig und im Interesse der Wissenschaft unternommen habe und dabei kein blinder Nachbeter bin, wie mir Herr Dr. Schlömilch vorwirft, glaube ich genugsam bewiesen zu haben. Steht denn hier Herr Dr. Schlömilch auf seinen Füssen? Dass ich bei meinen Bestrebungen nicht irren könnte, habe ich nie behauptet, aber ich kann von jedem Anhänger der neueren Theorie dieselbe Ruhe und Würde im Vortrage verlangen, die der verehrte Herr Herausgeber dieses Archives für meine Ansichten zur Bedingung macht. Demselben gebührt hier in der That die grösste Hochachtung und Anerkennung, indem er, obschon gegenwärtig den neueren Ansichten sich zuneigend, dennoch seinem Archive nicht bloss eine einseitige und eben desshalb für die Wissenschaft verderbliche Richtung geben mag. Daher kann ich auch nicht glauben, dass er etwa bloss aus dem Grunde der Vertheidigung der älteren Ansichten hinderlich in den Weg treten werde, weil Herr Dr. Schlömilch alle Discussionen hierüber so lange zu verschieben bittet, bis seine kritischen Werke erschienen sind *). Ich bin der Meinung, dass auch ich kritisire, und habe eben begonnen, meine Ansichten in diesem Archive zur Beurtheilung vorzulegen, und wie nun, wenn ich meinen Gegner bäte, alle Discussionen, ja die Herausgabe seiner Werke, so lange einzustellen, bis meine Erörterungen vollständig abgedruckt sind.

Doch ich will nun zur Sache kommen.

---

*) Für dergleichen mich persönlich betreffende wohlmeinende Aeusserungen meiner geehrten Herrn Mitarbeiter bin ich denselben, wie sich von selbst versteht, jederzeit zu dem grössten Danke verpflichtet, und dieselben müssen, wenn ich nicht ganz die menschliche Natur verleugnen will, natürlich wohlthuend für mich sein. Aus einem in meinem Innersten begründeten eigenthümlichen Gefühl, welches es mir überall und jederzeit wünschenswerth macht, so wenig als nur irgend möglich von mir selbst zu reden und reden zu lassen, habe ich dergleichen Stellen bisher in den Aufsätzen jedoch immer gestrichen, wenn es sich irgend thun liess. In dem vorliegenden Falle ging dies indess, ohne den Sinn und den ganzen Zusammenhang wesentlich zu beeinträchtigen, nicht gut an, weshalb die obige mich persönlich betreffende Stelle hat stehen bleiben müssen. — Ich habe bei der Herausgabe des Archivs lediglich die Absicht, der Sache zu nützen, und bin, auch ohne dass es öffentlich ausgesprochen wird, überzeugt, dass alle diejenigen, welche es mit der Sache wahrhaft wohl meinen, mir ihre Anerkennung für mein redlich gemeintes Streben nicht ganz versagen werden.

G.

Digitized by Google

§ 2.

Herr Dr. Schlömilch bespricht zuerst meinen Gegenaufsatz Nr. XXV. in Theil IV. dieses Archives und verwirft ganz und gar meine Ansichten (ich bitte die Leser, es nicht übel zu deuten, wenn ich manchmal von einer fremden Erfindung als von der meinigen rede) über die Methode der unbestimmten Coefficienten. Auch ich habe damals einiges Unrecht gehabt, aber nur in so fern, als ich den Gegnern viel zu viel zugab. Die Ansicht, dass die Form der Reihe vorher nothwendig begründet sein müsse, ist durchaus ohne Grund, die frühere Meinung, dass es sich von selbst schon herausstellen werde, ob die Form der Reihe passend gewählt worden sei, ist schlechterdings richtig, und nur einige übel verstandene Beispiele, welche eigentlich mit der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie dieselbe gewöhnlich aufgefasst wird, gar nichts gemein haben, sind die Schuld der von mir hinzugefügten Beschränkung. Eine gründliche genetische Erklärung der analytischen Reihe, welche ich in einem der nächsten Aufsätze versuchen werde, wird hier alle Zweifel lösen. Eine solche ist meines Wissens noch nie gegeben worden und die älteren Mathematiker haben das Richtige oft mehr gefühlt, als klar gedacht. Daher rühren aber auch manche bodenlose Erklärungsversuche.

Was Herr Dr. Schlömilch in der Theorie der unbestimmten Coefficienten gegen mich auszusetzen hat, erklärt er zum Theil selbst für blosse Caprice, theils ist ihm die Sache noch nicht klar, oder er hat meine Worte übel gedeutet. Ich fragte früher, wo wohl der Erklärungsgrund herzunehmen sei, dass für zwei verschiedene Functionen dieselbe in allen ihren Theilen bestimmte Reihe gefunden werden könne. Darauf antwortet mir Herr Doctor Schlömilch, es sei die Reihe

$$1-1+1-1+\ldots.$$

nicht nur die Entwickelung von

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots.,$$

sondern auch von

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=1-x^2+x^3-x^5+\ldots.$$

und allgemein von

$$\frac{1+x+x^2+\ldots.+x^{m-1}}{1+x+x^2+\ldots.+x^{n-1}}$$
$$=1-x^m+x^n-x^{m+1}+x^{2n}-x^{m+2n}+\ldots.$$

für $x=1$, und darum sei ja $1-1+1-1+\ldots.$ etwas ganz Unbestimmtes $=\frac{m}{n}$. Hier liesse uns auch La Grange im Stiche. — Ich überlasse es nun dem Publikum, zu beurtheilen, ob dieses auf meine Erörterung passt. Die Erklärung von La Grange ist freilich nur aus der Luft gegriffen, ich aber mache die Hinterthür auf und flüchte mich zur analytischen Bedeutung der Reihe.

Digitized by Google

Was uns Herr Dr. Schlömilch hier sagt, ist uns längst bekannt, aber wir meinen keine divergirende Reihe, die wir so auf das Papier schreiben und mit einer gewissen Selbstgefälligkeit ansehen, sondern eine Reihe mit syntaktischer Bedeutung, und wenn nun die Reihe $1-1+1-1+\ldots$ die syntaktische Bedeutung von $1-x+x^2-x^3+\ldots$ hat, so ist ihre Summe $=\frac{1}{2}$ und keine andere. Man muss es Herrn Dr Schlömilch Dank wissen, dass er diese Sache schon jetzt angeregt hat; bei meinen nur langsam vorwärts schreitenden Arbeiten wäre sie viel später zur Sprache gekommen. Da aber hierdurch eben ein grosses Licht über die Frage verbreitet wird, so entschloss ich mich zur Herausgabe dieses Aufsatzes.

Herr Dr. Schlömilch hätte nur etwas weiter gehen sollen, um die grosse Schönheit in der allgemeinen Theorie der Reihen zu begreifen, gegen die er mit diesem Argumente zu Felde zieht. Er würde dann gefunden haben, dass sie kein leeres Spiel sei, sondern weit reichere Früchte tragen könne, als die Reihentheorie mit der gegenwärtigen Beschränkung.

§. 3.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern und um zugleich über den von Herrn Dr. Schlömilch angeregten Zweifel die gehörige Rechenschaft zu geben, wähle ich ein Beispiel aus dem mathematischen Lexicon (Bd. V. Abth. 1. Art. Umformung). Daselbst wird die convergirende Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\ldots.$$

so umgeformt, dass sie convergenter wird. Da

$$a+nb=a+b+(n-1)b=a+2b+(n-2)b=a+3b+(n-3)b$$

u. s. w.,

so folgt leicht

$$\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+nb)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\,.\,(n-1)b}{a(a+b)(a+nb)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{nb}{a(a+b)}+\frac{nb\,.\,(n-1)b}{a(a+b)(a+2b)}-\frac{nb\,.\,(n-1)b\,.\,(n-2)b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\ldots$$

$$\pm\frac{nb\,.\,(n-1)b\ldots.2b\,.\,b}{a(a+b)\,(a+2b)\ldots.(a+nb)}.$$

Wird nun in der Reihe S statt jedes Gliedes seine Auflösung nach diesem Gesetz substituirt, so erhält man leicht

$$S=\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+b)}$$

Digitized by Google

$$+\frac{1}{a}-\frac{2b}{a(a+b)}+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b}$$
$$-\frac{1}{a}+\frac{3b}{a(a+b)}-\frac{2b.3b}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$

u. s. w.

oder

$$S=\frac{1}{a}(1-1+1-1+\ldots.)$$
$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2+3-4+5-\ldots.)$$
$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3+6-10+\ldots.)$$
$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4+10-\ldots.)$$

u. s. w.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist nun

$$1-1+1-1+\ldots.=\tfrac{1}{2},$$
$$1-2+3-4+\ldots.=\tfrac{1}{4},$$
$$1-3+6-10+\ldots.=\tfrac{1}{8},$$

u. s. w.

Daher

$$S=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b}{a(a+b)}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$
$$+\frac{1}{16}\cdot\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\ldots.\ .$$

Was nun Herr Dr. Schlömilch gegen diese Rechnung einwenden wird, ist leicht zu sehen, aber die Richtigkeit des Resultates wird er nicht läugnen können. Aber eben diese Richtigkeit des Resultates hat doch wohl Gewicht genug, um nicht die divergirenden Reihen für puren Unsinn zu erklären.

Die Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ hat in obiger Rechnung allerdings keine bestimmte syntaktische Bedeutung und daher auch keine bestimmte Summe. Ist das die Meinung des Herrn Doctor Schlömilch, so sind wir alle einig mit ihm. Weil aber eben jene Reihe keine syntaktische Bedeutung hat, so legte der Urheber dieser Rechnung eine solche hinein, indem er ihr die Bedeutung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots.$ gab, so dass $1-1+1-\ldots.=\frac{1}{2}$ wird. Aber eben dadurch gab er auch allen übrigen Reihen ihre syntaktischen Bedeutungen und hat dieselben treu bewahrt, so dass die ganze Rechnung richtig werden musste. Denn indem er der Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die Bedeu-

Digitized by Google

tung von $x-x^2+x^3-x^4+\ldots.$ gab, ging er eigentlich von der speciellen Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}\ldots.$$

zu der allgemeineren

$$U=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^4}{a+3b}\ldots.$$

über, deren Summe ganz nach demselben Verfahren so gefunden wird:

$$U=\frac{1}{a}(1-x+x^2-x^3+\ldots.)x$$
$$+\frac{b}{a(a+b)}(1-2x+3x^2-4x^3\ldots.)x^2$$
$$+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1-3x+6x^2-10x^3\ldots.)x^3$$
$$+\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4x+10x^2\ldots.)x^4$$
u. s. w.,

d. h. nämlich

$$U=\frac{1}{a}.\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{b}{a(a+b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\ldots.$$

woraus zugleich hervorgeht, dass die umgeformte Reihe selbst dann noch brauchbar ist, wenn die Urreihe schon divergirt. Also dadurch, dass der Urheber dieser Rechnung $1-1+1-\ldots.=\frac{1}{2}$ setzte, entstand die Nothwendigkeit $1-2+3-4+\ldots.=\frac{1}{4}$, $1-3+6-10+\ldots.=\frac{1}{8}$ zu nehmen. Dies mag sich Herr Dr. Schlömilch überlegen, um die Hinterthür zu begreifen, welche in der syntaktischen Bedeutung liegt.

Aber derselbe wird sagen, ja wenn ich nun der Reihe $1-1+1-1+\ldots.$ die syntaktische Bedeutung von $1-x^2+x^3-x^5+\ldots.=\frac{1+x}{1+x+x^2}$ gegeben und sie $=\frac{2}{3}$ genommen hätte? Das hätte ganz frei gestanden, denn dadurch hätten nun auch die übrigen Reihen eine ganz andere Bedeutung erhalten, $1-2+3-4+\ldots.$ die von $1-2x^2+3x^3-4x^5+\ldots.$ u. s. w., indem dann ein Aufsteigen von der besonderen Reihe S zu der allgemeineren

$$V=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a+b}+\frac{x^3}{a+2b}-\frac{x^5}{a+3b}\ldots.$$

statt gefunden hätte. Man hätte dann zwar eine ganz andere Umbildung von S erhalten, aber dieselbe muss immer noch den Werth von S haben. Die Reihe S kann ein specieller Fall von

Digitized by Google

unzählich vielen verschiedenen Functionen sein, so wie auch jede Zahl in unzähligen Functionsformen enthalten sein kann. Man begreift, wie unendlich viel aus dieser Theorie fliessen kann: Reihenumbildungen der verschiedensten Art, bestimmte Integrale u. s. w.

Also nicht die Convergenz entscheidet über den Werth einer Reihe, sondern allgemeiner die syntaktische Bedeutung, und wo man diese in der Gewalt hat, ist jene ein unnützer Zusatz. Keine specielle Reihe hat aber an sich eine syntaktische Bedeutung, mag sie nun con- oder divergiren, sondern diese Bedeutung erhält sie erst durch eine gewisse Nothwendigkeit der Rechnung oder sie wird, wie im vorigen Beispiele, willkührlich hineingetragen. Die convergirende specielle Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}\ldots.$$

kann ein specieller Fall von

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7\ldots$$

oder von

$$\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x\ldots.$$

und von unzähligen anderen Reihen sein, obschon sie immer nur der besimmten Zahl $\frac{\pi}{4}$ gleich ist.

Hiermit darf man aber die Fälle nicht verwechseln, wo, wie manchmal geschieht, der Werth einer Reihe in derselben syntaktischen Bedeutung zweifelhaft wird. Die Rechnung mit solchen Reihen wird dann nur einseitige Resultate liefern, wenn sie nicht mit Rücksicht auf den Complex aller Werthe geführt wird, wie ich dies bereits schon nachgewiesen habe. Doch für diesmal genug hiervon.

§. 4.

Selbst die einfachsten analytischen Theorien können gefährlich werden, wenn man nicht die gehörige Vorsicht gebraucht. Ich übergehe das, was Herr Dr. Schlömilch in seiner ersten Gegenschrift (Thl. V. Nr. XXX.) weiter vorträgt, weil man dem verehrten Herrn Herausgeber unmöglich zumuthen kann, den Raum mit nutzlosem Gezänk zu verschwenden. Ich unterlasse es auch, den Vorschlag näher zu prüfen, wornach Herr Dr. Schlömilch für divergirende Reihen nicht das Gleichheitszeichen gebrauchen, sondern dafür lieber das astronomische Zeichen des niedersteigenden Knotens schreiben will. Er erkennt damit doch wenigstens eine Beziehung zwischen Urform und Reihe an, wenn gleich die Art, wie er die Beziehung aufzufassen scheint, die Verbindung aller möglichen Reihen mit jeder beliebigen Grösse gestattet. Aber einen Punkt kann ich nicht mit Stillschweigen übergehen, die Philosophie nämlich, mit welcher Herr Dr. Schlömilch für den Ausdruck $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n}$, und insbesondere auch für $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}$ einen reellen Werth erzwingen will.

Digitized by Google

Das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ ist diejenige Function $F(x)$ von x, deren Differential $= f(x)$ wird; das bestimmte Integral $\int_a^b f(x).dx$ ist dann $= F(b) - F(a)$.

Unter dieser Ansicht habe ich $\int_0^x \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ für einen arithmetischen Unsinn erklärt, weil es den Logarithmen einer negativen Zahl enthält und also imaginär wird. So ist z. B. $\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{3}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, was von $x=0$ bis $x=\infty$ den Werth $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log(-1)$ giebt. Hier lehrt mich nun Herr Doctor Schlömilch den imaginären Logarithmen reell zu machen; es sei nämlich $\log(-1) = \frac{1}{2}\log(-1)^2 = \frac{1}{2}\log 1 = 0$, und daher $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Dieses ist ein wahres Universalmittel, das Unmögliche möglich zu machen. Ich weiss nun, dass die Wurzel $1+\sqrt{-1}$ der Gleichung $x^3 - 2x + 2 = 0$ nicht imaginär ist, denn ich habe $\sqrt{-1} = \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{1} = 1$.

Herr Doctor Schlömilch giebt sich viel Mühe, von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus das Imaginäre in obigen Formeln weg zu disputiren und findet den Grund aller unserer Irrungen in der unglücklichen Idee von der Einheit der Form. Wir haben diese Idee für eine nothwendige in der mathematischen Analysis gehalten, ohne welche letztere gar nicht denkbar ist. Wir haben geglaubt, dass dieser Idee alle allgemeineren Algorithmen ihre Entstehung verdanken, dass aus ihr die Lehre von den entgegengesetzten Grössen hervorging, dass in ihr die imaginären Grössen ihren Grund haben; nun aber müssen wir diese Lieblingsidee aufgeben und auf die kritischen Werke des Herrn Dr. Schlömilch warten!

Wissen Sie, Herr Doctor Schlömilch, dass nimmermehr unbedingt $\log(-a) = \frac{1}{2}\log(-a)^2$ ist, sondern es enthält $\log(-a)$ nur den einen imaginären Werth von $\frac{1}{2}\log(-a)^2$, statt dessen Sie nun den reellen nehmen, wie es eben Ihre Kritik erfordert. Dadurch erzwingen Sie eine Formel, deren klares Verständniss Sie zugleich verlieren. Die Analysis fragt nichts nach Ihrer Formel

$$\int_a^b f(x).dx = \delta\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)],$$

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

und es ist dieselbe nicht einerlei mit obigem $F(b) - F(a)$, nicht einmal in allen Fällen, wo das allgemeine Integral $\int f(x).dx$ immer reell ist. Es sei $y = \frac{b^3}{(a-x)^2}$ die Gleichung einer Curve mit

Digitized by Google

rechtwinklichen Coordinaten, so ist das Differential der Fläche $ds = ydx = \frac{b^3 dx}{(a-x)^2}$, also $s = \frac{b^3}{a-x} + \text{Const.}$ Dieses giebt von $x=0$ bis $x=2a$ den Werth $-\frac{b^3}{2a}$, während obige Näherungsformel *) auf das Unendliche führt.

Doch ich enthalte mich jetzt des Weiteren und bemerke nur noch, dass die Analysis nicht bald $1-x$ bald $x-1$ machen darf, um einen Logarithmus, der sich unter der Rechnung als unmöglich ergiebt, reell zu machen. Auch darf sie nicht statt einer Form A eine andere B setzen, die mehrdeutig ist als A, und sich dann aus B einen Werth nach Gefallen auslesen.

§. 5.

Doch dieser Streit bezog sich zunächst nur auf die Art, nach welcher Herr Dr. Schlömilch die Integration durch eine Reihe mit der Formel $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = 0$ verglich. Nach seiner Art, die Sache zu betrachten, giebt auch die divergirende Reihe noch das richtige Resultat, weil eben $\log(-1) = 0$ ist. Mit solcher Kritik will man uns also den Gebrauch der divergirenden Reihen nehmen! will man uns nöthigen, bogenlange Rechnungen zu lesen, die wir mit ein Paar Zeilen abmachen können. Die Wissenschaft mag auf der Huth sein, dass sie die Uebersicht über sich nicht verlieren lässt. Will man eine Theorie widerlegen, so reicht es nicht hin, Exempel auf Exempel zu häufen, die man nach Principien erklären will, welche die Theorie selbst als falsch zurückweist. Herr Dr. Schlömilch wird dann auch einsehen, dass eine Summe unendlich' vieler Glieder und eine Entwickelung im Allgemeinen sehr verschiedene Dinge sind und dann die Kraftlosigkeit vieler seiner Waffen von selbst fühlen, mit denen er die Theorie bekämpfen will. Er wird dann vielleicht auch meinen Satz von der Convergenz der entwickelten Reihe, d. h. derer, welche ich als die Entwickelung einer Function kenne, dann

---

*) Hier muss ich mir, wenn auch gegen mein sonst stets befolgtes Princip, doch einmal eine Bemerkung zu machen erlauben, da nach meiner Ansicht die obige, für die ganze Analysis höchst wichtige Formel (oder vielmehr Gleichung) durchaus keine blosse Näherungsformel, sondern vielmehr eine ganz genaue, in völliger Strenge geltende Gleichung ist, wenn man nur, wie es eine strenge Behandlung der Analysis erfordert, das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ als die Gränze betrachtet, welcher die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, also δ in's Unendliche abnimmt. Ich mache diese Bemerkung hier namentlich und eigentlich zunächst bloss deshalb, weil ich mir vorgenommen habe, den wichtigen Gebrauch der obigen Gleichung bei verschiedenen Untersuchungen, wenn dieselben mit völliger Strenge geführt werden sollen, in einigen kleinen gelegentlichen Aufsätzen unter den Miscellen nachzuweisen. M. s. übrigens auch meine Abhandlung Thl. II. Nr. XXV. S. 275.

G.

Digitized by Google

nicht so sinnlos finden. — Die Reihe convergirt, wenn ihre Summe, im arithmetischen Verstande, dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, sich mehr und mehr nähert, je mehr man Glieder nimmt. Fassen wir das in der Totalität zusammen, so lässt sich sagen: die Reihe convergirt, wenn die Summe ihrer unendlich vielen Glieder dem Werthe der Function, woraus sie entwickelt wurde, gleich ist. Dieses findet immer dann statt, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden klein werden, wie Herr Doctor Schlömilch an dem bestimmten Integrale, das er zum Gegenbeweis anführen will, beispielsweise hätte sehen können. Und der Satz scheint so lange zu bestehen, als man nicht verhindern kann, dass eine Function in gewissen Fällen unendlich werde.

Doch es ist nicht abzusehen, wozu die längere Unterredung führen könnte. Denn was sollen wir sagen, wenn uns ein Mathematiker eine philosophisch-kritische Bearbeitung der Analysis verspricht, und im Voraus bemerkt, dass das Unendliche eine Auflösung der Gleichung $f(m)f(n)=f(m+n)$ sei? Oder wenn er uns die Reellität von $\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}$ dadurch begreiflich machen will, dass logarithmische Integrale durch den Werth einer gewissen Constante imaginär werden, obschon sie reell sind. Hier müssen wir jedesfalls die näheren Erläuterungen erwarten, die uns Herr Dr. Schlömilch von seinem kritisch-philosophischen Standpunkte aus geben will; einstweilen wollen wir uns nur vorbehalten, die Dinge nach unserer Weise betrachten zu dürfen.

V.

Ueber das Integral $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^m x\, dx$.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

So viel man sich mit dem Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x\, dx$$

und den daraus entspringenden analytischen Betrachtungen beschäftigt hat, so wenig Aufmerksamkeit scheint man dem allgemeineren Integrale

Digitized by Google

$$\int_0^x e^{-ax} \sin^m x \, dx \ldots\ldots (1)$$

geschenkt zu haben, obgleich dasselbe bei verschiedenen analytischen Untersuchungen vorkommt. Es möge daher in diesen Zeilen ein kleiner Beitrag zu einer Theorie desselben folgen, der sich indessen auf den Fall beschränkt, dass m eine positive ganze Zahl >1 ist.

1.

Wendet man die bekannte Reduktionsformel

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int du \int v\,dx$$

auf das Integral (1) für $u = \sin^m x$, $v = e^{-ax}$ an, so erhält man

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx = \sin^m x \int e^{-ax}\,dx - m\int \sin^{m-1} x \cos x\,dx \int e^{-ax}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} + \frac{m}{a}\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx \ldots (2)$$

Benutzt man die genannte Reduktionsformel noch einmal für das auf der rechten Seite vorkommende Integral, indem man

$$u = \sin^{m-1} x \cos x, \quad v = e^{-ax}$$

setzt, so ist

$$\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx = \sin^{m-1} x \cos x \int e^{-ax}\,dx$$

$$-\int [(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x]\,dx \int e^{-ax}\,dx;$$

oder, wenn man bemerkt, dass $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ist:

$$\int \sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}\,dx = \sin^{m-1} x \cos x \int e^{-ax}\,dx$$

$$-\int [(m-1)\sin^{m-2} x - m \sin^m x]\,dx \int e^{-ax}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}$$

$$+ \frac{m-1}{a}\int \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\,dx - \frac{m}{a}\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx.$$

Substituiren wir diess in die Gleichung (2), so wird

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\sin^m x\, e^{-ax} - \frac{m}{a^2}\sin^{m-1} x \cos x\, e^{-ax}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{a^2}\int \sin^{m-2} x\, e^{-ax}\,dx - \frac{m^2}{a^2}\int \sin^m x\, e^{-ax}\,dx,$$

und wenn wir hier das Integral

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

als Unbekannte ansehen und algebraisch bestimmen, so erhalten wir

$$\int \sin^m x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= -\frac{a\sin x + m\cos x}{a^2+m^2}\sin^{m-1}x\, e^{-ax} + \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\int \sin^{m-2}x\, e^{-ax}\, dx.$$

Diese Reduktionsformel führt unser Integral auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent von $\sin x$ um 2 erniedrigt ist. Gehen wir zur Gränze für wachsende und ebenso zu der für abnehmende x über, so ist im ersten Falle

$$\text{Lim}\, e^{-ax} = 0,$$

sobald a positiv bleibt, und im zweiten, wegen $m > 1$,

$$\text{Lim}\, \sin^{m-1}x = 0,$$

folglich

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\, dx = \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\int_0^\infty \sin^{m-2}x\, e^{-ax}\, dx.$$

Mit Hülfe dieser Reduktionsformel kann man für jedes ganze positive m den Werth des Integrales auf der linken Seite finden. Durch mehrmalige Anwendung derselben ergiebt sich nämlich, wenn $2p$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\int_0^x \sin^m x\, e^{-ax}\, dx =$$

$$\frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdots\frac{(m-2p+2)(m-2p+1)}{a^2+(m-2p+2)^2}\int_0 \sin^{m-2p}x e^{-ax}dx.$$

Ist nun m gerade, so kann man $2p = m$ nehmen, wodurch das letzte Integral in

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx$$

übergeht, dessen Werth bekanntlich $\frac{1}{a}$ ist. Man hat dann

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdots\cdots\frac{2\cdot 1}{a^2+2^2}\cdot\frac{1}{a}$$

oder

$$\int_0^x \sin^m x\, e^{-ax}dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots (m-1)m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)\cdots\cdots(a^2+m^2)} \quad \cdots\cdots(3)$$

Digitized by Google

Ist aber m ungerade, so kann man $2p=m-1$ nehmen, wodurch das letzte Integral

$$=\int_0^\infty \sin x\, e^{-ax}dx=\frac{1}{a^2+1^2}$$

wird. Es ist in diesem Falle

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\,dx$$
$$=\frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{a^2+(m-2)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{3.2}{a^2+3^2}\cdot\frac{1}{a^2+1^2}$$

oder

$$\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx=\frac{1.2.3.4.\ldots.(m-1)m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)\ldots.(a^2+m^2)}\cdot\ldots\ (4)$$

Man kann die Werthe unseres Integrales auch noch auf einem ganz anderen Wege finden. Man hat nämlich für jedes gerade m:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\sin^m x=m_0\cos mx-m_1\cos(m-2)x+m_2\cos(m-4)x-\ldots.$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}\cos 2x+(-1)^{\frac{m}{2}}\tfrac{1}{2}m_{\frac{1}{2}m},$$

wobei m_1, m_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten m bedeuten. Multiplizirt man diese Gleichung mit

$$e^{-ax}dx$$

und integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}\,dx$$
$$=m_0\int_0^\infty \cos mx\, e^{-ax}\,dx-m_1\int_0^\infty \cos(m-2)x\, e^{-ax}\,dx+\ldots.$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}\int_0^\infty \cos 2x\, e^{-ax}\,dx+(-1)^{\frac{m}{2}}\tfrac{1}{2}m_{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty e^{-ax}dx,$$

und wenn man den Werth jedes Integrales nach der allgemeinen Formel

$$\int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$$

bestimmt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\int_0^x \sin^m x\, e^{-ax}dx\\ &= \frac{m_0 a}{a^2+m^2} - \frac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2} - \cdots\\ &\quad + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1}\, a}{a^2+2^2} + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m}}{2a}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (5)$$

womit der Werth des Integrales für gerade m gefunden ist.

Für ungerade m hat man bekanntlich

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\sin^m x = m_0 \sin mx - m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x - \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin x,$$

mithin durch Multiplikation mit

$$e^{-ax}dx$$

und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x\, e^{-ax}dx$$
$$= m_0\int_0^\infty \sin mx e^{-ax}\,dx - m_1\int_0^\infty \sin(m-2)x e^{-ax}\,dx + \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}\int_0^\infty \sin x e^{-ax}\,dx;$$

oder, wenn man die einzelnen Integrationen rechts nach der allgemeinen Formel

$$\int_0^\infty \sin bx\, e^{-ax}dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

ausführt:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\int_0^\infty \sin^m x e^{-ax}\,dx\\ &= \frac{m_0 m}{a^2+m^2} - \frac{m_1(m-2)}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2} - \cdots\cdots\\ &\quad \cdots + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}\cdot 1}{a^2+1^2}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

womit der Werth des Integrales für jedes ungerade m gefunden ist.

Multiplizirt man die Gleichung (3) mit $(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}$, ebenso (4) mit

Digitized by Google

$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}$ und vergleicht sie darauf mit den Resultaten unter (5) und (6), so erhält man folgende zwei rein algebraische Relationen: für jedes gerade m:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}.1.2.3.\ldots\ldots m}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)\ldots\ldots(a^2+m^2)}\\ &= \frac{m_0 a}{a^2+m^2} - \frac{m_1 a}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2 a}{a^2+(m-4)^2} - \ldots\ldots\\ &\quad + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} m_{\frac{1}{2}m-1}\, a}{a^2+2^2} + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} m_{\frac{1}{2}m}}{2a}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

und für jedes ungerade m:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}.1.2.3.\ldots\ldots m}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)\ldots\ldots(a^2+m^2)}\\ &= \frac{m_0 m}{a^2+m^2} - \frac{m_1(m-2)}{a^2+(m-2)^2} + \frac{m_2(m-4)}{a^2+(m-4)^2} - \ldots\ldots\\ &\quad + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m_{\frac{1}{2}(m-1)}.1}{a^2+1^2}.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)\ ^*)$$

II.

Wir wollen nun noch einige Anwendungen der gefundenen Formeln mittheilen.

Hat man Gleichungen von folgender Form:

$$\varphi(x) = A_0 + A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x + \ldots,$$
$$\psi(x) = A_1 \sin x + A_3 \sin^3 x + A_5 \sin^5 x + \ldots.$$

und gelten dieselben für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\infty$, so kann man dieselben auch mit $e^{-ax}dx$ multipliziren und zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ integriren, so dass man die neue Gleichung erhält:

$$\int_0^x \varphi(x)\, e^{-ax} dx$$
$$= A_0 \int_0^x e^{-ax} dx + A_2 \int_0^\infty \sin^2 x e^{-ax} dx + A_4 \int_0^\infty \sin^4 x e^{-ax} dx + \ldots.$$

und

$$\int_0^x \psi(x)\, e^{-ax}\, dx$$
$$= A_1 \int_0^x \sin x e^{-ax} dx + A_3 \int_0^\infty \sin^3 x e^{-ax} dx + A_5 \int_0^\infty \sin^5 x e^{-ax} dx + \ldots$$

---

*) Liessen sich diese beiden Sätze wohl auch auf elementarem Wege beweisen?

Digitized by Google

Hier lassen sich die Werthe sämmtlicher Integrale auf der jedesmaligen rechten Seite mit Hülfe der Formeln (3) und (4) angeben, und hierdurch gelangt man zur Kenntniss eines bestimmten Integrales, wenn man die Integration auf der linken Seite sonst nicht zu bewerkstelligen weiss, dagegen zur Kenntniss einer Reihensumme, wenn man auf anderem Wege den Werth des Integrales links in geschlossener Form angeben kann. Z. B. Aus der für jedes beliebige x und gerade m geltenden Gleichung

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots$$

folgt durch Anwendung des obigen Prinzips der Multiplikation mit $e^{-ax}dx$ und Integration zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \cos mx e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx - \frac{m^2}{1.2}\int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-ax}\,dx + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\int_0^\infty \sin^4 x e^{-ax}dx - \ldots.$$

d. i.

$$\frac{a}{a^2+m^2} = \frac{1}{a} - \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{1.2}{a(a^2+2^2)} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.2.3.4}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)} - \ldots.;$$

oder wenn man beide Seiten mit a multiplizirt, von 1 abzieht und mit m^2 dividirt:

$$\frac{1}{a^2+m^2} = \frac{1}{a^2+2^2} - \frac{m^2-2^2}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)} + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)} - \ldots. \quad (9)$$

gültig für jedes gerade $m>0$.

Wendet man das nämliche Verfahren auf die für jedes ungerade m geltende Gleichung

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots.$$

an, so erhält man ähnlich:

$$\frac{1}{a^2+m^2} = \frac{1}{a^2+1^2} - \frac{m^2-1^2}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)} - \ldots \quad (10)^*)$$

für jedes ungerade m.

---

*) Könnte man diese Sätze auch algebraisch beweisen?

Digitized by Google

Auch von den Formeln (7) und (8) lassen sich einige bemerkenswerthe Anwendungen machen. Man schreibe nämlich in (7) x für a, multiplizire mit $\sin\gamma x\,dx$ und integrire zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$, so ist, $1.2.3....m$ kurz mit m' bezeichnet:

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}m'\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)....(x^2+m^2)}$$
$$=m_0\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+m^2}dx-m_1\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+(m-2)^2}dx+....$$
$$+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x^2+2^2}dx+(-1)^{\frac{m}{2}}m_{\frac{1}{2}m}\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{2x}dx,$$

woraus man unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\gamma x}{x+k^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\gamma k}$$

die für jedes gerade m geltende Gleichung erhält:

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}m'\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)....(x^2+m^2)}\\ =\dfrac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l}m_0e^{-m\gamma}-m_1e^{-(m-2)\gamma}+m_2e^{-(m-4)\gamma}-...\\ ....+(-1)^{\frac{m}{2}-1}m_{\frac{1}{2}m-1}e^{-2\gamma}+(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}m_{\frac{1}{2}m}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\ .....\ (11)$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (8) x für a, multiplizirt mit $\cos\gamma x\,dx$, integrirt zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$ und bringt rechts die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\gamma x}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-\gamma k}$$

für $k=m$, $m-2$, $m-4$, ... 3, 1 in Anwendung, so erhält man eben so leicht für jedes ungerade m:

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}m'\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\gamma x\,dx}{(x^2+1^2)(x^2+3^2)....(x^2+m^2)}\\ =\dfrac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l}m_0e^{-m\gamma}-m_1e^{-(m-2)\gamma}+m_2e^{-(m-4)\gamma}-....\\ ....+(-1)^{\frac{m-1}{2}}m_{\frac{1}{2}(m-1)}e^{-\gamma}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\ ...\ (12)!$$

welche Gleichung das Correlat zu der (11)ten bildet.

VI.

Ueber das von Herrn Clausen auf S. 279. Theil V. Heft 2. angegebene Theorem.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der Satz, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$

$$=\frac{3}{n+3}\,,\ \frac{2}{n+3},0,\ -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3}$$

ist, je nachdem n der Form

$$6\nu,\ 6\nu+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

angehört, ist nur ein spezieller Fall eines bereits bekannten allgemeineren Theorems.

Man hat nämlich für jedes ganze positive m

$$2\cos mx=(2\cos x)^m-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$

$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6}+\ldots.$$

Daraus folgt für $x=\frac{\pi}{3}$:

$$2\cos\frac{m\pi}{3}=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-3)}{1.2}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}+\ldots.$$

oder

Digitized by Google

$$\frac{1-2\cos\frac{m\pi}{3}}{m}=1-\frac{m-3}{2}+\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}-\ldots$$

Setzt man noch $m=n+3$, so wird $\cos\frac{m\pi}{3}=\cos(\frac{n\pi}{3}+\pi)$ $=-\cos\frac{n\pi}{3}$, folglich

$$\frac{1}{n+3}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$=1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots,$$

woraus man sogleich das Clausen'sche Theorem erhält, wenn man der Reihe nach $n=6v$, $6v+1$, 2, 3, 4, 5 nimmt, worin v eine ganze positive Zahl bedeutet.

Ein ganz ähnliches Theorem lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{\sin mx}{\sin x}$$
$$=(2\cos x)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos x)^{m-5}-\ldots$$

ableiten. Setzt man hier $x=\frac{\pi}{3}$ und $m=n+2$, so wird

$$\frac{\sin\frac{n+2}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots$$

Daraus ergiebt sich, dass die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}+\ldots.$$
$$=+1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ +1$$

ist, je nachdem n unter der Form

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

steht, worin v eine ganze positive Zahl bedeutet.

Digitized by Google

VII.

Ueber die Construction der Normalen, Tangenten und Krümmungshalbmesser an solchen Curven, welche durch einen Punkt beschrieben werden, der mit zwei andern nach einem gegebenen Gesetze sich bewegenden Punkten fest verbunden ist.

Von dem

Herrn Professor Doctor Stegmann

an der Universität zu Marburg.

In dem Journal „L'Institut" fanden sich in den letzten Nummern des vorigen Jahrganges, nämlich Nr. 573 und Nr. 574, zwei kurze Berichte über eine von Herrn Abel Transon ersonnene und der Société philomatique zu Paris in den Sitzungen vom 30. November und 14. December 1844 vorgetragene Methode zur Bestimmung der Krümmungshalbmesser bei solchen Curven, welche entstanden sind (oder angesehen werden können als entstanden) durch Bewegung eines Punkts, der mit zwei andern sich auf gegebenen Curven bewegenden Punkten fix verbunden ist. Diese Methode ist nicht allein an und für sich so sinnreich und ihre Anwendung in den geeigneten Fällen so förderlich und die andern bekannten Mittel übertreffend, sondern auch ein Paar Lehrsätze, auf welche sie gestützt ist, sind so interessant, dass es zu bedauern sein würde, wenn in Deutschland die Aufmerksamkeit der Geometer sich nicht darauf hingerichtet hätte. Zugleich aber sind die Andeutungen, welche das genannte Journal darüber macht, so kurz und die Beweise so unterdrückt, dass man nicht leicht auf den ersten Blick das Ganze zu durchschauen vermag. Aus diesen Gründen erscheint vielleicht die Mittheilung der folgenden Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht unnütz.

Digitized by Google

§. 1.

Wir nehmen an, ein System von Punkten, welche in einer Ebene liegen und eine unveränderliche Lage gegen einander behalten sollen, also sämmtlich als Punkte einer ebenen Figur gedacht werden können, bewege sich in seiner Ebene nach irgend einem Gesetze. Sind dabei die Linien bekannt, in welchen zwei der angenommenen Punkte fortzurücken genöthigt sind, so werden sich offenbar auch alle andern Linien, die von den übrigen Punkten beschrieben werden, vollkommen bestimmen lassen, weil jeder dritte Punkt des Systems, sobald man ihn mit den beiden zuerst gedachten Punkten verbindet, in jedem Augenblicke die dritte Ecke eines gegebenen, unveränderlichen Triangels bildet. Wenn, um eines besonderen Falls zu gedenken, zwei von den angenommenen Punkten auf parallelen Geraden fortrücken sollen, was wegen des unveränderlichen Abstands jener Punkte nur geschehen kann, in so fern ihre Bewegung nach einerlei und nicht etwa in entgegengesetzter Richtung vor sich geht, so wird augenscheinlich jeder andere Punkt des Systems sich ebenfalls in einer geraden und mit den beiden ersten Geraden parallelen Linie fortbewegen. Setzen wir diesen besondern Fall jedoch bei Seite, eben weil keine einzige Curve dabei in Betracht kommt, so sind nur drei Fälle möglich: nämlich entweder bewegt sich kein einziger Punkt des Systems in einer Geraden, oder nur ein Punkt, oder endlich es bewegen sich zwei Punkte in zwei convergenten Geraden und alle übrigen Punkte in krummen Linien (Vgl. §. 10.).

§. 2.

Man kann nun für jeden Augenblick der Bewegung die Differenzialien der von den einzelnen Punkten beschriebenen Curven als Elemente von Kreisbogen auffassen, welche sämmtlich von einem und demselben Centrum O aus beschrieben werden, also die Bewegung des ganzen Systems als eine Summe unzähliger, auf einander folgender, unendlich kleiner Rotationen um einen successiv fortrückenden Mittelpunkt O.

Seien nämlich in Taf. I. Fig. 1. die Curven $A\alpha$, $B\beta$ die Wege, welche von den zwei Punkten A und B durchlaufen werden, während das von den vier Punkten A, B, C, D gebildete System sich nach einem gegebenen Gesetze fortbewegt, so zwar, dass während A nach A' hinrückt, die Punkte B, C, D beziehungsweise nach B', C', D' gelangen werden. Wenn nun AO und BO in A und B auf den Curven $A\alpha$ und $B\beta$ normal stehen und wenn man in Gedanken den Bogen AA' in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, so wird auch BB' unendlich klein werden, und beide Curvenelemente AA' und BB' können sowohl als Elemente der Tangenten AT und BT, wie auch als Elemente von Kreisen gedacht werden, deren Mittelpunkte in der Normale AO beziehungsweise BO liegen. Aber freilich, da der Punkt B' auf der Curve $B\beta$ liegen und ausserdem $A'B'$ constant gleich AB sein

Digitized by Google

soll, so ist die Lage von B' bestimmt, sobald AA' als independentes Differenzial angenommen worden ist, und es steht daher zu beweisen, dass sich die Differenzialien BB' und AA' zu einander verhalten wie die Normalen OB und OA, denn wenn dies der Fall ist, so sind die unendlich kleinen Winkel $AOA' = \frac{AA'}{OA}$ und $BOB' = \frac{BB'}{OB}$ gleich und man darf sich dann ohne Weiteres vorstellen, der Winkel AOB habe sich um seinen Scheitel O so gedreht, dass er in die Lage $A'OB'$ gekommen sei. Zu diesem Zwecke setze ich

$$\text{W. } ATO = \alpha, \quad AA' = h, \quad OT = m;$$
$$\text{W. } BTO = \beta, \quad BB' = k;$$

so verwandelt sich die Gleichung

$$AT^2 + BT^2 - 2AT.BT.\cos ATB = AB^2$$
$$= A'T^2 + B'T^2 - 2A'T.B'T.\cos ATB$$

in folgende:

$$m^2\cos\alpha^2 + m^2\cos\beta^2 - 2m^2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$(m\cos\alpha - h)^2 + (m\cos\beta + k)^2 - 2(m\cos\alpha - h)(m\cos\beta + k)\cos(\alpha+\beta).$$

Lässt man aus dieser Gleichung die gleichen Glieder beiderseits und die Glieder mit den zweiten Dimensionen der verschwindenden Grössen h und k weg, so ergiebt sich

$$2mh\cos\alpha - 2mk\cos\beta = 2m[h\cos\beta - k\cos\alpha]\cos(\alpha+\beta),$$

also

$$h[\cos\alpha - \cos\beta\cos(\alpha+\beta)] = k[\cos\beta - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta)]$$

oder, nach leichten Transformationen,

$$h.\sin(\alpha+\beta)\sin\beta = k.\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

d. h.

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OB}{OA},$$

was zu beweisen war.

Es bedarf nun ferner nur noch der Bemerkung, dass jeder andere Punkt C, D u. s. f. des angenommenen Systems, weil er fest und unveränderlich mit den Punkten A und B verbunden ist, während der unendlich geringen Drehung, durch welche das Dreieck AOB in die Lage $A'OB'$ übergeht, auch gegen die Seiten OA und OB dieses Dreiecks eine unveränderliche Lage behalten wird, dass also

$$\text{W. } AOC = A'OC', \text{ sowie } OC = OC'$$
$$\text{W. } AOD = A'OD', \qquad OD = OD'$$

Digitized by Google

u. s. f. sein wird. Und hiermit ist der am Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Satz gerechtfertigt, und es ergiebt sich zugleich, dass die von O aus gezogenen Radien-Vectoren OC, OD u. s. f. auf den von C, D u. s. f. beschriebenen Curven normal stehen müssen.

§. 3.

Die mit den Halbmessern OA, OB.... beschriebenen Kreisbogen stehen mit den von den Punkten A, B.... bei der continuirlichen Bewegung des Systems wirklich durchlaufenen Curven im Allgemeinen nur in einer Berührung der ersten Ordnung, und der Punkt O ist keineswegs der Krümmungsmittelpunkt für diese Curven, wie am Deutlichsten vielleicht aus der Bemerkung hervorgeht, dass die eine oder andere dieser Curven, wie $B\beta$, ihre convexe Seite gegen O hinwenden kann, also ihren Krümmungsmittelpunkt auf der Verlängerung von OB über B hinaus haben muss. Forscht man nach der Grösse der einzelnen Krümmungshalbmesser, z. B. für den Punkt A, so müsste man sich in A' ebenfalls eine Normale auf die Curve errichtet denken und den Punkt zu bestimmen suchen, welchem sich der Durchschnittspunkt dieser Normale mit der vorhergehenden AO bei dem unendlichen Abnehmen von AA' ohne Ende nähert. Errichtet man ebenso in B' eine Normale auf die Curve $B\beta$, so wird diese mit der eben gedachten in A' auf die Curve $A\alpha$ errichteten Normale sich in einem Punkte O' durchschneiden, und es würden also die Convergenzpunkte von AO und $A'O'$, BO und $B'O'$, CO und $C'O'$ u. s. f. in Beziehung auf das unendlich klein werden von AA' gedacht, der Reihe nach die Krümmungsmittelpunkte der von A, B, C.... beschriebenen Curven sein.

§. 4.

Berücksichtigt man indessen, dass der eben gedachte Punkt O', nachdem die unendlich kleine Drehung um den vorigen Drehungspunkt O geschehen ist, ganz an dessen Stelle tretend, wiederum den Mittelpunkt für eine neue, unendlich geringe Drehung abgiebt, sowie dass OO' als Differenzial der Curve, auf welcher während der Bewegung des ganzen Systems sich alle Drehungsmittelpunkte O befinden, mithin als unendlich kleine aber gerade Linie zu denken ist: so wird man leicht auf eine andere Vorstellung geführt, nach welcher man das ganze System aller von A, B, C.... in jedem einzelnen Augenblick beschriebener Curvenelemente als zusammengehörige Differenzialien eines Systems cykloidischer Curven (gemeiner, oder gestreckter, oder verschlungener Cykloiden) auffassen wird, welches System in dem jedesmaligen Punkte O denjenigen Punkt besitzt, wo der sich fortwälzende Kreis die sogenannte Basis OO' tangirt.

In der That, wenn in Taf. I. Fig. 2. der um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QO beschriebene Kreis längs der Geraden GH fortrollt und zwar in dem durch die hinzu gezeichneten Pfeile

Digitized by Google

bemerklich gemachten Sinne, so beschreibt jeder beliebig in der Ebene dieses Kreises angenommene und mit dem Mittelpunkt Q auf eine feste und unveränderliche Weise verbundene Punkt eine gemeine oder gestreckte oder verschlungene Cykloide, je nachdem sein Abstand von Q gleich ist dem Radius QO, oder kleiner, wie dies bei dem Punkte A, oder grösser, wie dies bei dem Punkte B der Fall ist. Zuvörderst lässt sich nun behaupten, dass in jedem dieser Fälle die von O aus nach den beschreibenden Punkten gezogenen Geraden OA, OB.... auf den von diesen Punkten beschriebenen Cykloiden normal stehen. Dieser Satz ist in Betreff der gemeinen Cykloide allgemein bekannt, er lässt sich aber auch ohne Schwierigkeit für die andern Arten beweisen. Denn setzt man $QO=r$, $QA=R$ und den veränderlichen Wälzungswinkel $OQA=\varphi$, nimmt GH als Abscissenaxe an und die Ordinatenaxe parallel zu OQ, und fixirt den Ursprung der Coordinaten dahin wo $\varphi=0$ ist, so bestehen die Gleichungen

$$x=r\varphi-R\sin\varphi,\quad y=r-R\cos\varphi,$$

woraus folgt

$$dx=(r-R\cos\varphi)\,d\varphi=y\,d\varphi,\quad dy=R\sin\varphi\,d\varphi,$$

also

$$-\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{R\sin\varphi}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{y}{R\sin\varphi}=\frac{AP}{OP}=\text{tang}\,AOG,$$

folglich

$$-\frac{y}{R\sin\varphi}=\text{tang}\,AOH;$$

und da $-\frac{dx}{dy}$ die trigonometrische Tangente des Winkels angiebt, unter welchem die Normale der Curve gegen die Abscissenaxe geneigt ist, so muss die Normale des Punktes A mit AO zusammenfallen. Auch gilt alles dies unverändert für den Punkt B, wenn man unter R den Abstand QB versteht und bei φ sich, wie es der festgesetzte Sinn der Drehung verlangt, den convexen Winkel OQB vorstellt, so dass in der Gleichung $x=r\varphi-R\sin\varphi$ der letzte Bestandtheil $R\sin\varphi$ an und für sich einen negativen Werth erhält.

§. 5.

Man stelle sich nun vor, der mit dem Radius QO beschriebene Kreis rolle aus der betrachteten Stellung weiter fort, so dass $OO'=r.\Delta\varphi$ sei, und es gelangen dadurch die Radien QA, QB.. in die Stellung $Q'A'$, $Q'B'$.., so werden, sobald man OO' in den

Digitized by Google

Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, die Winkel AOA', BOB' u. s. f. sämmtlich einander gleich, nämlich gleich $d\varphi = \frac{OO'}{OQ}$ ausfallen. Denn es ist, wenn man $AA' = ds$ und die Normale $AO = N$ setzt,

$$AOA' = \text{tang}\, AOA' = \frac{ds}{N};$$

aber

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \,.\, \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2},$$
$$N = \sqrt{y^2 + OP^2} = \sqrt{y^2 + R^2 \sin\varphi^2};$$

also

$$\frac{ds}{N} = d\varphi.$$

Und da überdies die Curvenelemente AA', BB'... beziehungsweise auf OA, OB.... normal stehen, so dass

$$OA' = (OA^2 + AA'^2)^{\frac{1}{2}} = OA\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{AA'}{OA}\right) + \ldots.\right]$$

bei dem unendlichen Abnehmen von AA' sich von OA nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung unterscheidet; so sind die Umstände für die Erzeugung der cykloidischen Curven in jedem einzelnen Augenblicke ganz dieselben als wenn sich ein unveränderliches Dreieck AOB, oder allgemeiner ein unveränderliches System von Punkten A, B.... um einen in seiner Ebene liegenden Punkt O herumdrehte. Mit andern Worten: das System aller gleichzeitig beschriebenen Differenzialien der Cykloiden AA', BB'.... lässt sich auffassen als ein System von gleichzeitig und um das gemeinschaftliche Centrum O herum beschriebenen Kreisbogenelementen.

§. 6.

Stellt man mit diesem Ergebniss nun dasjenige zusammen, was in §. 2. und §. 3. über die Bewegung des Systems A, B, C.... der Taf. I. Fig. 1. gesagt worden ist, hält man also namentlich fest

erstens, dass sowohl bei jeder der früher gedachten von A, B, C.... in Taf. I. Fig. 1. beschriebenen, als auch bei den so eben in §. 4. und §. 5. besprochenen Cykloiden die von O' aus gezogenen Geraden OA', OB' u. s. f. wiederum normal auf den bei A', B'.... anfangenden Curvenelementen $A'A''$, $B'B''$ stehen würden;

und zweitens, dass bei jeder Curve sowohl der einen als der andern Gattung der Krümmungsmittelpunkt gedacht werden kann als der Ort, welchem sich bei dem unendlichen Abnehmen der Drehungswinkel

$$AOA' = BOB' = COC' \text{ u. s. f.}$$

Digitized by Google

der Convergenzpunkt der beiden Normalen

$$AO \text{ und } A'O', \; BO \text{ und } B'O' \text{ u. s. f.}$$

ohne Ende nähert:
so ergiebt sich, dass die Krümmungshalbmesser zu den Curven $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... der Taf. I. Fig. 1. identisch sein müssen mit den Krümmungshalbmessern eines vorläufig noch unbekannten Systems von Cykloiden, dessen Wälzungskreis im Punkte O die Basis tangirt. Dieses System von cykloidischen Bogen, die mit den Curven $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.... in einer Berührung der zweiten Ordnung stehen, wird aber genau bestimmt sein, sobald es gelungen ist, aus der Beschaffenheit der beiden gegebenen Curven $A\alpha$ und $B\beta$ die Richtung des Differenzials OO', sowie die Grösse des dem Wälzungskreis zukommenden Radius OQ zu ermitteln. Und hierzu verhilft eine gewisse sehr einfache und bei allen drei Arten der Cykloide geltende Formel für den Krümmungshalbmesser.

§. 7.

Wenn wir nämlich, um diesen Krümmungshalbmesser nach der Formel

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}$$

zu berechnen, die in §. 4. gefundenen Gleichungen

$$dx = y d\varphi \text{ und } dy = R \sin\varphi d\varphi$$

nochmals differenziiren, $d\varphi$ als independentes Differenzial behandelnd, so erhalten wir

$$d^2x = dy d\varphi = R \sin\varphi d\varphi^2 ,$$
$$d^2y = R \cos\varphi d\varphi^2 ;$$

also

$$\begin{aligned} dx d^2y - dy d^2x &= (Ry\cos\varphi - R^2\sin\varphi^2)\, d\varphi^3 \\ &= (Rr\cos\varphi - R^2\cos\varphi^2 - R^2\sin\varphi^2)\, d\varphi^3 \\ &= -R(R - r\cos\varphi)\, d\varphi^3 . \end{aligned}$$

Ferner ist zu Folge §. 5., wenn man durchgängig unter N die Normalen AO, BO u. s. f. versteht,

$$ds = N d\varphi ,$$

also

$$\varrho = \pm \frac{N^3}{R(R - r\cos\varphi)} .$$

Sobald man aber von Q das Perpendikel QU_1 auf AO, und von O aus ein (in Taf. I. Fig. 2. nicht gezeichnetes) Perpendikel OW_1 auf

Digitized by Google

AQ fällt, so ersieht man aus der Aehnlichkeit der Triangel AQU_1 und AOW_1 die Proportion $\frac{N}{AQ} = \frac{AW_1}{AU_1}$, d. h.

$$\frac{N}{R} = \frac{R - r\cos\varphi}{N - OU_1}.$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{N}{R}$ in die Formel für ϱ und bezeichnet den Winkel, welchen die vom Drehungsmittelpunkt O nach dem beschreibenden Punkt A gezogene Normale mit dem nach dem Centrum des rollenden Kreises gezogenen Radius OQ bildet, durch ϑ, so dass $OU_1 = r\cos\vartheta$ wird, so hat man

$$\varrho = \pm\frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}.$$

Dabei ist es leicht, sich zu überzeugen, dass die eben gebrauchte Gleichung

$$\frac{N}{R} = \frac{R - r\cos\varphi}{N - r\cos\vartheta}$$

auch in den Fällen richtig bleibt, wenn entweder, wie z. B. für den Punkt C der $\cos\vartheta$ einen negativen Werth erhält, oder auch dann, wenn $\cos\varphi$ negativ ist.

§. 8.

Die gefundene Formel lässt sich nun nicht allein dazu benutzen, um ϱ zu construiren, sobald N, r, ϑ bekannt sind, sondern sie wird auch, wenn an zwei Punkten des sich bewegenden Systems $ABC\ldots$ die Krümmungshalbmesser gegeben sind, sehr bequem zur Bestimmung der Lage und Grösse des gesuchten Halbmessers OQ verhelfen. Denn angenommen, ausser den Normalen $AO = N_1$ und $BO = N_2$ seien auch die den Punkten A und B zugehörigen Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 bekannt, so wird man zuvörderst die Grössen

$$AU_1 = (N_1 - r\cos\vartheta_1) = \frac{N_1^2}{\varrho_1},$$

$$BU_2 = (N_2 - r\cos\vartheta_2) = \frac{N_2^2}{\varrho^2}$$

construiren, hierdurch die Punkte U_1 und U_2 bestimmen und sobald man in diesen Punkten U_1 und U_2 Perpendikel auf die Normalen AO und BO errichtet, so wird deren Durchschnittspunkt den gesuchten Mittelpunkt des rollenden Kreises angeben. Alsdann aber ist, um für einen beliebigen dritten Punkt des sich bewegenden Systems, z. B. für den Punkt C, den Krümmungshalbmesser ϱ_3 zu bestimmen, in der Formel

Digitized by Google

$$\varrho_3 = \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3}$$

nicht allein $N_3 = CO$ und r, sondern auch $\vartheta_3 = COQ$ bekannt geworden, und man wird also ϱ_3 als dritte Proportionallinie zu zwei gegebenen Linien ohne Mühe construiren.

Es bedarf hierbei kaum der Bemerkung, dass man, wenn ϑ_3 ein stumpfer Winkel ist, für den Nenner $N_3 - r\cos\vartheta_3$ bei der Construction von ϱ_3 eine Summe zweier Linien erhält, dass derselbe aber in allen Fällen geradezu durch die Länge CU_3 dargestellt wird, sobald man vom gefundenen Mittelpunkt Q das Perpendikel QU_3 auf CO gefällt hat. Eine besondere Erwähnung dagegen verdient allerdings der Umstand, dass der Krümmungsmittelpunkt öfters auf der Normale N nicht von dem die Curve beschreibenden Punkte gegen den Drehungsmittelpunkt O hin, sondern in der entgegengesetzten Verlängerung von N liegen wird. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Cykloide, welche mit der beschriebenen Curve in einer Berührung zweiter Ordnung steht, an dem betreffenden Punkte ihre Convexität der Basis GH zukehrt. Stellt aber $y = f(x)$ die Gleichung der Cykloide zwischen y und x vor und bezeichnet man die zweite derivirte Funktion von $f(x)$ durch $f''(x)$, so muss bekanntlich, wenn der eben angedeutete Fall eintreten soll, $yf''(x)$ einen positiven Werth erhalten. In so fern nun x nicht als independente Variable behandelt werden soll, ist

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

folglich bei den Cykloiden, vermöge der in §. 7. entwickelten Formeln:

$$f''(x) = -\frac{R(R - r\cos\varphi)}{y^3},$$

und es erhält also $yf''(x)$ einen positiven Werth nur dann, wenn $r\cos\varphi > R$ ist.

Bei der verschlungenen Cykloide ist $r < R$ und bei der gemeinen ist $r = R$, folglich kann bei diesen beiden Arten niemals die eben aufgefundene Bedingung erfüllt werden, d. h. in keinem ihrer Punkte wendet eine verschlungene oder eine gemeine Cykloide der Basis GH ihre Convexität zu.

Bei einer gestreckten Cykloide ist dagegen $r > R$, und sobald also $\cos\varphi$ nicht allzu klein ausfällt, d. h. sobald W. φ nahe genug an Null oder an 2π angenommen wird, so muss $r\cos\varphi > R$ sein, also die Curve convex gegen die Basis liegen. Für die nähere Betrachtung eines solchen Falls ist die gestreckte Cykloide in Taf. I. Fig. 3. gezeichnet worden, welche in der Nähe des Punkts B die erwähnte Lage hat. Da $\cos\varphi$ für diese Annahme nothwendig positiv sein muss, weil sonst $R - r\cos\varphi$ gar nicht negativ werden könnte, so wird der W. OQB, mag er nun als φ oder, wie es in dieser Figur die Umstände erfordern, als $2\pi - \varphi$ aufgefasst werden, jedesmal spitz sein. Und da, wenn man das Perpendikel OW auf QB fällt, $QW = r\cos\varphi$ wird, während $QB = R$ ist, so führt die Voraussetzung $r\cos\varphi > R$ zu der Folgerung,

Digitized by Google

dass der Fusspunkt W auf die Verlängerung von QB über B hinaus fallen, dass also W. OBQ stumpf sein müsse. Deswegen aber muss auch der Fusspunkt des Perpendikels QU_2 auf die Verlängerung von OB über B hinaus, mithin in die Concavität der Curve fallen.

Alles dies hat nun zwar keinen ändernden Einfluss auf die in §. 7. vorgenommenen Rechnungen, denn man erhält gegenwärtig

$$BU_2 = r\cos\vartheta - N,\quad BW = r\cos\varphi - R,$$

und immer noch ist

$$\frac{BO}{BQ} = \frac{BW}{BU_2}$$

d. h.

$$\frac{N}{R} = \frac{r\cos\varphi - R}{r\cos\vartheta - N},$$

also

$$\varrho = \pm\frac{-N^2}{N - r\cos\vartheta}.$$

Allein es ergeben sich aus diesen Betrachtungen für die sichere Anwendung der am Anfange dieses Paragraphen erklärten Constructionen folgende ergänzende Regeln:

1) um den Mittelpunkt Q des Kreises zu finden, welcher als Wälzungskreis für die von den Punkten A, B, C.... zu beschreibenden cykloidischen Curvenelemente zu betrachten ist, muss man die Grössen

$$AU_1 = \frac{N_1^2}{\varrho_1} \text{ und } BU_2 = \frac{N_2^2}{\varrho_2}$$

von A beziehungsweise von B aus auf der Normale N_1 resp. N_2 nach der concaven Seite der Curve hin auftragen; — und

2) wenn man alsdann, um für einen anderen Punkt des beweglichen Systems z. B. für C den Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen, die Normale $CO = N_3$ gezogen und auf diese von dem gefundenen Punkt Q das Perpendikel QU_3 gefällt hat, so muss man die Linie

$$\frac{N_3^2}{CU_3} - \frac{N_3^2}{N_3 - r\cos\vartheta_3} = \varrho_3$$

vom beschreibenden Punkte C aus auf der Normale CO nach der Seite hintragen, wohin der Fusspunkt des Perpendikels QU_3 gefallen ist, weil dieser Punkt U_3 und der Krümmungsmittelpunkt immer beide in der Concavität der Curve liegen müssen.

§. 9.

Durch das Vorhergehende ist nun das von Herrn Abel Transon ersonnene Verfahren zur Bestimmung der Krümmungshalb-

Digitized by Google

messer vollständig erläutert. Sobald nämlich die in §. 1. vorausgesetzten Umstände eintreten, d. h. sobald eine Curve auf die Art entstanden ist oder als entstanden aufgefasst werden kann, dass der beschreibende Punkt C mit zwei anderen Punkten A und B zu einem festen und unveränderlichen Dreieck verbunden ist und dass diese letztgenannten Punkte auf zwei gegebenen Curven $A\alpha$ und $B\beta$ fortrücken: so kann man, wohin auch immer der Punkt C gerückt sein mag, zuvörderst den Punkt O, daraus die Richtung der Normale CO, also gleichzeitig auch die Lage der Tangente, und dann nach den Regeln des §. 8., insofern man die den Punkten A und B zugehörigen und den gegebenen Curven $A\alpha$, $B\beta$ entsprechenden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 ohne allzu grosse Weitläuftigkeit zu construiren im Stande ist, auch den Krümmungshalbmesser für die Curve $C\gamma$ bestimmen. Uebrigens dürfen wir hierbei nicht mit Stillschweigen übergehen, dass das erste Theorem, worauf Herr Abel Transon seine Methode gegründet hat und welches wir in §. 2. ausgesprochen und bewiesen haben, nämlich dass alle Normalen der von den einzelnen Punkten des beweglichen Systems beschriebenen Curven in jedem Augenblick in einem einzigen Punkte zusammen laufen, zuerst von Chasles, und zwar als eine Verallgemeinerung eines von Des-Cartes benutzten Satzes, aufgestellt worden ist (S. Chasles Geschichte der Geometrie, S. 649 der Uebersetzung von Sohncke).

§. 10.

Am einfachsten und merkwürdigsten unter allen Bewegungen des Dreiecks ABC ist der Fall, wenn die gegebenen Wege für die Punkte A und B beide geradlinig, also die Schenkel eines Winkels BQA (Taf. I. Fig. 4.) sind; und um von den vorhergehenden Regeln zum Beschluss eine Anwendung zu machen, wollen wir diesen Fall voraussetzen. Jeder beliebig in der Ebene der Figur angenommene und mit A und B fest und unveränderlich verbundene Punkt C beschreibt alsdann eine Ellipse, deren Mittelpunkt sich im Scheitel des W. BQA befindet. Errichtet man nun in A und B auf die Schenkel des W. BQA die Perpendikel AO und BO und zieht nach deren Durchschnittspunkt CO, so hat man die Normale und kann sofort auch die Tangente am Punkte C ziehen. Ferner, da die Krümmungshalbmesser an den Punkten A und B gegenwärtig, in was für eine Lage das ΔABC auch rücken mag, jedesmal unendlich sind, so fallen die im Vorhergehenden mit U_1 und U_2 bezeichneten Punkte mit A resp. B zusammen, woraus folgt, dass jetzt der Scheitel des W. BQA zugleich den zu suchenden Mittelpunkt des Wälzungskreises bildet. Alles dies ist übrigens auch bei der gestreckten Cykloide der Fall, welche der Punkt A in Taf. I. Fig. 2. oder der Punkt B in Taf. I. Fig. 3. beschreibt, sobald der W. QAO (resp. QBO) ein Rechter, nämlich $\cos\varphi = \frac{AQ}{OQ} = \frac{R}{r}$ ist, weil dann in den gefundenen Formeln

Digitized by Google

$$\varrho = \frac{N^3}{R(R - r\cos\varphi)} \text{ oder } \varrho = \frac{N^2}{N - r\cos\vartheta}$$

der Nenner sich auf Null reducirt.

Fällt man daher in Taf. I. Fig. 4. von Q aus auf CO das Perpendikel QU, so ist der Krümmungshalbmesser für den Punkt C gleich $\frac{CO^2}{CU}$ und ist aufzutragen in der Richtung von C nach U.

§. 11.

Bei einer genaueren Betrachtung der hier gedachten Bewegung des Dreiecks ABC ergeben sich jedoch noch einige andere merkwürdige Gesetze. Sucht man nämlich für den Punkt O den geometrischen Ort zu bestimmen, dessen Differenzial früher durch OO' bezeichnet wurde (Vgl. §. 3.), so findet man dafür einen Kreis, der um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels BQA mit dem Radius QO zu beschreiben wäre.

Denn man setze

$$QO = r,\ \text{W.}\,QOA = \vartheta_1,\ \text{W.}\,QOB = \vartheta_2,$$

so dass W. $AOB = AQB = \vartheta_1 - \vartheta_2$ ist, so erhält man aus dem $\Delta\, AQB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2\sin\vartheta_1{}^2 + r^2\sin\vartheta_2{}^2 - 2r^2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

und aus dem $\Delta\, AOB$ die Gleichung

$$AB^2 = r^2\cos\vartheta_1{}^2 + r^2\cos\vartheta_2{}^2 - 2r^2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

folglich durch Addition

$$2AB^2 = 2r^2[1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2] = 2r^2\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2,$$

also

$$AB = r\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = QO.\sin AQB.$$

Hieraus aber fliesst für QO der Werth

$$QO = \frac{AB}{\sin AQB},$$

und da sowohl der Zähler als der Nenner dieses Bruches unveränderlich ist, so bleibt QO während der Bewegung des Dreiecks ABC eine constante Grösse, was zu beweisen war.

Wir haben freilich hier den Fall zu Grunde gelegt, wo die Perpendikel AO und BO sich ausserhalb des Winkels Q schneiden, im entgegengesetzten Falle aber, wenn O zwischen die Schenkel des W. Q fällt, lässt sich der Beweis mit einer nur ganz geringen Aenderung eben so leicht führen.

§. 12.

Man nehme jetzt an, das von Q auf CQ gefällte Perpendikel

QU schnitte bei seiner Verlängerung die Ellipse in einem Punkte C', und es gehörten mit C' die Punkte A' und B' in der Art zusammen, dass das $\Delta\, A'B'C'$ die Lage des beweglichen Dreiecks in dem Augenblick angiebt, wenn die Spitze C den elliptischen Bogen CC' beschrieben hat. Fasst man nun einerseits die Lage des Punkts Q gegen das $\Delta\, A'B'C'$, andererseits die Lage des Punkts O gegen das $\Delta\, ABC$ ins Auge und beachtet, dass die Strahlen $B'Q$, $C'Q$, $A'Q$ der Reihe nach senkrecht stehen auf den in O zusammenlaufenden Strahlen BO, CO, AO; so sieht man sogleich, dass die Winkel

$$B'QC',\ C'QA',\ B'QA'$$

gleich sind den Winkeln

$$BOC,\ COA,\ BOA.$$

Hieraus aber folgt die Congruenz der beiden Vierecke $QB'C'A'$ und $OBCA$. Denn wenn man sich das Dreieck $A'B'C'$ als gegeben denkt und den Punkt Q dadurch zu bestimmen sucht, dass man über den Seiten $A'B'$ und $B'C'$ Kreisabschnitte construirt, welche die ebenfalls gegebenen Peripheriewinkel $A'QB'$ und $B'QC'$ fassen, so sieht man, dass beide Kreisbogen, weil sie bereits in B' sich schneiden, nur noch einen zweiten und deswegen bestimmten Durchschnittspunkt Q darbieten werden, worauf sich die bekannte Pothenot'sche Aufgabe stützt. Zwar würde sich allerdings ein mit ABC congruentes Dreieck — nennen wir es $\alpha\beta\gamma$ — auch noch auf eine andere Art zwischen die in Q zusammenlaufenden Strahlen legen lassen, so dass immer noch α, β, γ der Ordnung nach auf QA', QB', QC' befindlich und dennoch das Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ nicht mit $QBCA$ congruent wäre. Aber dieses Dreieck $\alpha\beta\gamma$ würde dann mit seiner entgegengesetzten Fläche in der Ebene der Figur aufliegen, gerade so als wenn man das Dreieck $A'B'C'$ vorerst um $A'B'$ als Rotationsaxe um 180^0 drehen und dann noch etwas verschieben wollte; es würde also dieses $\Delta\, \alpha\beta\gamma$ streng genommen nicht mit ABC congruent, sondern symmetrisch gleich (gegenbildlich gleich) sein, und weil eine solche Herumwendung des $\Delta\, ABC$ in unserer vorliegenden Betrachtung ganz gegen die Voraussetzung sein würde, so ist das erwähnte, mit $OBCA$ nicht congruente Viereck $Q\beta\gamma\alpha$ offenbar auszuschliessen und sein Vorkommen für unmöglich zu erklären, also Viereck $QB'C'A' \cong OBCA$.

Aus dieser Congruenz folgen nun zuvörderst die Gleichungen

$$QA' = OA,\ QB' = OB,\ QC' = OC;$$

ferner, weil die homologen Diagonalen QC' und OC durch Construktion perpendikulär auf einander gestellt sind, so müssen auch die andern Diagonalen und überhaupt alle homologen Seiten senkrecht auf einander stehen, namentlich

$$A'B' \perp AB,\ B'C' \perp BC,\ A'C' \perp AC.$$

§. 13.

Besonders merkwürdig scheint endlich noch folgendes Resultat. Da OC die Richtung der Normale für die Ellipse im Punkte

Digitized by Google

C angiebt und da QC' senkrecht auf QC steht, so ist QC' parallel zu der dem Punkte C zugehörigen Tangente, also sind QC und QC' zwei conjugirte Semidiameter der Ellipse. Dass man aber, sobald zwei conjugirte Diameter nebst ihrem Conjugationswinkel gegeben sind, die Lage und Grösse der Hauptaxen u. dgl. m. durch ganz leichte Construktionen findet, bedarf nicht der Erinneruug.

Ferner, da man für den Krümmungshalbmesser ϱ am Punkte C in §. 10. den Ausdruck $\frac{CO^2}{CU}$ gefunden hat und da zufolge §. 12. $CO=QC'$ ist, so besteht die Gleichung

$$\varrho=\frac{\overline{QC'}^2}{CU},$$

d. h. um den Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Punkt C in einer gegebenen Ellipse zu construiren, ziehe man nach C den Semidiameter QC, bestimme den zugehörigen conjugirten Semidiameter QC', und fälle vom gegebenen Punkte ein Perpendikel CU auf diesen letztern, so ist ϱ die dritte Proportionallinie zum Perpendikel CU und dem conjugirten Semidiameter QC'.

Nachschrift des Herausgebers.

Schon vor Empfang des vorhergehenden Aufsatzes hatte ich aus dem Institut die Stellen, welche die Methode des Herrn Abel Transon betreffen, ausgezogen, um sie gelegentlich den Lesern des Archivs mitzutheilen. Desto angenehmer wurde ich natürlich durch den mir gütigst zugesandten Aufsatz des Herrn Professor Dr. Stegmann überrascht, und halte mich nun, damit die Leser des Archivs sehen, wie gering die Grundlagen waren, von denen derselbe bei Abfassung seiner Abhandlung ausgehen konnte, um so mehr verpflichtet, die betreffenden Stellen aus dem Institut, welches wohl nur in die Hände weniger Leser des Archivs kommen dürfte, im Folgenden abdrucken zu lassen, was auch vielleicht noch anderen Nutzen haben kann. Leider habe ich unterlassen, die betreffenden Nummern des genannten Journals, welches, nachdem es auf kurze Zeit in meinen Händen gewesen ist, sogleich eine weitere Wanderung nach Norden antritt, überall genau zu bemerken, und bin dieselben aus dem angegebenen Grunde jetzt nachzutragen ausser Stande, weshalb ich hier schliesslich um Verzeihung bitte.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon indique une construction nouvelle pour le rayon de courbure de l'ellipse. — On sait que l'ellipse est engendrée par le sommet T d'un triangle TAB, lorsqu'on fait glisser les extrémités de la base AB sur deux axes fixes. Ce mode de description est même assez souvent employé dans la confection des épures; mais alors on réduit le triangle à la ligne de base AB, en plaçant le sommet T sur un point quelconque de cette ligne.

Digitized by Google

Dans tous les cas, on sait que si on élève en A et B deux droites perpendiculaires respectivement aux axes directeurs, ces lignes se rencontrant en O, la droite TO est à chaque instant la normale de l'ellipse pour la situation actuelle du point décrivant.

Dans tous les cas aussi on pourra construire le rayon de curbure à l'aide de la remarque suivante. Abaissez du centre M de la courbe (point de rencontre des axes) une perpendiculaire MC sur la normale TO. Soit C le pied de cette perpendiculaire. Le rayon de courbure est une troisième proportionelle aux lignes TC et TO; c'est-à-dire qu'on a $R=\frac{TO^2}{TC}$, expression très facile à construire. On sait d'ailleurs depuis long-temps, qu'en prolongeant la perpendiculaire MC jusqu'à sa rencontre en L avec la courbe, on a:

$$R=\frac{ML^2}{TC},$$

d'ou il suit que la distance des points O et T est égale au demi diamètre conjugué de MT.

(L'Institut. 1844. Nr. 573.)

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une construction du rayon de courbure de l'ellipse. Cette construction est appropriée au cas ou on engendre la courbe en augmentant ou diminuant toutes les ordonnées d'un cercle dans un même rapport.

Soient M le point de l'ellipse et M' le point correspondant du cercle; ces deux points situés sur une même ordonnée; soient ρ le rayon de courbure de l'ellipse en M, et α l'angle de la normale avec l'ordonnée. Soit aussi r le rayon de courbure de l'ellipse à l'extrémité de l'axe qui est parallèle aux ordonnées; et soit α' l'angle que fait en M' le rayon du cercle avec l'ordonnée MM'. On a la relation

$$r' \cos^3 \alpha' = \rho \cos^3 \alpha,$$

de laquelle on tire une construction très simple.

Société philomatique de Paris.

M. Abel Transon communique une méthode géométrique pour déterminer les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes. Cette méthode est fondée sur le principe suivant:

Quand une figure plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ce mouvement peut être représenté par un cercle qui roule sans glisser sur une certaine droite.

Les arcs circulaires (infiniment petits) décrits par les différents points de la figure, pendant le mouvement infiniment petit, peuvent être considérés comme des arcs de cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie) produit par le roulement de ce cercle.

D'après ce théorème, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour construire son rayon de courbure, de déterminer la grandeur et la situation du cercle qui roule au moment du mouvement ou le point décrivant aura

Digitized by Google

la position qu'on considère; ensemble déterminer la situation de la droite sur laquelle le roulement a lieu. Ce cercle et cette droite se détermineront à chaque instant par les différentes conditions du mouvement de la figure.

En effet, il y a une formule très simple pour le rayon de courbure d'une cycloide (ordinaire, allongée ou accourcie). Cette formule est

$$R = \frac{N^2}{N - r\cos i},$$

dans laquelle N est la partie normale de la cycloide entre le point décrivant et le point, sur lequel le roulement s'opère; r est le rayon du cercle roulant, et i l'angle que fait la normale du cycloide avec le rayon de cercle mené du centre au point de roulement.

Ce point de roulement n'est autre que le point qui reste fixe dans le mouvement infiniment petit de la figure, c'est-à-dire le point par lequel passent à chaque instant les normales aux trajectoires décrites par les divers points de la figure. — M. Chasles a fondé sur la consideration de ce point qui reste fixe une méthode géométrique pour la détermination des tangentes, methode applicable „toutes les fois qu'on connait les conditions géométriques du mouvement d'une figure de forme invariable à laquelle appartient le point décrivant." (Chasles Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie). — Dans les mêmes circonstances la méthode qu'on vient d'exposer donnera la détermination du rayon de courbure.

Par exemple, si on connait le mouvement de deux points de la figure, on mènera par ces points les normales aux courbes qu'ils parcourent. Appelons d'ailleurs R_1 le rayon de courbure de la courbe décrite par le premier point, sur la normale à la courbe décrite, et dans la concavité de cette courbe, on porte une longueur égale à $\frac{N_1^2}{R_1}$, l'extrémité de cette longueur marquera la projection du centre du cercle roulant; ce en vertu de la formule

$$r\cos i_1 = N_1 - \frac{N_1^2}{R_1}$$

On construira de même la projection de ce même centre sur la normale à la seconde courbe; et alors il sera bien aisé de construire le centre lui-même, ayant ses projections sur deux droites.

Projetez le centre du cercle roulant sur la normale OT au point décrivant; et soit C le pied de la perpendiculaire projetante: on aura, pour le rayon de courbure de la courbe décrite par le point T, une troisième proportionelle aux lignes OT et TC; c'est à dire

$$R = \frac{TO^2}{TC};$$

car TO correspond, dans la formule générale, à N, et CT à $N - r\cos i$. A quoi il convient d'ajouter, pour fixer le sens de la courbure, que le point C, projection du centre du cercle roulant, est toujours dans la concavité de la courbe décrite.

On voit maintenant que la formule communiquée dans une séance précédente, pour le rayon de courbure de l'ellipse, n'était qu'une simple application de cette méthode générale. Cette méthode s'applique aussi avec beaucoup de facilité à la construction du rayon de courbure des conchoides et des cissoides.

Digitized by Google

VIII.

Beweis des Lehrsatzes: Wenn ein beliebiges Dreieck in einer Ebene so bewegt wird, dass sich die Endpunkte seiner Basis fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden befinden, so wird von seiner Spitze eine Ellipse beschrieben.

Von dem

Herrn Professor Dr. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

In dem Aufsatze Nr. VII. dieses Hefts habe ich, nach dem Vorgange von Abel Transon, um dessen Methode zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers auf die Ellipse anzuwenden, den Lehrsatz als bekannt angenommen:

Wenn eine Gerade BC von constanter Länge so bewegt wird, dass sich ihre Endpunkte fortwährend auf zwei festliegenden und nicht parallelen Geraden (oder anders ausgedrückt auf den Schenkeln eines ebenen Winkels) befinden, so wird jeder Punkt A, welchen man in der Ebene der Figur beliebig angenommen aber mit B und C in eine feste Verbindung gesetzt hat, so dass das $\Delta\, BCA$ während der Bewegung der Grundlinie BC eine unveränderliche Gestalt behält, eine Ellipse beschreiben, deren Mittelpunkt sich im Durchschnittspunkt der zwei festliegenden Geraden (im Scheitel des gegebenen festliegenden Winkels) befindet.

Dieser Lehrsatz ist für einige besondere Fälle allerdings von alten Zeiten her bekannt. Schon in Newton's Arithm. univers., in dem Abschnitt de resolutione quaestionum geometricarum, behandelt das problema XXXV. den am nächsten liegenden Fall, mit welchem heutiges Tags Jedermann vertraut ist, wenn nämlich der Winkel BCA gleich Null oder gleich 180^0 ist, d. h. wenn der be-

Digitized by Google

schreibende Punkt A irgendwo in der sich bewegenden Geraden BC liegt, und im problema XXXVI. den Fall, wenn sowohl der Winkel, auf dessen Schenkeln die Punkte B und C fortrücken sollen, als auch der W. BCA ein Rechter ist. Seit Newton sind denn in gar mancherlei Schriften diese Sätze von neuem aufgestellt und bewiesen worden, und so findet man z. B. noch in diesem Archiv (Thl. VI. Heft 2. Seite 222.) für den erstgenannten Fall einen kurzen, freilich von dem Newton'schen wesentlich nicht verschiedenen Beweis von Herrn Professor Pross zu Stuttgart. Allein in der oben ausgesprochenen Allgemeinheit ist der Satz vielleicht noch nicht in gleichem Grade bekannt geworden. Es war im Jahr 1839, als ich gewahr wurde, dass ihm diese allgemeine Gültigkeit zukommt, und in dem auf Ostern 1840 erschienenen Programm des Marburger Gymnasiums habe ich sowohl den Beweis dafür geliefert, als auch verschiedene Folgerungen für besondere Fälle daraus hergeleitet. Dessen ungeachtet muss ich glauben, nachdem ich in Chasles Geschichte der Geometrie zwei darauf bezügliche Stellen (Seite 450 und Seite 650 der Uebersetzung von Sohncke) gelesen habe, dass der Satz nicht allein schon früher entdeckt gewesen, sondern auch wohl in gedruckten aber mir nicht zu Gesicht gekommenen Schriften bereits bewiesen sei; und nur für den Fall, wenn der Herr Herausgeber es an und für sich für wichtig genug oder als Ergänzung des Aufsatzes Nr. VII. für angemessen halten sollte*), setze ich den Beweis hierher.

§. 1.

Es sei in Taf. I. Fig. 5. W. $B_0QX=q$ der gegebene Winkel, auf dessen Schenkeln die Endpunkte der Basis BC des beweglichen Dreiecks BCA fortrücken sollen, wodurch die Spitze A dieses Dreiecks die Curve A_0A zu beschreiben genöthigt ist; und man setze

$$BC=a,\quad AC=b,\quad \text{W. } BCA=\gamma.$$

Ferner nehme man den Scheitelpunkt Q als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, den Schenkel QX als Abscissenaxe und die positiven Ordinaten y auf derjenigen Seite von QX an, auf welcher der W. q oder, anders ausgedrückt, der feste Schenkel QB_0 liegt.

Bezeichnet man nun den veränderlichen Winkel BCX durch φ, so liefert das rechtwinklige Dreieck ACP die Gleichungen

$$(1)\qquad y=b\sin(\varphi-\gamma),$$

$$(2)\qquad x-QC=b\cos(\varphi-\gamma);$$

aber aus dem Δ BCQ ergiebt sich

*) Jedenfalls halte ich dies zur Ergänzung des vorhergehenden Aufsatzes als völlig angemessen, weil dadurch das Verständniss jenes Aufsatzes für manchen Leser erleichtert werden wird. G.

Digitized by Google

$$\frac{QC}{a} = \frac{\sin(\varphi - q)}{\sin q} = \frac{\sin[(\varphi-\gamma)+(\gamma-q)]}{\sin q}$$
$$= \frac{\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q} + \frac{\sin(\gamma-q)\cos(\varphi-\gamma)}{\sin q}.$$

Daher verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$x - \frac{a\sin(\varphi-\gamma)\cos(\gamma-q)}{\sin q} = [b + \frac{a\sin(\gamma-q)}{\sin q}]\cos(\varphi-\gamma),$$

und wenn man hier die aus (1) fliessenden Werthe

$$\sin(\varphi-\gamma) = \frac{y}{b},\ \cos(\varphi-\gamma) = \pm\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

substituirt, zugleich beide Seiten der Gleichung in's Quadrat erhebt und der Kürze wegen

$$\gamma - q = \delta$$

setzt, so erhält man

$$x^2 - \frac{2axy\cos\delta}{b\sin q} + \frac{a^2y^2\cos\delta^2}{b^2\sin q^2}$$
$$= (b + \frac{a\sin\delta}{\sin q})^2 - (b^2 + \frac{2ab\sin\delta}{\sin q} + \frac{a^2\sin\delta^2}{\sin q^2})\frac{y^2}{b^2};$$

oder geordnet:

$$(3)\quad x^2 - \frac{2axy\cos\delta}{b\sin q} + (1 + \frac{2a\sin\delta}{b\sin q} + \frac{a^2}{b^2\sin q^2})y^2 = (b + \frac{a\sin\delta}{\sin q})^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die vom Punkt A beschriebene Curve ein Kegelschnitt ist; und da, wenn man die allgemeine Gleichung des zweiten Grads zwischen zwei Variablen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

mit der gefundenen vergleicht, die Coefficienten D und E gleich Null sind, so ist der gewählte Anfangspunkt der Coordinaten, nämlich Q, der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts.

Ferner da gegenwärtig

$$A = \frac{a^2}{b^2\sin q^2} + \frac{2a\sin\delta}{b\sin q} + 1,$$

$$B = -\frac{2a\cos\delta}{b\sin q},$$

$$C = 1;$$

Digitized by Google

also

$$B^2-4AC=4\left(-\frac{a^2\sin\delta^2}{b^2\sin q^2}-\frac{2a\sin\delta}{b\sin q}-1\right)=-4\left(\frac{a\sin\delta}{b\sin q}+1\right)^2$$

durchaus negativ ist, so muss der erzeugte Kegelschnitt in allen Fällen eine Ellipse sein.

§. 2

Obwohl aber hiermit der aufgestellte Lehrsatz schon erwiesen ist, so wird doch die folgende Ergänzung desselben auch noch einiges Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sein.

Am Anfange der eben betrachteten Bewegung des Dreiecks BCA befanden sich dessen Ecken der Ordnung nach in B_0, Q, A_0 und die Bewegung des Dreiecks zwischen den Schenkeln des Winkels q ist eigentlich zu Ende, sobald der Punkt B nach Q und der Punkt A nach K gerückt ist. Wenn man nun aber den Punkt B auf die Verlängerung des Schenkels B_0Q fortrücken, also die Basis BC zwischen den Schenkeln des Nebenwinkels XQB' sich bewegen lässt, so beschreibt die Spitze A jetzt eine Curve, deren Anfang in der Figur durch die punktirte Linie KA' bezeichnet ist, und welche geradezu die Fortsetzung des elliptischen Bogens A_0K bildet.

Um dies zu beweisen, wollen wir die Gleichungen des vorigen Paragraphen auf diese neue Curve KA' anwenden, indem wir

$$\text{W. } C'QB'=q', \quad \text{W. } B'C'X=\varphi', \quad \text{W. } B'C'A'=\gamma'$$

setzen, und bemerken, dass die Richtung für die positiven y', wenn wir die Gleichung (3) auf diesen neuen Fall beziehen wollen, zu Folge der gleich Anfangs im vorigen Paragraphen festgesetzten Bestimmung, nunmehr nach derjenigen Seite der Abscissenaxe QX fallen müsse, auf welcher der W. $XQB'=q'$ liegt, so dass die Richtung der positiven y' jetzt der im vorigen Paragraphen für die positiven Ordinaten geltenden gerade entgegengesetzt sein würde. Ferner haben wir unter γ' offenbar den convexen Winkel $B'C'A'$ zu verstehen, weil wir sonst nicht, in Uebereinstimmung mit der Gleichung (1), worauf die Gleichung (3) gegründet ist, setzen könnten:

$$A'P'=b\sin A'C'X=b\sin(\varphi'-\gamma'),$$

während man, unter γ' den convexen Winkel verstehend, aus dieser Gleichung den richtigen negativen Werth für $A'P'$ erhält. Dies vorausgeschickt, so ergiebt sich die Gleichung der neuen Curve KA' ohne Weiteres, sobald in der Gleichung (3) an die Stelle von y, q und $\delta=\gamma-q$ die Grössen y', q' und $\delta'=\gamma'-q'$ treten, da an die Buchstaben x, a, b Accente zu setzen nicht nöthig ist. Wenn dagegen die positive Richtung für die Ordinaten y' der neuen Gleichung ebenfalls, gerade wie die positiven y der Gleichung (3), auf die Seite des Winkels B_0QX fallen soll, so

Digitized by Google

ist y' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, und dadurch entsteht folgende Gleichung:

$$(4)\quad x^2+\frac{2axy'\cos\delta'}{b\sin q'}+(1+\frac{2a\sin\delta'}{b\sin q'}+\frac{a^2}{b^2\sin q'^2})y'^2 = (b+\frac{a\sin\delta'}{\sin q'})^2.$$

Nun finden aber zwischen den Constanten in dieser Gleichung und denjenigen der Gleichung (3) folgende Relationen Statt:

$$q'=\pi-q,\quad \gamma'=2\pi-\gamma,\quad \gamma'-q'=\pi-(\gamma-q)$$

also

$$\sin q'=\sin q,\quad \sin\delta'=\sin(\gamma-q)=\sin\delta,\quad \cos\delta'=-\cos(\gamma-q)=-\cos\delta;$$

und sobald man diese Werthe in die Gleichung (4) substituirt, so überzeugt man sich, dass dieselbe mit der Gleichung (3) identisch ist, dass also die Kurve KA' nichts anderes sein kann als die Fortsetzung der Curve A_0K.

IX.

Völlig strenge und allgemeine Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie.

Von

dem Herausgeber.

Vorerinnerung.

Die Aufgaben der höhern Geodäsie sind bisher immer bloss näherungsweise mit Hülfe der unendlichen Reihen aufgelöst worden, indem man bloss einige der Anfangsglieder dieser Reihen berücksichtigte, ohne sich weiter auf eine bestimmte theoretische Untersuchung über die Con-

Digitized by Google

vergenz dieser Reihen und den Grad derselben einzulassen, da wohl bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis eine blosse Untersuchung des von dem ersten weggelassenen Gliede hervorgebrachten Einflusses nicht mit dem Namen einer strengen theoretischen Untersuchung der Convergenz der fraglichen Reihen belegt werden darf, wobei übrigens nicht unbemerkt zu lassen ist, dass man auf diesem Wege, und aus dem vorhergehenden Gesichtspunkte betrachtet, zu mehreren ein grosses Interesse darbietenden sehr eleganten Resultaten gelangt ist, wie z. B. zu dem bekannten Legendre'schen Theorem für die Kugel, seiner mit Recht berühmten Erweiterung auf krumme Flächen überhaupt u. dgl.*), deren Schönheit und Wichtigkeit jeder Kundige anerkennen muss. Ausserdem ist mir nicht bekannt, dass man bei den fraglichen Untersuchungen eine bestimmte directe Rücksicht auf die dritte Coordinate der Punkte auf der Erdfläche, nämlich auf die Höhe derselben über der Meeresfläche genommen hätte. Jedenfalls hatte man wenigstens bei mehreren dieser Untersuchungen zunächst und vorzugsweise das praktische Bedürfniss im Auge, und fand dann allerdings auch in der nahen Uebereinstimmung der auf dem Wege der Rechnung gefundenen Resultate mit gewissen unmittelbar gemessenen Elementen eine für praktische Zwecke hinreichende Bürgschaft für die Richtigkeit der ganzen Operation.

Diese und ähnliche Betrachtungen haben mich veranlasst, für mehrere der wichtigsten und in der Praxis am Häufigsten in Anwendung kommende Aufgaben der höheren Geodäsie völlig strenge und theoretisch richtige Auflösungen zu suchen, welche ich nach und nach im Archive mittheilen werde, weil dieselben, wie es mir scheint, zugleich zweckmässige Uebungen in der Anwendung der Lehren der analytischen Geometrie darbieten, und mache in dem vorliegenden Aufsatze den Anfang mit der folgenden Aufgabe, welche wohl mit Recht als die Hauptaufgabe der gesammten höheren Geodäsie zu betrachten ist:

Wenn die Längen, Breiten und Höhen über der Meeresfläche zweier Punkte auf der Erde, deren durch die Gesammtheit aller Meeresflächen dargestellte wahre oder eigentliche Oberfläche als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren beide Axen als bekannt angenommen werden, um ihre Nebenaxe entstandenen Ellipsoids angesehen wird, gegeben, und in diesen Punkten die horizontalen Projectionen der beiden Winkel, welche die von dem ersten der beiden gegebenen Punkte nach dem zweiten gegebenen Punkte und nach einem dritten seiner Lage nach unbekannten Punkte, und die von dem zweiten der beiden gegebenen Punkte nach dem ersten gegebenen Punkte und demselben dritten seiner Lage nach unbekannten Punkte gezogenen geraden Linien mit einander einschliessen, — d. h. die Projectionen dieser beiden Winkel auf den durch die beiden gegebenen Punkte gelegten, auf den diesen Punkten entsprechenden, auf der Oberfläche des Erdellipsoids normalen Richtungen der Schwerkraft senkrecht stehenden Ebenen, — gemessen worden sind; so soll man die Lage des dritten Punktes, d. h. dessen Länge, Breite und Höhe über der Meeresfläche bestimmen.

Bei dieser Aufgabe zeige ich zugleich, wie durch die Auflösung selbst ein bestimmtes Kriterium für den Grad der bei der Bestimmung der Lage des unbekannten Punktes erreichten Genauigkeit dargeboten wird, welches natürlich für die Praxis von grosser Wichtigkeit ist, und

---

*) M. s. u. A. meine Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833. 4., wo diese Untersuchungen in ziemlicher Ausführlichkeit dargestellt sind.

Digitized by Google

bin der Meinung, dass man wenigstens bei der Festlegung der Hauptpunkte einer in's Grosse gehenden jederzeit sehr kostspieligen geodätischen Operation, an welche die Bestimmung der Lage aller übrigen Punkte angeschlossen wird, sich der in diesem Aufsatze entwickelten, oder einer ähnlichen gar keine Näherungen in Anspruch nehmenden, streng geometrischen Methode bedienen sollte. Wie man sich geodätischer Operationen mit Hülfe der im Folgenden entwickelten Methode auch zur genaueren Bestimmung des schon nahe bekannten Werths der Abplattung des Erdsphäroids bedienen kann, ist in diesem Aufsatze auch in der Kürze gezeigt worden, und in einigen nach und nach noch folgenden Aufsätzen gedenke ich zu zeigen, wie man sich die Data, welche der hier aufgelösten Aufgabe als bekannte Grössen zum Grunde liegen, wenigstens insofern dabei bloss geodätische, und nicht auch astronomische Operationen und etwa barometrische Höhenbestimmungen in Anwendung kommen, zu verschaffen hat.

---

§. 1.

Die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde, von welcher die Meeresfläche ein Theil ist, betrachten wir im Folgenden als die Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren Axen hier als bekannt angenommen werden, entstandenen elliptischen Sphäroids.

Alle Punkte auf der Erde werden als Punkte im Raume betrachtet, deren gegenseitige Lage mit aller nur möglichen Genauigkeit zu bestimmen der Hauptzweck aller geodätischen Messungen ist.

Zur Bestimmung der Lage der Punkte im Raume benutzen wir im Folgenden im Allgemeinen ein durch den Mittelpunkt der Erde als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Die Ebene des Erdäquators soll die Ebene der xy und die Erdaxe soll die Axe der z sein. Der positive Theil der Axe x sei der Halbmesser des Erdäquators, von welchem an die geographischen Längen von 0 bis zu 360^0 gezählt werden, und den positiven Theil der Axe der y wollen wie so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die geographischen Längen von 0 bis 360^0 gezählt werden; der positive Theil der Axe der z sei der vom Mittelpunkte der Erde nach deren Nordpole hin gerichtete Theil der Erdaxe.

Die drei 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche eine von einem beliebigen Punkte im Raume ausgehende gerade Linie mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst, von denen wir im Folgenden häufig Gebrauch machen werden, wollen wir die Bestimmungswinkel der in Rede stehenden geraden Linie in Bezug auf das System der xyz nennen.

Digitized by Google

§. 2.

Wenn a den Halbmesser des Erdäquators und b die halbe Erdaxe bezeichnet, so ist

$$1) \quad u = \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Gleichung der Oberfläche der Erde, und folglich, indem alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind:

$$2) \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \frac{du}{dy} = \frac{2y}{a^2}, \frac{du}{dz} = \frac{2z}{b^2}.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume und x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des Punktes der Oberfläche der Erde, in welchem die dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechende Vertikale auf derselben senkrecht steht, so sind, wenn wir

$$3) \quad u_1' = \frac{x_1'^2+y_1'^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} - 1$$

setzen, nach den Principien der höheren Geometrie

$$4) \quad \frac{x-x_1'}{\frac{du_1'}{dx_1'}} = \frac{y-y_1'}{\frac{du_1'}{dy_1'}} = \frac{z-z_1'}{\frac{du_1'}{dz_1'}},$$

d. i. nach 2)

$$5) \quad \frac{a^2(x-x_1')}{x_1'} = \frac{a^2(y-y_1')}{y_1'} = \frac{b^2(z-z_1')}{z_1'}$$

die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale, aus denen man für $x=0$ auch $y=0$ und

$$z = -\frac{a^2-b^2}{b^2} z_1'$$

erhält, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass im Allgemeinen die Axe der z von der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale geschnitten wird, diese Vertikale also in der Ebene des dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ oder $(x_1' y_1' z_1')$ entsprechenden Erdmeridians liegt.

Bezeichnen wir die Länge, Breite*) und Höhe über der Meeresfläche des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ respective durch ω_1, Ω_1, h_1; so ist, wie man mit Hülfe der Theorie der Ellipse oder einiger allgemein bekannten Formeln der höheren Geometrie leicht findet, in völliger Allgemeinheit:

---

*) Worunter hier nicht die sogenannte geocentrische Breite, sondern vielmehr die Polhöhe verstanden wird.

Digitized by Google

$$6)\quad \begin{cases} x_1' = \cos\omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}, \\ y_1' = \sin\omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}, \\ z_1' = \dfrac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \Omega_1 . \sqrt{x_1'^2 + y_1^2}. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung 1) ist aber

$$\frac{x_1'^2 + y_1'^2}{a^2} + \frac{z_1'^2}{b^2} = 1,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung mit der dritten der vorhergehenden Gleichungen verbindet:

$$7)\quad \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{a^2 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}.$$

Also ist nach den Gleichungen 6):

$$8)\quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{a^2 \cos\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ y_1' = \dfrac{a^2 \sin\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ z_1 = \dfrac{b^2 \sin\Omega_1}{\sqrt{a^2 \cos\Omega_1^2 + b^2 \sin\Omega_1^2}}; \end{cases}$$

und folglich, wenn man

$$9)\quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

setzt:

$$10)\quad \begin{cases} x_1' = \dfrac{a \cos\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ y_1' = \dfrac{a \sin\omega_1 \cos\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}, \\ z_1' = \dfrac{a(1-e^2) \sin\Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\Omega_1^2}}. \end{cases}$$

Da nun aber offenbar

$$h_1 \cos\omega_1 \cos\Omega_1,\ h_1 \sin\omega_1 \cos\Omega_1,\ h_1 \sin\Omega_1$$

die Coordinaten des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ in Bezug auf ein durch den Punkt $(x_1' y_1' z_1')$ gelegtes, dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem sind, so überzeugt man sich mittelst der einfachsten Formeln aus der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten auf

Digitized by Google

der Stelle von der Richtigkeit der folgenden ganz allgemein gültigen Ausdrücke:

$$11)\quad \begin{cases} x_1 = (h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_1{}^2}}) \cos \omega_1 \cos \Omega_1 , \\ y_1 = (h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_1{}^2}}) \sin \omega_1 \cos \Omega_1 , \\ z_1 = (h_1 + \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_1{}^2}}) \sin \Omega_1 ; \end{cases}$$

mittelst welcher die rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1 ohne grosse Schwierigkeit aus ω_1, Ω_1, h_1 berechnet werden können. Man könnte diese Formeln auch auf verschiedene Arten zur numerischen Rechnung bequemer einrichten und wegen der Kleinheit von e zweckmässige Näherungsformeln aus denselben ableiten, wobei wir aber jetzt nicht verweilen wollen.

Die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Vertikale sind nach 5) und 10), wie man leicht findet:

$$12)\quad \begin{cases} y = x \operatorname{tang} \omega_1 , \\ z = x \dfrac{\operatorname{tang} \Omega_1}{\cos \omega_1} - \dfrac{a e^2 \sin \Omega_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin \Omega_1{}^2}} \end{cases}$$

Ist nun

$$13)\quad A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene, welche auf der diesem Punkte entsprechenden Vertikale senkrecht steht, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$B = A \operatorname{tang} \omega_1 , \quad C = A \frac{\operatorname{tang} \Omega_1}{\cos \omega_1} ;$$

also

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos \omega_1 \cos \Omega_1}{\sin \omega_1 \cos \Omega_1} , \quad \frac{A}{C} = \frac{\cos \omega_1 \cos \Omega_1}{\sin \Omega_1} ;$$

und man ist folglich offenbar

$$14)\quad \begin{cases} A = \cos \omega_1 \cos \Omega_1 , \\ B = \sin \omega_1 \cos \Omega_1 , \\ C = \sin \Omega_1 \end{cases}$$

zu setzen berechtigt, wo dann

$$15)\quad A^2 + B^3 + C^2 = 1$$

Digitized by Google

ist. Die Gleichung der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Horizontalebene ist aber nach dem Vorhergenden

16) $(x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1+(z-z_1)\sin\Omega_1=0$

oder

17) $(x-x_1)\cos\omega_1+(y-y_1)\sin\omega_1+(z-z_1)\operatorname{tang}\Omega_1=0.$

§. 3.

Es sei jetzt

18) $Mx+Ny+Kz+L=0$

die Gleichung einer beliebigen Ebene, und m, n, k seyen die Coordinaten eines Punktes in derselben. Durch diesen Punkt seien in der in Rede stehenden Ebene zwei auf einander senkrechte gerade Linien und eine auf der Ebene senkrecht stehende gerade Linie gezogen. Jede dieser drei geraden Linien wird durch den Punkt (mnk) in zwei Theile getheilt, und für einen dieser beiden Theile sollen bei jeder der drei Linien die Bestimmungswinkel in Bezug auf das System der xyz durch α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet werden.

Die Gleichungen der ersten und zweiten Linie sind:

19) $$\begin{cases} \dfrac{x-m}{\cos\alpha}=\dfrac{y-n}{\cos\beta}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma}, \\ \dfrac{x-m}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-n}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-k}{\cos\gamma_1}. \end{cases}$$

Weil der Punkt (mnk) in der gegebenen Ebene liegt, so ist

20) $Mm+Nn+Kk+L=0,$

und folglich

21) $M(x-m)+N(y-n)+K(z-k)=0$

die Gleichung der gegebenen Ebene. Also hat man nach 19) und 21) die beiden folgenden Gleichungen:

22) $$\begin{cases} M\cos\alpha+N\cos\beta+K\cos\gamma=0, \\ M\cos\alpha_1+N\cos\beta_1+K\cos\gamma_1=0. \end{cases}$$

Weil aber die beiden durch die Gleichungen 19) charakterisirten Linien auf einander senkrecht stehen, so ist

23) $\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,$

und ausserdem hat man die bekannte Gleichung

24) $\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1.$

Digitized by Google

Mit Hülfe der drei Gleichungen

$$25)\quad \left\{\begin{array}{c} M\cos\alpha_1+N\cos\beta_1+K\cos\gamma_1=0,\\ \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,\\ \cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1 \end{array}\right.$$

kann man α_1, β_1, γ_1 aus α, β, γ und M, N, K finden, indem man durch Auflösung dieser drei Gleichungen in Bezug auf $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ als unbekannte Grössen sehr leicht die folgenden Formeln, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, erhält:

$$26)$$

$$\cos\alpha_1=\pm\frac{N\cos\gamma-K\cos\beta}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\beta_1=\pm\frac{K\cos\alpha-M\cos\gamma}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\pm\frac{M\cos\beta-N\cos\alpha}{\sqrt{(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2}}.$$

Weil aber

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)+N^2(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)+K^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)\\ &-2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2\sin\alpha^2+N^2\sin\beta^2+K^2\sin\gamma^2\\ &-2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha).\end{aligned}$$

Wegen der ersten der beiden Gleichungen 22) ist aber

$$\begin{aligned}0&=M^2\cos\alpha^2+N^2\cos\beta^2+K^2\cos\gamma^2\\ &+2(MN\cos\alpha\cos\beta+NK\cos\beta\cos\gamma+KM\cos\gamma\cos\alpha),\end{aligned}$$

und folglich, wenn man diese Gleichung zu der vorhergehenden addirt:

$$\begin{aligned}&(M\cos\beta-N\cos\alpha)^2+(N\cos\gamma-K\cos\beta)^2+(K\cos\alpha-M\cos\gamma)^2\\ &=M^2+N^2+K^2.\end{aligned}$$

Also ist nach 26) mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

Digitized by Google

$$27)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \pm\dfrac{N\cos\gamma - K\cos\beta}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\beta_1 = \pm\dfrac{K\cos\alpha - M\cos\gamma}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\gamma_1 = \pm\dfrac{M\cos\beta - N\cos\alpha}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der in dem Punkte (mnk) auf der gegebenen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie, welcher die Bestimmungswinkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ entsprechen, sind

$$28)\quad \frac{x-m}{\cos\alpha_2} = \frac{y-n}{\cos\beta_2} = \frac{z-k}{\cos\gamma_2},$$

und nach den Principien der analytischen Geometrie hat man die folgenden Gleichungen:

$$29)\quad \begin{cases} M\cos\beta_2 = N\cos\alpha_2, \\ N\cos\gamma_2 = K\cos\beta_2, \\ K\cos\alpha_2 = M\cos\gamma_2; \end{cases}$$

von denen jede eine Folge aus den beiden andern ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen und der bekannten Gleichung

$$30)\quad \cos\alpha^2{}_2 + \cos\beta_2{}^2 + \cos\gamma_2{}^2 = 1$$

erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander leicht:

$$31)\quad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \pm\dfrac{M}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\beta_2 = \pm\dfrac{N}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}, \\ \cos\gamma_2 = \pm\dfrac{K}{\sqrt{M^2+N^2+K^2}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 27) und 31) erhält man auch leicht die folgenden Formeln, in denen sich die obern und untern Zeichen ebenfalls auf einander beziehen:

$$32)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \pm(\cos\beta\cos\gamma_2 - \cos\gamma\cos\beta_2), \\ \cos\beta_1 = \pm(\cos\gamma\cos\alpha_2 - \cos\alpha\cos\gamma_2), \\ \cos\gamma_1 = \pm(\cos\alpha\cos\beta_2 - \cos\beta\cos\alpha_2). \end{cases}$$

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass O_1, O_2, O_3 drei Punkte auf der Erde sind, deren Längen, Breiten und Höhen über der Meeresfläche wir respective durch

Digitized by Google

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2;\quad \omega_3,\ \Omega_3,\ h_3$$

bezeichnen. Die den Punkten O_1, O_2 entsprechenden Grössen

$$\omega_1,\ \Omega_1,\ h_1;\quad \omega_2,\ \Omega_2,\ h_2$$

werden als bekannt angenommen, und es kommt nun darauf an, aus denselben mit Hülfe geodätischer Messungen die dem Punkte O_3 entsprechenden Grössen ω_3, Ω_3, h_3 abzuleiten.

Zu dem Ende messen wir mit dem Theodoliten in dem Punkte O_1 die horizontale Projection E_1 des 180^0 nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_2O_1O_3}$ und den 90^0 nicht übersteigenden Neigungswinkel J_1 der Linie $\overline{O_1O_3}$ gegen die durch O_1 gelegte Horizontalebene, und eben so in dem Punkte O_2 die horizontale Projection E_2 des 180^0 nicht übersteigenden Winkels $\overline{O_1O_2O_3}$ und den 90^0 nicht übersteigenden Neigungswinkel J_2 der Linie $\overline{O_2O_3}$ gegen die durch O_2 gelegte Horizontalebene; so haben wir alle Data, welche zur Bestimmung der Grössen ω_3, Ω_3, h_3, d. h. der Lage des Punktes O_3, erforderlich sind, wie nun gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 in dem Systeme der xyz durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2; so haben wir zu deren Bestimmung nach 11) die folgenden Formeln:

$$33)\quad \begin{cases} x_1 = (h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ y_1 = (h_1 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ z_1 = (h_1 + \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_1^{\,2}}})\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$34)\quad \begin{cases} x_2 = (h_2 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ y_2 = (h_2 + \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ z_2 = (h_2 + \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_2^{\,2}}})\sin\Omega_2. \end{cases}$$

Hat man mittelst dieser Formeln die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 berechnet, so sind nach 16)

$$35)\quad (x-x_1)\cos\omega_1\cos\Omega_1 + (y-y_1)\sin\omega_1\cos\Omega_1 + (z-z_1)\sin\Omega_1 = 0$$

und

$$36)\quad (x-x_2)\cos\omega_2\cos\Omega_2 + (y-y_2)\sin\omega_2\cos\Omega_2 + (z-z_2)\sin\Omega_2 = 0$$

die Gleichungen der durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen, welche nun auch leicht entwickelt werden können.

Digitized by Google

Sind nun P, Q zwei Hülfswinkel, so hat man zur Berechnung der Linie

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

die folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} x_1-x_2 = \overline{O_1O_2}\,.\cos P\cos Q, \\ y_1-y_2 = \overline{O_1O_2}\,.\sin P\cos Q, \\ z_1-z_2 = \overline{O_1O_2}\,.\sin Q; \end{cases}$$

mittelst welcher nach einem bekannten Verfahren $\overline{O_1O_2}$ immer leicht gefunden werden kann. Ist aber $\overline{O_1O_2}$ bekannt, so ergeben sich die Bestimmungswinkel φ_1, ψ_1, χ_1 und φ_2, ψ_2, χ_2 der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ in Bezug auf das System der xyz leicht mittelst der Formeln

$$38)\quad \cos\varphi_1 = \frac{x_2-x_1}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\psi_1 = \frac{y_2-y_1}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\chi_1 = \frac{z_2-z_1}{\overline{O_1O_2}}$$

und

$$39)\quad \cos\varphi_2 = \frac{x_1-x_2}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\psi_2 = \frac{y_1-y_2}{\overline{O_1O_2}},\quad \cos\chi_2 = \frac{z_1-z_2}{\overline{O_1O_2}}.$$

Bezeichnet man nun die Bestimmungswinkel der Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen in Bezug auf das System der xyz respective durch φ'_1, ψ'_1, χ'_1 und φ'_2, ψ'_2, χ'_2; so hat man zu deren Bestimmung nach den Formeln in der Abhandlung Nr. XXXVIII. I. in Theil VI. Heft III., wenn man die ihren absoluten Werthen nach 90^0 nicht übersteigenden Hülfswinkel μ_1 und μ_2 mittelst der Formeln

$$40)\quad \sin\mu_1 = \cos\omega_1\cos\Omega_1\cos\varphi_1 + \sin\omega_1\cos\Omega_1\cos\psi_1 + \sin\Omega_1\cos\chi_1$$

und

$$41)\quad \sin\mu_2 = \cos\omega_2\cos\Omega_2\cos\varphi_2 + \sin\omega_2\cos\Omega_2\cos\psi_2 + \sin\Omega_2\cos\chi_2$$

berechnet, die folgenden Formeln:

$$42)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1 - \sin\mu_1\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1 - \sin\mu_1\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1 - \sin\mu_1\sin\Omega_1}{\cos\mu_1}. \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$43)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2 - \sin\mu_2\cos\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2 - \sin\mu_2\sin\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi_2 - \sin\mu_2\sin\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

oder

$$44)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_1 = \dfrac{\cos\varphi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\psi'_1 = \dfrac{\cos\psi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\chi'_1 = \dfrac{\cos\chi_1}{\cos\mu_1} - \operatorname{tang}\mu_1\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

$$45)\quad \begin{cases} \cos\varphi'_2 = \dfrac{\cos\varphi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\psi'_2 = \dfrac{\cos\psi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\chi'_2 = \dfrac{\cos\chi_2}{\cos\mu_2} - \operatorname{tang}\mu_2\sin\Omega_2; \end{cases}$$

bei deren Vereinfachung durch Einführung von Hülfswinkeln wir uns nicht aufhalten wollen.

Nun denke man sich in den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen von O_1 und O_2 aus auf den Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den in Rede stehenden Horizontalebenen senkrecht stehende Linien auf denselben Seiten dieser Projectionen, auf denen die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ auf den beiden Horizontalebenen liegen, gezogen, und bezeichne unter diesen Voraussetzungen die Bestimmungswinkel der beiden errichteten Perpendikel in Bezug auf das System der xyz respective durch φ_1'', ψ_1'', χ_1'' und φ_2'', ψ_2'', χ_2''. Ferner denke man sich von den Punkten O_1 und O_2 aus zwei auf den durch dieselben gelegten Horizontalebenen senkrecht stehende Linien auf den Seiten dieser Horizontalebenen, auf welchen die Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ liegen, gezogen, und bezeichne deren Bestimmungswinkel in Bezug auf das System der xyz respective durch φ_1''', ψ_1''', χ_1''' und φ_2''', ψ_2''', χ_2'''. Dann hat man nach 31), 32), 35) die Gleichungen:

$$46)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1''' = \pm\cos\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\psi_1''' = \pm\sin\omega_1\cos\Omega_1, \\ \cos\chi_1''' = \pm\sin\Omega_1 \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$47)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1'' = \pm(\cos\psi_1'\cos\chi_1''' - \cos\chi_1'\cos\psi_1'''), \\ \cos\psi_1'' = \pm(\cos\chi_1'\cos\varphi_1''' - \cos\varphi_1'\cos\chi_1'''), \\ \cos\chi_1'' = \pm(\cos\varphi_1'\cos\psi_1''' - \cos\psi_1'\cos\varphi_1'''); \end{cases}$$

und nach 31), 32), 36) hat man die Gleichungen:

$$48)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2''' = \pm\cos\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\psi_2''' = \pm\sin\omega_2\cos\Omega_2, \\ \cos\chi_2''' = \pm\sin\Omega_2 \end{cases}$$

und

$$49)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2'' = \pm(\cos\psi_2'\cos\chi_2''' - \cos\chi_2'\cos\psi_2'''), \\ \cos\psi_2'' = \pm(\cos\chi_2'\cos\varphi_2''' - \cos\varphi_2'\cos\chi_2'''), \\ \cos\chi_2'' = \pm(\cos\varphi_2'\cos\psi_2''' - \cos\psi_2'\cos\varphi_2'''). \end{cases}$$

Bemerken wollen wir noch, dass sich, wie man leicht findet, die Formeln 47) und 49) auch auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$47^*)\quad \begin{cases} \cos\psi_1'' = \pm\dfrac{\cos\psi_1\sin\Omega_1 - \cos\chi_1\sin\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\psi_1'' = \mp\dfrac{\cos\varphi_1\sin\Omega_1 - \cos\chi_1\cos\omega_1\cos\Omega_1}{\cos\mu_1}, \\ \cos\chi_1'' = \pm\dfrac{(\cos\varphi_1\sin\omega_1 - \cos\psi_1\cos\omega_1)\cos\Omega_1}{\cos\mu_1} \end{cases}$$

und

$$49^*)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2'' = \pm\dfrac{\cos\psi_2\sin\Omega_2 - \cos\chi_2\sin\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\psi_2'' = \mp\dfrac{\cos\varphi_2\sin\Omega_2 - \cos\chi_2\cos\omega_2\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}, \\ \cos\chi_2'' = \pm\dfrac{(\cos\varphi_2\sin\Omega_2 - \cos\psi_2\cos\omega_2)\cos\Omega_2}{\cos\mu_2}; \end{cases}$$

wo immer die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen

Ob man in den vorhergehenden Formeln die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, lässt sich in jedem einzelnen Falle nur aus einer besonderen Anschauung beurtheilen, und allgemeine Regeln lassen sich darüber nicht geben. Da man übrigens die Richtung eines Theils der Axe der z, welche als der einem jeden Punkte auf der Erde entsprechenden Weltaxe *) parallel zu betrachten ist, stets vor Augen hat, so wird sich immer leicht beurtheilen lassen, ob die Winkel χ_1'', χ_1''' und χ_2'', χ_2''' spitz oder stumpf sind, und daher wird immer auch leicht überhaupt über die Art, wie in den vorhergehenden Gleichungen die Zeichen zu nehmen sind, eine bestimmte Entscheidung gegeben werden können.

*) Im Sinne der sphärischen Astronomie gesprochen.

Digitized by Google

Bezeichnen wir nun aber, in Bezug auf die Projectionen der Linien $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ auf den durch O_1 und O_2 gelegten Horizontalebenen und die vorher auf diese Projectionen von $\overline{O_1O_2}$ und $\overline{O_2O_1}$ in den beiden Horizontalebenen und auf diese letzteren selbst von O_1 und O_2 aus errichteten Perpendikel als positive Theile zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme mit den Anfangspunkten O_1 und O_2, die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ respective durch φ_1^{IV}, ψ_1^{IV}, χ_1^{IV} und φ_2^{IV}, ψ_2^{IV}, χ_2^{IV}; so ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$50)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{IV} = \cos E_1 \cos J_1, \\ \cos\psi_1^{IV} = \sin E_1 \cos J_1, \\ \cos\chi_1^{IV} = \sin J_1 \end{cases}$$

und

$$51)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{IV} = \cos E_2 \cos J_2, \\ \cos\psi_2^{IV} = \sin E_2 \cos J_2, \\ \cos\chi_2^{IV} = \sin J_2. \end{cases}$$

Bezeichnen endlich φ_1^{V}, ψ_1^{V}, χ_1^{V} und φ_2^{V}, ψ_2^{V}, χ_2^{V} die Bestimmungswinkel der Linien $\overline{O_1O_3}$ und $\overline{O_2O_3}$ in Bezug auf das System der xyz, so ist, wie leicht aus einem bekannten Satze der analytischen Geometrie erhellen wird:

$$52)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos\varphi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\varphi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\varphi_1''' \cos\chi_1^{IV}, \\ \cos\psi_1^{V} = \cos\psi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\psi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\psi_1''' \cos\chi_1^{IV}, \\ \cos\chi_1^{V} = \cos\chi_1' \cos\varphi_1^{IV} + \cos\chi_1'' \cos\psi_1^{IV} + \cos\chi_1''' \cos\chi_1^{IV}; \end{cases}$$

und

$$53)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos\varphi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\varphi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\varphi_2''' \cos\chi_2^{IV}, \\ \cos\psi_2^{V} = \cos\psi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\psi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\psi_2''' \cos\chi_2^{IV}, \\ \cos\chi_2^{V} = \cos\chi_2' \cos\varphi_2^{IV} + \cos\chi_2'' \cos\psi_2^{IV} + \cos\chi_2''' \cos\chi_2^{IV}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen kann man diese Formeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$54)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\varphi_1' + \sin E_1 \cos\varphi_1'') + \sin J_1 \cos\varphi_1''', \\ \cos\psi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\psi_1' + \sin E_1 \cos\psi_1'') + \sin J_1 \cos\psi_1''', \\ \cos\chi_1^{V} = \cos J_1 (\cos E_1 \cos\chi_1' + \sin E_1 \cos\chi_1'') + \sin J_1 \cos\chi_1'''; \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$55)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos J_2\,(\cos E_2 \cos\varphi_2' + \sin E_2 \cos\varphi_2'') + \sin J_2 \cos\varphi_2''', \\ \cos\psi_2^{V} = \cos J_2\,(\cos E_2 \cos\psi_2' + \sin E_2 \cos\psi_2'') + \sin J_2 \cos\psi_2''', \\ \cos\chi_2^{V} = \cos J_2\,(\cos E_2 \cos\chi_2' + \sin E_2 \cos\chi_2'') + \sin J_2 \cos\chi_2'''. \end{cases}$$

Berechnet man die Hülfswinkel F_1, G_1, H_1 und F_2, G_2, H_2 mittelst der Formeln

$$56)\quad \operatorname{tang} F_1 = \frac{\cos\varphi_1'}{\cos\varphi_1''},\quad \operatorname{tang} G_1 = \frac{\cos\psi_1'}{\cos\psi_1''},\quad \operatorname{tang} H_1 = \frac{\cos\chi_1'}{\cos\chi_1''}$$

und

$$57)\quad \operatorname{tang} F_2 = \frac{\cos\varphi_2'}{\cos\varphi_2''},\quad \operatorname{tang} G_2 = \frac{\cos\psi_2'}{\cos\psi_2''},\quad \operatorname{tang} H_2 = \frac{\cos\chi_2'}{\cos\chi_2''};$$

so wird

$$58)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\varphi_1''\sin(E_1+F_1)}{\cos F_1} + \sin J_1 \cos\varphi_1''', \\ \cos\psi_1^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\psi_1''\sin(E_1+G_1)}{\cos G_1} + \sin J_1 \cos\psi_1''', \\ \cos\chi_1^{V} = \cos J_1 \dfrac{\cos\chi_1''\sin(E_1+H_1)}{\cos H_1} + \sin J_1 \cos\chi_1''' \end{cases}$$

und

$$59)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\varphi_2''\sin(E_2+F_2)}{\cos F_2} + \sin J_2 \cos\varphi_2''', \\ \cos\psi_2^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\psi_2''\sin(E_2+G_2)}{\cos G_2} + \sin J_2 \cos\psi_2''', \\ \cos\chi_2^{V} = \cos J_2 \dfrac{\cos\chi_2''\sin(E_2+H_2)}{\cos H_2} + \sin J_2 \cos\chi_2'''. \end{cases}$$

Berechnet man aber ferner die Hülfswinkel F_1', G_1', H_1' und F_2', G_2', H_2' mittelst der Formeln

$$60)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} F_1' = \dfrac{\cos\varphi_1''\sin(E_1+F_1)}{\cos\varphi_1'''\cos F_1}, \\ \operatorname{tang} G_1' = \dfrac{\cos\psi_1''\sin(E_1+G_1)}{\cos\psi_1'''\cos G_1}, \\ \operatorname{tang} H_1' = \dfrac{\cos\chi_1''\sin(E_1+H_1)}{\cos\chi_1'''\cos H_1} \end{cases}$$

und

$$61)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} F_2' = \dfrac{\cos\varphi_2''\sin(E_2+F_2)}{\cos\varphi_2'''\cos F_2}, \\ \operatorname{tang} G_2' = \dfrac{\cos\psi_2''\sin(E_2+G_2)}{\cos\psi_2'''\cos G_2}, \\ \operatorname{tang} H_2' = \dfrac{\cos\chi_2''\sin(E_2+H_2)}{\cos\chi_2'''\cos H_2}; \end{cases}$$

Digitized by Google

so ist

$$62)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\varphi_1{}^{III}\sin(J_1+F_1')}{\cos F_1'}, \\ \cos\psi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\psi_1{}^{III}\sin(J_1+G_1')}{\cos G_1'}, \\ \cos\chi_1{}^{IV} = \dfrac{\cos\chi_1{}^{III}\sin(J_1+H_1')}{\cos H_1'} \end{cases}$$

und

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\varphi_2{}^{III}\sin(J_2+F_2')}{\cos F_2'}, \\ \cos\psi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\psi_2{}^{III}\sin(J_2+G_2')}{\cos G_2'}. \\ \cos\chi_2{}^{IV} = \dfrac{\cos\chi_2{}^{III}\sin(J_2+H_2')}{\cos H_2'}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Linien $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_2O_3}$ nebst ihren Verlängerungen über die Punkte O_1, O_2 hinaus sind nun

$$64)\quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi_1{}^{IV}} = \frac{y-y_1}{\cos\psi_1{}^{IV}} = \frac{z-z_1}{\cos\chi_1{}^{IV}}$$

und

$$65)\quad \frac{x-x_2}{\cos\varphi_2{}^{IV}} = \frac{y-y_2}{\cos\psi_2{}^{IV}} = \frac{z-z_2}{\cos\chi_2{}^{IV}};$$

und es kommt jetzt, um die Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 in dem Systeme der xyz zu finden, bloss auf die Bestimmung der Coordinaten des Durchschnittspunktes der durch die Gleichungen 64) und 65) charakterisirten geraden Linien an, wozu eine besondere Anleitung zu geben hier unnütze Weitläufigkeit sein würde, weil die analytische Geometrie alle dazu nöthigen Hülfsmittel darbietet. Da aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die durch die Gleichungen 64) und 65) charakterisirten geraden Linien sich in den meisten Fällen gar nicht schneiden werden, so wird man auf die Art zu verfahren haben, dass man die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 derjenigen Punkte der beiden in Rede stehenden geraden Linien bestimmt, welche den kleinsten Abstand von einander haben, und dann die arithmetischen Mittel

$$\tfrac{1}{2}(X_1+X_2),\ \tfrac{1}{2}(Y_1+Y_2),\ \tfrac{1}{2}(Z_1+Z_2)$$

als die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 betrachtet. Zugleich aber wird man auch immer die Grösse des Abstandes der beiden Punkte $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ und $(X_2\,Y_2\,Z_2)$ ermitteln, um ein Maas für die bei der Bestimmung der

Lage des Punktes O_3 erreichte Genauigkeit zu haben, weil man diese Genauigkeit dem in Rede stehenden Abstande umgekehrt proportional zu setzen berechtigt sein wird. Eine allgemeine Anleitung zur Ausführung der betreffenden Rechnungen soll im folgenden Paragraphen gegeben werden.

§. 5.

Die Gleichungen zweier geraden Linien im Raume seien überhaupt

$$66)\quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\dfrac{z-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \dfrac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\cos\gamma_1}. \end{cases}$$

Da die gerade Linie, durch welche die kürzeste Entfernung dieser beiden Linien von einander bestimmt wird, bekanntlich auf einer jeden derselben senkrecht steht, was sehr leicht synthetisch bewiesen werden kann; so haben wir, wenn die Gleichungen der in Rede stehenden geraden Linie durch

$$67)\quad \frac{x-\xi}{\cos\varphi}=\frac{y-\eta}{\cos\psi}=\frac{z-\zeta}{\cos\chi}$$

bezeichnet werden, nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichungen:

$$68)\quad \begin{cases} 1+\dfrac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}\cdot\dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}+\dfrac{\cos\gamma_0}{\cos\alpha_0}\cdot\dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0, \\ 1+\dfrac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}\cdot\dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}+\dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1}\cdot\dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0; \end{cases}$$

aus denen sich leicht

$$69)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}=\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}, \\ \dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}=\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}; \end{cases}$$

also

$$70)\quad \begin{cases} \cos\psi=\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}\cos\varphi, \\ \cos\chi=\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}\cos\varphi \end{cases}$$

ergiebt. Nimmt man nun hierzu die bekannte Gleichung

$$71)\quad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1,$$

Digitized by Google

und setzt, indem J eine positive Grösse bezeichnet, der Kürze wegen

$$72)\quad J^2=(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2$$

oder, wie man hieraus mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$73)\quad \begin{cases}\cos\alpha_0^2+\cos\beta_0^2+\cos\gamma_0^2=1,\\ \cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1\end{cases}$$

leicht findet:

$$74)\quad J^2=1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2;$$

so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$75)\quad \begin{cases}\cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{J},\\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{J},\\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{J}.\end{cases}$$

Bezeichnen wir den von den beiden gegebenen geraden Linien eingeschlossenen, im Sinne der analytischen Geometrie genommenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch w, so ist bekanntlich

$$76)\quad \cos w=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1.$$

und man kann also die Gleichungen 75) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$77)\quad \begin{cases}\cos\varphi=\pm\dfrac{\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1}{\sin w},\\ \cos\psi=\pm\dfrac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1}{\sin w},\\ \cos\chi=\pm\dfrac{\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1}{\sin w}.\end{cases}$$

Berechnen wir aber die Hülfsgrössen R, G, H, wo R eine positive Grösse sein soll, auf bekannte Weise mittelst der Formeln:

$$78)\quad \begin{cases}R\cos G\cos H=\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1,\\ R\sin G\cos H=\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1,\\ R\sin H=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1;\end{cases}$$

so ist, wie man leicht findet:

$$79)\quad J=R,$$

und mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$80)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm\cos G\cos H, \\ \cos\psi = \pm\sin G\cos H, \\ \cos\chi = \pm\sin H. \end{cases}$$

Sind X_0, Y_0, Z_0 die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gesuchten Linie mit der ersten der beiden gegebenen Linien, so haben wir nach 66) und 67) die Gleichungen

$$81)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0} = \dfrac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \dfrac{X_0-\xi}{\cos\varphi} = \dfrac{Y_0-\eta}{\cos\psi} = \dfrac{Z_0-\zeta}{\cos\chi}; \end{cases}$$

also

$$82)\quad \begin{cases} Y_0-y_0 = \dfrac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Y_0-\eta = \dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}(X_0-\xi) \end{cases}$$

und

$$83)\quad \begin{cases} Z_0-z_0 = \dfrac{\cos\gamma_0}{\cos\alpha_0}(X_0-x_0), \\ Z_0-\zeta = \dfrac{\cos\chi}{\cos\varphi}(X_0-\xi). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von Y_0 und Z_0 leicht:

$$84)\quad \begin{cases} \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\psi-(\eta-y_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi}, \\ \dfrac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{(\xi-x_0)\cos\chi-(\zeta-z_0)\cos\varphi}{\cos\alpha_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\varphi}; \end{cases}$$

also, wie hieraus ferner leicht folgt:

$$85)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi)(\xi-x_0) \\ &+(\cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi)(\eta-y_0) \\ &+(\cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi)(\zeta-z_0) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man

$$86)\quad \left.\begin{aligned} &(\cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi)(\xi-x_1) \\ &+(\cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi)(\eta-y_1) \\ &+(\cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi)(\zeta-z_1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Digitized by Google

Sehr leicht erhält man nun mittelst der Gleichungen 76) und 77) und der Gleichungen 73) die folgenden Ausdrücke:

$$87)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta_0\cos\chi-\cos\gamma_0\cos\psi &= \mp\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w}{\sin w},\\ \cos\gamma_0\cos\varphi-\cos\alpha_0\cos\chi &= \mp\frac{\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w}{\sin w},\\ \cos\alpha_0\cos\psi-\cos\beta_0\cos\varphi &= \mp\frac{\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w}{\sin w} \end{aligned}\right.$$

und

$$88)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta_1\cos\chi-\cos\gamma_1\cos\psi &= \pm\frac{\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w}{\sin w},\\ \cos\gamma_1\cos\varphi-\cos\alpha_1\cos\chi &= \pm\frac{\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w}{\sin w},\\ \cos\alpha_1\cos\psi-\cos\beta_1\cos\varphi &= \pm\frac{\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w}{\sin w}; \end{aligned}\right.$$

und kann also die Gleichungen 85) und 86) auch auf folgende Art darstellen:

$$89)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos w)(\xi-x_0)\\ &+(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos w)(\eta-y_0)\\ &+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos w)(\zeta-z_0) \end{aligned}\right\}=0$$

und

$$90)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(\xi-x_1)\\ &+(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(\eta-y_1)\\ &+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(\zeta-z_1) \end{aligned}\right\}=0.$$

Denkt man sich nun, was offenbar verstattet ist, den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ mit dem Punkte $(X_0\,Y_0\,Z_0)$ zusammenfallend, so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung der Coordinaten X_0, Y_0, Z_0 die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_0-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos w)(X_0-x_1)\\ &+(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos w)(Y_0-y_1)\\ &+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos w)(Z_0-z_1) \end{aligned}\right\}=0;$$

und eben so hat man, wenn X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten des Durchschnittspunkts der gesuchten Linie mit der zweiten der beiden gegebenen Linien bezeichnen, zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{X_1 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{Y_1 - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{Z_1 - z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos w)(X_1 - x_0)\\ +\,&(\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos w)(Y_1 - y_0)\\ +\,&(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos w)(Z_1 - z_0)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Diese beiden Systeme von Gleichungen kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{X_0 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{Y_0 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{Z_0 - z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1\cos w)\{X_0 - x_0 - (x_1 - x_0)\}\\ +\,&(\cos\beta_0 - \cos\beta_1\cos w)\{Y_0 - y_0 - (y_1 - y_0)\}\\ +\,&(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1\cos w)\{Z_0 - z_0 - (z_1 - z_0)\}\end{aligned}\right\} = 0$$

und

$$\frac{X_1 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{Y_1 - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{Z_1 - z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos w)\{X_1 - x_1 - (x_0 - x_1)\}\\ +\,&(\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos w)\{Y_1 - y_1 - (y_0 - y_1)\}\\ +\,&(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos w)\{Z_1 - z_1 - (z_0 - z_1)\}\end{aligned}\right\} = 0;$$

und erhält nun mit Hülfe der Gleichung 76), wenn der Kürze wegen

91) $$\begin{aligned}K_0 = &(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1\cos w)(x_1 - x_0)\\ &+ (\cos\beta_0 - \cos\beta_1\cos w)(y_1 - y_0)\\ &+ (\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1\cos w)(z_1 - z_0)\end{aligned}$$

und

92) $$\begin{aligned}K_1 = &(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos w)(x_0 - x_1)\\ &+ (\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos w)(y_0 - y_1)\\ &+ (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos w)(z_0 - z_1)\end{aligned}$$

gesetzt wird, ohne Schwierigkeit die folgenden Ausdrücke.

93) $$\left\{\begin{aligned}X_0 - x_0 &= K_0\frac{\cos\alpha_0}{\sin w^2},\\ Y_0 - y_0 &= K_0\frac{\cos\beta_0}{\sin w^2},\\ Z_0 - z_0 &= K_0\frac{\cos\gamma_0}{\sin w^2}\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

und

$$94)\quad \begin{cases} X_1 - x_1 = K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 - y_1 = K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 - z_1 = K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}; \end{cases}$$

oder

$$95)\quad \begin{cases} X_0 = x_0 + K_0 \dfrac{\cos\alpha_0}{\sin w^2}, \\ Y_0 = y_0 + K_0 \dfrac{\cos\beta_0}{\sin w^2}, \\ Z_0 = z_0 + K_0 \dfrac{\cos\gamma_0}{\sin w^2} \end{cases}$$

und

$$96)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 + K_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\sin w^2}, \\ Y_1 = y_1 + K_1 \dfrac{\cos\beta_1}{\sin w^2}, \\ Z_1 = z_1 + K_1 \dfrac{\cos\gamma_1}{\sin w^2}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$97)\quad \begin{cases} L_0 = (x_1 - x_0)\cos\alpha_0 + (y_1 - y_0)\cos\beta_0 + (z_1 - z_0)\cos\gamma_0, \\ L_1 = (x_0 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_0 - y_1)\cos\beta_1 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_1; \end{cases}$$

so ist

$$98)\quad \begin{cases} K_0 = L_0 + L_1\cos w, \\ K_1 = L_1 + L_0\cos w. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Linien von einander durch U, so lässt sich dieselbe leicht mittelst der folgenden Formeln berechnen:

$$99)\quad \begin{cases} U\cos V\cos W = X_0 - X_1, \\ U\sin V\cos W = Y_0 - Y_1, \\ U\sin W = Z_0 - Z_1; \end{cases}$$

was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Wenn man aus den vier Gleichungen 66) die drei Grössen x, y, z eliminirt, so erhält man als Bedingungsgleichung, dass die beiden gegebenen geraden Linien sich schneiden, die folgende Gleichung:

$$100)\quad \left.\begin{aligned}&(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)(x_0-x_1)\\&+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)(y_0-y_1)\\&+(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)(z_0-z_1)\end{aligned}\right\}=0.$$

§. 6.

Indem wir jetzt wieder zu §. 4. zurückkehren, kommt es nun noch darauf an, dass wir zeigen, wie aus den gefundenen rechtwinkligen Coordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes O_3 die Grössen ω_3, Ω_3, h_3 abgeleitet werden können.

Bekanntlich haben wir zwischen diesen sechs Grössen die drei folgenden Gleichungen:

$$101)\quad \begin{cases} x_3=(h_3+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\cos\omega_3\cos\Omega_3,\\ y_3=(h_3+\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\sin\omega_3\cos\Omega_3,\\ z_3=(h_3+\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}})\sin\Omega_3. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle

$$102)\quad \operatorname{tang}\omega_3=\frac{y_3}{x_3},$$

mittelst welcher Formel ω_3 ohne alle Zweideutigkeit gefunden wird, wenn man nur beachtet, dass in Folge der beiden in Rede stehenden Gleichungen $\cos\omega_3$ immer gleiches Vorzeichen mit x_3, $\sin\omega_3$ stets gleiches Vorzeichen mit y_3 hat.

Eliminirt man aus der ersten und dritten, und aus der zweiten und dritten Gleichung die Grösse h_3, so erhält man zur Bestimmung von Ω_3 die beiden folgenden Gleichungen:

$$103)\quad \begin{cases} \dfrac{x_3}{\cos\omega_3\cos\Omega_3}-\dfrac{z_3}{\sin\Omega_3}=\dfrac{ae^2}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}},\\ \dfrac{y_3}{\sin\omega_3\cos\Omega_3}-\dfrac{z_3}{\sin\Omega_3}=\dfrac{ae^2}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}; \end{cases}$$

oder

Digitized by Google

$$104)\quad \begin{cases} z_3 - \dfrac{x_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\cos \omega_3} = -\dfrac{ae^2 \sin \Omega_3}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega^2_3}}, \\ z_3 - \dfrac{y_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\sin \omega_3} = -\dfrac{ae^2 \sin \Omega_3}{\sqrt{1-e^2 \sin \Omega_3{}^2}}; \end{cases}$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet;

$$105)\quad \begin{cases} (z_3 - \dfrac{x_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\cos \omega_3})^2 = \dfrac{a^2 e^4 \operatorname{tang} \Omega_3{}^2}{1+(1-e^2)\operatorname{tang} \Omega_3{}^2}, \\ (z_3 - \dfrac{y_3 \operatorname{tang} \Omega_3}{\sin \omega_3})^2 = \dfrac{a^2 e^4 \operatorname{tang} \Omega_3{}^2}{1+(1-e^2)\operatorname{tang} \Omega_3{}^2}; \end{cases}$$

woraus sich nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von Ω_3 die beiden folgenden Gleichungen des vierten Grades ergeben:

$$106)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} \Omega_3{}^4 \\ &-\frac{2z_3 \cos \omega_3}{x_3} \operatorname{tang} \Omega_3{}^3 \\ &+\frac{x_3{}^2 + \{(1-e^2) z_3{}^2 - a^2 e^4\} \cos \omega_3{}^2}{(1-e^2) x_3{}^2} \operatorname{tang} \Omega_3{}^2 \\ &-\frac{2z_3 \cos \omega_3}{(1-e^2) x_3} \operatorname{tang} \Omega_3 \\ &+\frac{z_3{}^2 \cos \omega_3{}^2}{(1-e^2) x_3{}^2} \end{aligned}\right\} = 0$$

und

$$107)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} \Omega_3{}^4 \\ &-\frac{2z_3 \sin \omega_3}{y_3} \operatorname{tang} \Omega_3{}^3 \\ &+\frac{y_3{}^2 + \{(1-e^2) z_3{}^2 - a^2 e^4\} \sin \omega_3{}^2}{(1-e^2) y_3{}^2} \operatorname{tang} \Omega_3{}^2 \\ &-\frac{2z_3 \sin \omega_3}{(1-e^2) y_3} \operatorname{tang} \Omega_3 \\ &+\frac{z_3{}^2 \sin \omega_3{}^2}{(1-e^2) y_3{}^2} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Bei Weitem mit grösserem Vortheil als dieser Gleichungen des vierten Grades wird man sich aber bei der Bestimmung von Ω_3 der folgenden einfachen Näherungsmethode bedienen. Bezeichnen wir nämlich den mit Ω_3 gleiches Vorzeichen habenden Neigungswinkel der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte O_3 gezogenen geraden Linie gegen die Ebene des Erdäquators durch Θ_3, und die Entfernung des Punktes O_3 von dem Mittelpunkte der Erde durch R_3, so haben wir offenbar zur Berechnung der Grössen ω_3, Θ_3, R_3 die folgenden Gleichungen:

$$107)\quad \begin{cases} x_3 = R_3 \cos\omega_3 \cos\Theta_3\,, \\ y_3 = R_3 \sin\omega_3 \cos\Theta_3\,, \\ z_3 = R_3 \sin\Theta_3\,, \end{cases}$$

mittelst welcher die drei in Rede stehenden Grössen auf bekannte Weise immer leicht gefunden werden können. Da nun bei wirklichen Anwendungen Θ_3 und Ω_3 immer nur wenig von einander verschieden sind; so kann man Θ_3 als einen ersten Näherungswerth von Ω_3 betrachten, und wird dann immer etwa mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$109)\quad \begin{cases} z_3 = \dfrac{x_3 \operatorname{tang}\Omega_3}{\cos\omega_3} - \dfrac{ae^2\sin\Omega_3}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}} \\ z_3 = \dfrac{y_3 \operatorname{tang}\Omega_3}{\sin\omega_3} - \dfrac{ae^2\sin\Omega_3}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}} \end{cases}$$

nach einigen Versuchen leicht den genauen Werth von Ω_3 zu bestimmen im Stande sein.

Hat man ω_3 und Ω_3 gefunden, so ergiebt sich die Höhe über der Meeresfläche h_3 mittelst einer jeden der drei folgenden Formeln:

$$110)\quad \begin{cases} h_3 = \dfrac{x_3}{\cos\omega_3\cos\Omega_3} - \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}, \\ h_3 = \dfrac{y_3}{\sin\omega_3\cos\Omega_3} - \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}, \\ h_3 = \dfrac{z_3}{\sin\Omega_3} - \dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin\Omega_3{}^2}}; \end{cases}$$

und es sind also jetzt alle zur Bestimmung der Lage des Punktes O_3 auf der Erde erforderlichen Elemente gefunden.

§. 7.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass man geodätische Messungen wie die obigen auch zu der genaueren Bestimmung von e benutzen kann, wobei aber die Winkelmessungen selbst als fehlerfrei, wenigstens als im höchsten Grade genau vorausgesetzt werden müssen. Findet man nämlich, dass die im Obigen durch U bezeichnete kürzeste Entfernung der beiden von O_1 und O_2 nach O_3 gezogenen Gesichtslinien von einander nicht verschwindet, so wird man, insofern man die Winkelmessungen als fehlerfrei vorauszusetzen berechtigt ist, den Grund hiervon in einer fehlerhaften Annahme des Werthes der Grösse e zu suchen berechtigt sein, und wird nun e so lange nach und nach kleine Veränderungen erleiden lassen, bis man einen Werth von e findet, für welchen die Grösse U verschwindet, den man als die definitive Bestimmung der Grösse e betrachtet. Hat man aber e auf

d by Google

diese Weise gefunden, so erhält man auch leicht den corrigirten Werth der sogenannten Abplattung $\frac{a-b}{a}$, weil

$$111)\quad \frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}=1-\sqrt{(1-e)(1+e)}$$

ist.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass es bei allen obigen Rechnungen jedenfalls am zweckmässigsten sein wird, die in den Formeln vorkommende Grösse a als Einheit anzunehmen, was natürlich verstattet ist.

X.

Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre *).

(Fortsetzung der Abhandlung Thl. V. Nr. XXI.)

Von dem
Herrn Doctor Barfuss zu Weimar.

---

§. 7.

In den §§. 4., 5. und 6. habe ich mich hinlänglich über die Principien ausgesprochen, auf welche der Beweis des Kräfteparallelogrammes sich stützt; auch glaube ich mich sattsam desshalb gerechtfertigt zu haben, warum ich der ersten von Newton entlehnten Betrachtungsweise den Vorzug geben möchte, wiewohl ich erst in diesem Artikel die Sache zu Ende bringen werde. Zugleich aber erhellet auf das Deutlichste, dass diejenigen im Irrthume sind, welche das Kräfteparallelogramm, als nicht erweisbar, unter die mechanischen Axiome rechnen wollen. Diese übersehen, dass es noch eines Axiomes bedarf, um das Parallelogramm zweier Eindrücke auf beliebig viele auszudehnen, ein Axiom, welches mit dem unter 1. in §. 6. aufgeführten identisch ist. Dasselbe enthält ja aber schon mit nur geringer Beihülfe das Kräfteparallelogramm.

---

*) In der vorigen Abhandlung mögen folgende, in §. 6. vorkommende sinnstörende Fehler berichtigt werden:

statt „es gicht noch gar keine Ausführung“ lese man: „es gicht noch gar keine Auskunft.“

statt „wenn es allein vorhanden wäre“ muss es heissen: „wie wenn“ u. s. w.

§. 8.

Nun müssen wir aber noch erwägen, dass in sehr vielen Lehrbüchern, und namentlich auch bei Poisson, dessen Demonstration ich oben einer Kritik unterwarf, das Axiom *A.* in §. 3. oder 5. in §. 6. eine etwas andere Bedeutung hat, als ich demselben beigelegt habe. Man definirt hier, Kraft sei das, was eine Bewegung hervorbringt, und da hierin schon die Anerkennung liegt, dass man die Kraft nur aus ihrer Wirkung beurtheilen könne, so muss man als Einheit der Kräfte diejenige annehmen, wodurch eine gewisse Einheit der (gleichförmigen) Bewegung entsteht. Nun sollte man eigentlich erwarten, dass die Kräfte durchaus nach dem Verhältniss der durch sie erzeugten Bewegungen abgemessen würden, dass also die doppelte, dreifache Kraft diejenige wäre, welche die doppelte, dreifache Einheit der Bewegung hervorbrächte, und wenn man bei diesem Maasse der Kräfte ihr Parallelogramm beweisen wollte, so wäre der Grundsatz in §. 4. wenigstens für den Fall unerlässlich, wo mehrere Kräfte nach einerlei Richtung wirken. Ausserdem würde man etwas ganz anderes erhalten, als ein Kräfteparallelogramm.

Aber so werden die Kräfte in jenen Lehrbüchern nicht gemessen, vielmehr versteht man unter der Kraft n (= ganzer Zahl) diejenige, die resultirt, wenn die Krafteinheit gleichzeitig $n$mal nach gleicher Richtung wirkt, wobei es indessen noch nicht folgt, dass hierdurch auch das $n$fache der Bewegungseinheit entstehe. Unter der Kraft $\frac{m}{n}$ müssen wir dann diejenige verstehen, welche $n$mal gleichzeitig nach gleicher Richtung wirkend eben so viel thut, als die $m$malige Wiederholung der Krafteinheit vermag.

In diesem Kräftemaasse liegt freilich nicht nothwendig die Proportionirung der Kräfte und der durch sie erzeugten Geschwindigkeiten, indessen müssen letztere doch irgend einer Potenz der Kräfte proportional sein. Denn ist a die durch die Krafteinheit erzeugte Geschwindigkeit und n eine andere Kraft, so wird man ihre Geschwindigkeit durch $f(a,n)$ bezeichnen können. Wird die Kraft n, $m$mal wiederholt, so entsteht die Kraft mn und ihr gehört die Geschwindigkeit $f(a,mn)$. Sofern wir aber anzunehmen berechtigt sind, dass a die einzige Längengrösse in $f(a,n)$ sei, können wir $f(a,n)=af(n)$ und $f(a,mn)=af(mn)$ setzen. Da aber die Einheit des Kräftemaasses eine willkührliche sein muss, wie die jedes anderen, so lässt sich auch die Kraft n als Einheit ansehen, wodurch wir nun für die vorige Kraft mn die Zahl m erhalten. Ist b die zu n gehörige Geschwindigkeit, so kann man die zu mn gehörige $=b\,.\,\varphi(m)=af(n)\,.\,\varphi(m)$ setzen, und es muss daher

$$f(mn)=\varphi(m)\,.\,f(n)$$

sein. Wird $n=1$, so ist auch $f(n)=1$ und daher $f(m)=\varphi(m)$. Folglich ist

$$f(mn)=f(m)\,.\,f(n),$$

Digitized by Google

und dieser Bedingung thut bekanntlich nur die Form n^{μ} Genüge. Die der Kraft n gehörige Geschwindigkeit ist also immer an^{μ}, wenn a die Geschwindigkeit der Krafteinheit ist.

Es ist nun einleuchtend, dass, wenn zwei Kräfte nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ihrer Summe gleich sein muss. Dieses ist eine nothwendige Folge des Kräftemaasses, und wenn hierzu noch die Sätze 1, 2, 3 und 4 des §. 6. zu Hilfe genommen werden, so lässt sich das Kräfteparallelogramm sofort beweisen, indem die Frage nun eigentlich so lautet: Wenn nach der einen Richtung m, nach einer anderen n Krafteinheiten gleichzeitig wirken, nach welcher Richtung geht die Bewegung und wie viele Krafteinheiten müssen nach eben der Richtung wirken, um eben so viel zu leisten, als die Seitenkräfte vermögen. Dabei kommt die von n Krafteinheiten erzeugte Bewegung gar nicht in Frage, die Bewegungslehre erfordert aber noch als Axiom, dass in dem Geschwindigkeitsausdrucke an^{μ}, $\mu=1$ sei, und somit wäre mit dieser Darstellung der Lehren gar kein Vortheil verbunden, wenn nicht anderseits erwidert werden könnte, dass die von der Bewegungslehre unabhängige Ausbildung der Statik eine grössere Wissenschaftlichkeit für sich in Anspruch nehme. Es wären so viel Bewegungslehren möglich, als man in an^{μ} dem μ Werthe beilegen wollte, für alle diese wäre aber die Gleichgewichtslehre ein und dieselbe. Wenn uns nun auch eine Statik bei Bewegungsverhältnissen, die in der Natur nicht existiren, gleichgiltig sein könnte, so ist dieselbe dennoch in sehr vielen Lehrbüchern in entschiedenster Unabhängigkeit von der Bewegungslehre vorgetragen worden, besonders da man noch auf die Meinung verfallen war, dass die Gleichgewichtslehre von aller Hypothese frei sei und daher gleichsam unmittelbare Evidenz besitze.

Diesem muss ich aber geradezu widersprechen. Man betrachte doch nur den Satz, dass zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte sich aufheben. Diesem kommt unmittelbare Evidenz nur in dem Falle zu, wo der Körper in absoluter Ruhe gedacht wird. Hat derselbe irgend eine Geschwindigkeit, so ist jener Satz nur noch in dem Falle klar, wo die Richtung der Kräfte senkrecht gegen die Richtung der Bewegung ist, in allen anderen Fällen aber liessen sich noch andere Möglichkeiten denken. Der Grundsatz 1. in §. 6. in Verbindung mit dem Kräftemaasse ist es eigentlich, wodurch die Statik ihr Fundament erhält, derselbe kann aber auf unmittelbare Evidenz nicht mehr Ansprüche machen, als der in §. 4. aufgestellte, wie ich schon oben bemerkte.

Durch das Axiom 1. in §. 6. ist ausgesprochen, dass die statischen Lehrsätze eben so gut für die relative wie für die absolute Ruhe der Körper gelten sollen. Sollten uns aber die Bewegungen zur Beurtheilung der Kräfte dienen, so müssten sie absolute sein, da sich dann die Kräfte wie gewisse Potenzen der Geschwindigkeiten verhalten würden. Da aber absolute Bewegungen niemals ein Gegenstand unserer Erfahrung sein können, so findet sich für die Statik leicht die Auskunft, das Verhältniss der Kräfte darnach zu beurtheilen, wie sie einander im Gleichgewicht halten. Hier lässt sich nun leicht zeigen, dass eine Bewegungslehre der wirklichen Natur, d. h. eine Beurtheilung der Bewegungen in der Natur für uns ganz unmöglich wäre, wenn sich nicht die Geschwin-

digkeiten wie die Kräfte verhielten, oder wenn wir nicht den Satz in §. 4. unseren Beurtheilungen zu Grunde legen könnten.

Da wir nämlich nur relative Bewegungen beobachten können, so sind wir ausser Stand zu entscheiden, ob eine gewisse Bewegung auch die blosse Folge der vorhergegangenen Einwirkung sei, vielmehr müssten wir diese Bewegung immer noch als bedingt durch den Eindruck ansehen, der dem Körper zu Folge des gemeinschaftlichen Fortrückens des Systemes mit zukommt. Die Bewegungen z. B., die wir auf der Erde beobachten, wären sämmtlich mit bedingt durch die Axendrehung der Erde, dann durch die Bewegung der Erde um die Sonne, dann durch die Bewegung des Sonnensystems, dann wieder durch die Bewegung eines höheren Systemes, und so würden wir in eine unendliche Reihe hinausgedrängt, in welcher wir nie einen Anfang erhalten. Wir würden zwar, wenn wir die Bewegung eines Körpers beobachten, sagen können, dass eine Kraft auf denselben einwirke oder eingewirkt habe, könnten aber nie Aufschluss darüber erhalten, welche Bewegung diese oder jene bestimmte Kraft hervorbringen müsse.

Daher scheint mir auch das Gesetz von der Verhältnissmässigkeit der Kräfte und der Geschwindigkeiten mehr als eine blosse Hypothese zu sein, eben weil ohne dasselbe eine Beurtheilung der Naturerscheinungen gar nicht möglich wäre. Es ist ein rein naturphilosophisches Gesetz, das aber bequemer und allgemeiner in der Form aufgefasst wird, die ich in §. 4. vorgeschlagen habe. Sobald wir uns den Körper im absoluten Raume, d. h. ausser aller Verbindung mit andern Körpern denken, so sind (fortschreitende) Bewegung und Ruhe für ihn ganz gleichgiltige Zustände, und in ihm ist nichts, wodurch diese Zustände sich von einander unterscheiden liessen. Umgeben wir ihn aber mit noch anderen Körpern, so beginnt dann unsere Bewegungslehre, für welche es demnach gleichgiltig sein muss, in welchem Zustande das ganze Körpersystem sich befindet. Daher ist auch für das in diesem §. angeführte Kräftemaass jeder Zustand des Körpers gleichgiltig und hieraus folgt mit Nothwendigkeit die Verhältnissmässigkeit der Kräfte und der Geschwindigkeiten, indem sich die Kräfte sowohl als auch die ihnen entsprechenden Bewegungen summiren. — Freilich denkt man sich im absoluten Raume absolut ruhende Punkte, um sodann von absoluter Ruhe und Bewegung der Körper reden zu können, aber, wie mir scheint, nur aus Irrthum. Denn was hindert uns, jenen festen Punkten des Raumes mit allen darauf bezogenen Körpern jede beliebige gemeinschaftliche Bewegung beizulegen? Sind doch die festen Punkte im Raume zuletzt nichts weiter, als ruhende Körper, die eben darum ruhen, weil man ihre Bewegung nicht wahrnimmt.

Diese Gründe haben mich bewogen, der Darstellung, wie ich sie oben begonnen habe, den Vorzug zu geben. Ueberhaupt scheint es mir schon aus dem Grunde vortheilhaft, mit der Bewegungslehre unmittelbar zu beginnen, weil dieselbe weit mehr durch klare Anschauung unterstützt wird, als die in so vielen Lehrbüchern vorgetragene Gleichgewichtslehre, sofern sie auf den eben besprochenen Principien beruht. Das Gleichgewicht ist dann nur der besondere Fall, wo die Bewegung eines Körpers Null ist, und die Statik besteht nun nicht mehr als unabhängige physikalische

Digitized by Google

Wissenschaft, sondern ihr kommt bloss eine mathematische Bedeutung in so fern zu, als die Bedingung, dass die Bewegung $=0$ sei, oft zu sehr einfachen, und desshalb beim Calcul sehr brauchbaren Relationen unter den Kräften führt.

§. 9.

1) Wir haben bisher die Eindrücke der Körper, d. h. ihre Geschwindigkeiten, als augenblicklich entstanden betrachtet, oder vielmehr, wir haben von der Zeit, in welcher ein Eindruck entstanden sein konnte, gänzlich abgesehen. In der Natur gehört indessen, nach dem Gesetz der Stetigkeit, zur Entstehung eines bestimmten Eindrucks immer eine Zeit, wenn gleich dieselbe oft so klein sein kann, dass sie sich unserer Wahrnehmung entzieht. Die Ursache nun, welche die Zeit hindurch wirkt und dadurch den Eindruck eines Körpers fortwährend und stetig ändert, nennen wir eine Kraft. Sagen wir dagegen, dass ein Körper einen Eindruck erhalten habe, so meinen wir, dass eine Kraft thätig gewesen sei, aber gegenwärtig aufgehört habe zu wirken.

Sehen wir nun, dass eine Kraft eine grössere Geschwindigkeit erzeugt hat, als eine andere in derselben Zeit, so nennen wir jene grösser als diese. Da diess indessen nur eine durchschnittliche Vergleichung giebt, so sind wir darauf hingewiesen, uns Kräfte zu denken, die in gleichen Zeiten die Geschwindigkeiten um gleich viel vermehren, so wie wir in gleicher Weise die gleichförmige Bewegung construirten, um einen bestimmteren Begriff von Geschwindigkeit zu erhalten. Hierbei liegt aber noch die Voraussetzung zu Grunde, dass es für eine bestimmte Vermehrung der Geschwindigkeit in einer bestimmten Zeit gleichgiltig sei, welche Geschwindigkeit nach derselben Richtung der Körper schon hatte, und es muss daher das Axiom in §. 4. noch allgemeiner aufgefasst werden, oder es macht sich die Vergleichung der stetig veränderten Bewegung mit einer ruckweise veränderten nöthig. Das letztere liesse sich für die gleichförmig beschleunigte Bewegung etwa in folgender Weise durchführen.

2) Man denke sich, ein Körper habe ursprünglich einen Eindruck a und zu demselben komme dann ein neuer Eindruck g nach derselben Richtung, so wird nun $a+g$ der Eindruck sein. Kommt in der Folge nach Verlauf einer jeden Zeiteinheit immer wieder derselbe Eindruck g hinzu, so wird der Körper in der ersten Zeiteinheit den Eindruck $a+g$, in der zweiten den Eindruck $a+2g$, in der dritten den Eindruck $a+3g$, und überhaupt in der $t$ten Zeiteinheit den Eindruck $a+gt$ haben. Hierbei können wir uns aber zugleich auch vorstellen, dass der Eindruck g nicht augenblicklich, sondern durch beliebig viele gleiche, während der Zeiteinheit in gleichen Zwischenzeiten erfolgende Eindrücke entstanden sei, und dann gewinnt die Formel $a+gt$ auch für diejenigen Fälle Bedeutung, wo t ein Bruch $\frac{m}{n}$ ist. Dann entsteht g während der Zeiteinheit durch n Eindrücke, die successive nach der Zeit $\frac{1}{n}$ erfolgen und von denen jeder $=\frac{g}{n}$ ist. Nachdem also die Zeit

$\frac{1}{n}$ $m$mal erfolgt ist, haben wir den Eindruck $a+\left(\frac{g}{n}\right).m = a+g\left(\frac{m}{n}\right)$ $= a+gt$. Indem wir aber den Ausdruck $a+gt$ unter der Voraussetzung jeder beliebigen Theilung der Zeiteinheit auffassen, entspricht ihm nur die Bewegung mit gleichförmiger Beschleunigung.

3) Hieraus ersehen wir zugleich, dass es einerlei ist, welche Anfangsgeschwindigkeit (a) der Körper schon hatte und dass die gleichförmig beschleunigende Kraft eine während ihrer ganzen Dauer sich gleichbleibende ist, daher wir sie am füglichsten eine constante nennen. Zugleich ist auch einleuchtend, dass das Beschleunigungsmaass g in dem Geschwindigkeitsausdrucke $a+gt$ das Maass der constanten Kraft sein kann. Wirken dann zwei constante Kräfte gleichzeitig auf einen Körper, so muss die daraus hervorgehende Mittelkraft ganz nach der Construction des Parallelogrammes beurtheilt werden. Denn man kann in der vorigen Betrachtung den Eindruck g auf beliebige Weise als Resultante zweier Seiteneindrücke denken, die unter jedwedem Winkel wirken können. So oft g sich wiederholt, substituire man dieselben Componenten, und so oft nur ein Theil von g gedacht wird, nehme man den gleichvielsten Theil der Componenten.

4) Indessen lässt sich die Vergleichung der stetig veränderten Bewegung mit einer solchen, in welcher die Veränderungen ruckweise erfolgen, für den gegenwärtigen Fall ganz umgehen, da man, gestützt auf die Relativität aller Bewegungen, die Bedeutung des Axiomes in §. 4. dahin erweitern kann, dass daraus unmittelbar die Bestimmungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung folgen. Man denke sich ein System von Körpern, denen irgend eine gemeinschaftliche Bewegung zukommt, so müssen wir die relativen Bewegungen in diesem Systeme gerade so beurtheilen, wie wenn dasselbe vollkommen ruhte, weil sonst für uns gar keine Beurtheilung der Bewegungen möglich wäre. Geben wir die Richtigkeit dieser Bemerkung auch nur für den Fall zu, dass die Bewegung des Systemes gleichförmig und geradlinig ist, so folgt doch auf der Stelle, mit Hilfe der Zusammensetzung der Bewegungen (§. 2.), dass es gleichgiltig ist, ob die Kraft einen ruhenden Körper in Bewegung setzt, oder ob derselbe eine Geschwindigkeit nach gleicher Richtung schon mitbrachte. Es muss daher auch die Kraft, welche die Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten um gleich viel vermehrt, eine constante sein, für deren Maass wir das Beschleunigungsmaass der Bewegung nehmen können.

5) Aber wir müssen das obige Princip noch allgemeiner auffassen. Denn da für die inneren Bewegungen Ruhe und gleichförmige Bewegung des Systemes gleichgiltig sind, so müssen jene inneren Bewegungen auch noch auf dieselbe Weise erfolgen, wenn das System bald ruht, bald sich wieder bewegt, wobei jede neu beginnende Bewegung mit jeder beliebigen Geschwindigkeit nach jeder beliebigen Richtung erfolgen darf. Darum aber muss jede progressive Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig sein. Allgemeiner noch kann man sagen, dass jedwede Bewegung des Systemes für seine inneren Bewegungen gleichgiltig ist, wenn die Bedingungen so gegeben sind, dass jeder Körper, an welche Stelle des Systemes man ihn auch setzen mag,

d by Google

solche Bewegungen machen muss, vermöge deren er gegen alle übrigen Körper des Systemes in (relativer) Ruhe bleibt.

Denken wir uns nun ein Körpersystem in gleichförmig beschleunigter Bewegung unter der obigen Bedingung und geben wir einem dazu gehörigen Körper ebenfalls diese Art der Bewegung, so müssen wir die Kraft, welche die letztere (relative) in gleichen Zeiten um gleiche Geschwindigkeiten vermehrt, für constant halten, da für den Erfolg jeder Zustand des Systemes gleichgiltig ist. Aber eben desshalb muss ja auch die Kraft, welche dem Körper die mit dem Systeme gemeinschaftliche Bewegung mittheilt, eine constante sein. Aus beiden Bewegungen entsteht nach §. 2. eine dritte ebenfalls gleichförmig beschleunigte, und ihre Beschleunigungsmaasse liefern das der zusammengesetzten nach der Zeichnung des Parallelogrammes. Wir haben also zunächst nur ein Kräfteparallelogramm für den Fall, dass zwei constante Kräfte einen Körper nach immer parallelen Richtungen treiben, und eben auch das nur folgt aus Nr. 3.

§. 10.

1) Da nun bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung der Differentialquotient $\frac{dds}{dt^2}$ das Beschleunigungsmaass giebt, so ist derselbe zugleich auch das Maass der (constanten) Kraft. Jede andere ungleichförmige, aber stetige Bewegung lässt sich innerhalb bestimmter Zeitabschnitte um so genauer einer gleichförmig beschleunigten mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ vergleichen, je kleiner die Zeitabschnitte sind, und desshalb sind wir berechtigt, den Differentialquotienten $\frac{dds}{dt^2}$ bei jeder Bewegung für das Maass der zur Zeit t statthabenden Kraft anzusehen. So wie nun aus der ungleichförmigen Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ folgen würde, wenn zur Zeit t alle weitere Einwirkung plötzlich nachlassen wollte: eben so würde auch die ungleichförmig beschleunigte Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte mit dem Beschleunigungsmaasse $\frac{dds}{dt^2}$ sich verwandeln, wenn von der Zeit t an die Intensität der Einwirkung sich gleich bleiben wollte.

Aus dieser Bedeutung der Kraft geht aber augenblicklich hervor, dass aus zwei Kräften p und p', auch wenn sie veränderlich sind, dennoch zu der Zeit, wo ihre Intensitäten p und p' sind, eine dritte nach dem Gesetze des Parallelogrammes entsteht. Diese besteht aber nur innerhalb eines Zeitdifferentials, so fern auch die Kräfte p und p' hinsichtlich ihrer Intensität und Richtung nur innerhalb eines Zeitdifferentials als constant gelten können.

Man darf das Maass einer Kraft nicht mit dem vergleichen wollen, was wir oben einen Eindruck nannten. Dass eine Kraft $=g$ sei, bedeutet, dass sie nach Verlauf einer Zeiteinheit dem Körper

Digitized by Google

eine Geschwindigkeit g mittheilen würde; dass aber ein Körper den Eindruck g habe, hat den Sinn, dass derselbe sich mit der Geschwindigkeit g wirklich bewege. Beides lässt sich nicht in Vergleichung bringen, obschon es möglich ist, dass der Eindruck g durch die Kraft g entstanden sein kann, was dann gerade nach Verlauf einer Zeiteinheit geschehen sein müsste. Es konnte aber auch der Eindruck g durch eine andere Kraft in jeder beliebig kleinen Zeit entstanden sein, und wenn wir nun die Zeit des Entstehens unendlich klein denken, so müssen wir sagen, dass jede Kraft im Vergleich mit einem Eindrucke unendlich klein sei. Dabei liegt also die Vergleichung der Geschwindigkeiten und der Zeiten ihres Entstehens zu Grunde, in der Weise, dass Kräfte sich direct wie die Geschwindigkeiten und umgekehrt wie die Zeiten des Entstehens dieser Geschwindigkeiten verhalten.

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch zu Jena.

1) Wenn a, b und n ganze positive Zahlen bedeuten, so ist:

$$(a-b)_0\, b_n + (a-b+1)_1\, (b-1)_{n-1} + (a-b+2)_2\, (b-2)_{n-2} + \ldots = (a+1)_n,$$

also die Summe jener aus Binomialkoeffizienten-Produkten gebildeten Reihe unabhängig von b. Wie lässt sich diess mittelst des Satzes

$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_0\,\beta_n + \alpha_1\,\beta_{n-1} + \alpha_2\,\beta_{n-2} + \ldots.$$

beweisen?

2) Durch welche Substitution bringt man das Integral

$$\int \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-b^2x^2}}$$

Digitized by Google

auf die Form

$$\int \frac{d\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi},$$

in welcher sein Werth gefunden werden kann.

3) Wie beweist man die Richtigkeit der Gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\tan\varphi}\, l\left(\frac{1+\tan\varphi}{1-\tan\varphi}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Wenn von einem Punkte O in der Ebene eines Vierecks $ABCD$ nach den Spitzen der vier Winkel desselben gerade Linien und zugleich die beiden Diagonalen dieses Vierecks gezogen sind, so ist immer der absolute Werth des Ausdrucks

$$\Delta AOD.\Delta BOC \pm \Delta AOB.\Delta COD,$$

in welchem das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Punkt O ausserhalb oder innerhalb des Vierecks liegt, dem Producte $\Delta AOC.\Delta BOD$ gleich.

Wenn wir $\sin(\sin x)$ durch $\sin^2 x$, $\sin(\sin^2 x)$ durch $\sin^3 x$, $\sin(\sin^3 x)$ durch $\sin^4 x$ u. s. w. bezeichnen, so ist der Werth, welchen der Bruch

$$\frac{x^{n-1}\sin^n x-(\sin x)^n}{x^{n+4}}$$

für $x=0$ erhält, der Grösse

$$\frac{n(n-1)}{36}$$

gleich, was durch Differentialrechnung oder auf eine andere Art zu erweisen ist.

Wenn A, B, C drei gegebene, in gerader Linie liegende Punkte sind, um den Punkt C ein Kreis beschrieben, und durch den Punkt B eine diesen Kreis in den Punkten D und E schneidende gerade Linie gezogen ist, so soll man die Lage dieser geraden Linie bestimmen, bei welcher die Sehne BD für ein in dem Punkte A befindliches Auge die grösste scheinbare Grösse hat.

Wenn ABC ein beliebiges ebenes Dreieck ist, und ausser der Summe oder Differenz der Seiten AB und AC auch noch die beiden den Winkel BAC und seine Nebenwinkel halbirenden, von dem Punkte A aus bis zu ihren Durchschnittspunkten D und E

Digitized by Google

mit der dem Punkte A gegenüberstehenden Seite BC des Dreiecks und deren Verlängerung über B oder C hinaus gezogenen geraden Linien AD und AE gegeben sind: das Dreieck ABC zu bestimmen.

Wenn O ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, dessen Seiten und Winkel auf die in der Trigonometrie gewöhnliche Weise bezeichnet werden, ist, und α, β, γ die Entfernungen des Punktes O von den Punkten A, B, C sind; so findet, wenn Δ die Fläche eines Dreiecks bezeichnet, dessen drei Seiten $\alpha \sin A$, $\beta \sin B$, $\gamma \sin C$ sind, jederzeit die Gleichung

$$2a^2 \operatorname{cosec} A \sin B \sin C = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C \pm 8\Delta$$

Statt, in welcher das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises liegt.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei Seiten eines Dreiecks und den um dasselbe beschriebenen Kreis berührt.

Die Relation zwischen den Wurzeln der beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$x^3 - ax = b \text{ und } x^3 + ax^2 = b^2$$

zu finden.

Wenn zwischen einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, und drei andern Kreisen, deren Halbmesser r_1, r_2, r_3 sind, Berührungen von Aussen Statt finden, und d, d_1 die Entfernungen der Mittelpunkte der Kreise (r), (r_1) von der Centrallinie der Kreise (r_2) und (r_3) bezeichnen, so ist

$$\frac{r}{d} - \frac{r_1}{d_1} = 2.$$

(Für die Kugel ist die entsprechende Relation $\frac{\sin r}{\sin d} - \frac{\sin r_1}{\sin d_1} = 2$.)

Digitized by Google

XII.

Miscellen.

M. E. Bary, professeur de physique au collége de Charlemagne, adresse à l'Académie des sciences de Paris une note dans laquelle il fait connaître une nouvelle formule pour les tensions des vapeurs.

M. Bary propose de représenter les tensions de la vapeur d'eau au-dessous de 100° par la formule empirique

$$\log y = \log 760 - \frac{ax + bx^2}{c - x};$$

y est l'élasticité de la vapeur exprimée en millimètres de mercure à 0°; x est la température comptée en degrés centésimaux positivement au dessous de ce point. C'est la formule de Roche augmentée d'un terme en x^2. M. Bary croit cette modification nécessaire pour que la formule embrasse un intervalle de température un peu étendu. En calculant les constantes a, b, c, d'après les observations faites par M. Regnault à 75°, à 50° et à 25°, on obtient une expression qui reproduit fidèlement les expériences de ce physicien entre 100° et —32°. Cette formule logarithmique est plus simple et se prête à une extension plus grande que la formule exponentielle à cinq constantes imaginée par M. Biot et adoptée par M. Regnault.

L'auteur applique ensuite sa formule aux expériences de MM. Arago et Dulong sur les élasticités de la vapeur aqueuse entre 100° et 224°; puis il a recours à une autre modification de la formule de Roche, qui est plus commode dans le cas où c'est la témperature de la vapeur qui est l'inconnue. Faisant pour abréger $\log y = z$, il pose

$$x = \frac{Cz - Bz^2}{A - z};$$

y désigne la tension de la vapeur estimée en atmosphères de 760^{mm}, et x est la température comptée à partir de 100° positivement au-dessus de ce point. Les deux formules s'accordent aussi bien l'une que l'autre avec l'ensemble des observations de MM. Arago et Dulong; entre 100° et 140° environ elles sont un peu plus exactes que la formule *binôme* employée par ces physiciens.

M. Bary justifie le choix de ses formules par des tableaux qui offrent les résultats de leur comparaison avec l'expérience.

L'auteur pense que les formules qu'il propose seraient susceptibles de plusieurs autres applications. Il cite comme exemple le passage de la chaleur rayonnante à travers des lames solides ou liquides dont on fait varier l'épaisseur. Soit l'équation

$$\log y = \log Y - \frac{ax + bx^2}{c + x},$$

où y est la quantité de chaleur transmise à une épaisseur variable x, et Y la quantité de chaleur qui répond à $x = 0$. Il a traduit en nombres cette formule pour la chaleur qui rayonne d'une lampe de Locatelli et qui traverse des lames de verre, de cristal de roche limpide, d'huile de colza, ou d'eau distillée, et il a constaté que la formule satisfait très bien à ces quatre séries d'observations faites par M. Melloni. Cette interpolation, dit M. Bary, est moins pénible que celle de M. Biot, qui décompose le flux total de chaleur en trois flux partiels, représente chacun d'eux par une intégrale définie, et ajoute ensuite ces trois intégrales.

Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel.

Von dem Herausgeber.

In Taf. I. Fig. 6. seien die sämmtlichen Seiten und Winkel des Dreiecks ABC und ausserdem die beiden an dem Punkte D liegenden Winkel ADC und BDC gegeben. Bezeichnen wir dann alle Seiten und Winkel so, wie es in der Figur geschehen ist, so ist

$$\varphi + \psi = C,$$

und nach den Principien der spärischen Trigonometrie haben wir:

$$\sin\alpha : \sin\varphi = \sin a : \sin x,$$
$$\sin\beta : \sin\psi = \sin b : \sin y$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos c - \cos x \cos y}{\sin x \sin y}.$$

Setzen wir nun im Folgenden der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin a}, \quad \mu = \frac{\sin\beta}{\sin b};$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\sin\varphi = \lambda \sin x, \quad \sin\psi = \mu \sin y;$$

also

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi):$$

d. i.

Digitized by Google

$$\lambda \sin x + \mu \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi),$$
$$\lambda \sin x - \mu \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi);$$

folglich

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))}{\lambda}, \quad \sin y = \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\mu}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos x \cos y = \cos c - \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y$$

ist, so erhält man, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung quadrirt und dann statt des Products $\cos x^2 \cos y^2$ das Product $(1 - \sin x^2)(1 - \cos y^2)$ einführt, nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$\sin c^2 = \sin x^2 + \sin y^2 - 2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin x \sin y - \sin(\alpha + \beta)^2 \sin x^2 \sin y^2,$$

d. i. nach dem Obigen die Gleichung

$$\sin c^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2} + \frac{\sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\mu^2} - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi)) \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))}{\lambda \mu} - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2 \sin \frac{1}{2}(C + (\varphi - \psi))^2 \sin \frac{1}{2}(C - (\varphi - \psi))^2}{\lambda^2 \mu^2},$$

welche man leicht auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\} - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2}\{\sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 - \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2\}$$

oder nach gehöriger Entwickelung auf die Form

$$\sin c^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\right) \sin \tfrac{1}{2} C^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{2 \cos c \cos(\alpha + \beta)}{\lambda \mu}\right) \cos \tfrac{1}{2} C^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) \sin C \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) - \frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2} \sin \tfrac{1}{2} C^4 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)^4$$

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^4\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4$$

$$+\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

bringt.

Dividiren wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2$$

und setzen

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{1}{1+\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},\quad \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2=\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2}{1+\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2},$$

so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$A_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\sin\tfrac{1}{2}C^2\},$$

$$B_1=-2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$C_1=2\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\}$$
$$-\frac{2\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}\}\cot\tfrac{1}{2}C^2,$$

$$D_1=\sin c^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2$$
$$-\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}+\frac{2\cos c\cos(\alpha+\beta)}{\lambda\mu}-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\cos\tfrac{1}{2}C^2\}\cot\tfrac{1}{2}C^2$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von $\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ die folgende Gleichung des vierten Grades:

$$0=A_1+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)+C_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+B_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^3$$
$$+D_1\tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^4,$$

wobei man auch noch bemerken kann, dass sich der Coefficient C_1, wie man leicht findet, durch die Coefficienten A_1 und D_1 auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$C_1=A_1+D_1-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}C^2.$$

Am 14ten März 1845 starb zu London Dr. J. Fr. Daniell, Prof. der Chemie am King's College, Secretair der Royal Society für das Ausland, u. A. durch seine Meteorological Essay's. 1823. 3. edit. 1845. allgemein bekannt.

Digitized by Google

Die vom Minister Villemain bei den Kammern in Paris beantragte und von diesen beschlossene Sammlung und Herausgabe der Schriften von Fermat hat einen erfreulichen Fortgang genommen. Libri hat bei einem Antiquar in Metz eine bedeutende Anzahl Handschriften gefunden. Biographische Notizen sind eingesendet worden, nach denen Fermat nicht zu Toulouse, sondern zu Beaumont-de-Lomagne geboren ist. Auch in Deutschland hofft man noch Handschriften aufzufinden. Der Minister Salvandy hat die Herausgabe Libri übertragen (Jenaische allgemeine Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 148. S. 590).

L'Académie des sciences de Paris a appris, qu'on vient de retrouver chez un libraire de Paris un des ouvrages perdus d'un géomètre du XVIIe siècle, Desargues, le contemporain et l'ami de Descartes, de Fermat et de Pascal. On a même l'espoir de retrouver d'autres ouvrages du même géomètre, tous perdus jusqu'ici, et qu'on ne connaissait que par le dire de différents auteurs qui en avaient parlé avec éloge. L'Académie a chargé sa commission administrative de faire l'acquisition de l'ouvrage retrouvé, et le ministre de l'instruction publique sera prié de faire faire des recherches pour tâcher de retrouver les autres ouvrages du même auteur, sur l'existence desquels on possède, à ce qu'il parait, quelques indices.

Die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig hat den Einsendungstermin der Bearbeitungen der im Literarischen Bericht Nr. XVIII. S. 288. angezeigten Preisaufgabe bis Ende März 1846 verlängert und den Preis auf 48 Dukaten erhöhet. Die Adresse ist an den jedesmaligen Sekretär der Gesellschaft zu richten.

Einige Bemerkungen über die Abhandlung Thl. VI. Heft II. Nr. XXIX.

Aus einem Schreiben des Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg an den Herausgeber.

In dem vorher genannten Hefte des Archivs findet sich von Seite 187 an eine recht zierliche Entwickelung verschiedener bestimmter Integralien von Herrn Oberlehrer Arndt in Stralsund, deren Verständniss aber leider durch einige Druck- oder Schreibfehler etwas beeinträchtigt wird. Für den Fall, dass Sie dieselben vielleicht noch nicht von anderer Hand mitgetheilt erhalten haben, ist es Ihnen wohl angenehm, wenn ich sie hier anzeige, da die Abhandlung um ihres interessanten Inhalts willen gar sehr verdient, völlig correct gemacht zu werden.

Seite 187. Zeile 12 v. u. ergänze hinter dem Worte „verschwindet" die Worte: „in so fern n eine ganze Zahl bedeutet".

Seite 191. Zeile 8 v. u. statt $-\frac{1}{2}\pi^2\log 2(2m)^2$ lese man $-\frac{1}{2}\pi^2.4(2m-1)\log 2$.

Seite 192. Zeile 6 muss heissen:

$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2(2m+1)^2\left(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{2m+2}{2m+1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{2m}{2m+1}\right).$$

Von hier an aber möchte der folgende Passus bis Zeile 17 vielleicht besser so lauten:

„Daher ist jetzt

$$(12)\int_0^{n\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$
$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2n^2\left(\log 2-k\pi\sqrt{-1}.\frac{n\mp1}{n}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.\frac{n\pm1}{n}\right),$$

„wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade „oder ungerade ist. Für $n=1$ erhält man sofort

$$(13)\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\left(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}\right),$$

„wie es sich auch aus (8) ergiebt, wenn man daselbst $m=0$ macht.“

Seite 193. Zeile 11 und 12 muss es statt $+(2\lambda+1)$ beide Male heissen $-(2\lambda+1)$.

Seite 193. Zeile 13 aber ist statt $-(2\lambda+1)$ zu setzen $+(2\lambda+1)$.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

1.

In den Miscellen des Archivs (Thl. IV. S. 223) ist eine Auflösung der Aufgabe von der Trisection des Winkels mitgetheilt, welche von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängig ist. Sie führt auf die Gleichung

$$x^4+ax^3-3r^2x^2-2ar^2x+a^2r^2=0,$$

in welcher r den Radius eines Kreises bedeutet, in dessen Mittelpunkte der zu theilende Winkel seinen Scheitel hat, während a und x die zu dem Winkel und seinem dritten Theile gehörenden Sehnen in diesem Kreise sind. Ein Blick auf diese Gleichung zeigt uns, dass $x=-a$ eine Wurzel derselben, die Gleichung also durch $x+a$ theilbar ist. Man erhält mithin die Gleichung dritten Grades

$$x^3-3r^2x+ar^2=0.$$

Ist der zu theilende Winkel $=2C$, so ist $a=2r\sin C$, $x=2r\sin\frac{1}{3}C$, und die Gleichung reducirt sich auf die bekannte

$$(\sin\tfrac{1}{3}C)^3-\tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{3}C+\tfrac{1}{4}\sin C=0.$$

Digitized by Google

2.

Die Gleichung $(\sin\frac{1}{3}C)^3-\frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}\sin C=0$ wird in den elementaren Darstellungen der Trigonometrie gewöhnlich benutzt, um die Möglichkeit der Berechnung einer von Grad zu Grad fortschreitenden Tafel der Sinus nachzuweisen. Hat man nämlich aus den Eigenschaften der regelmässigen Vielecke $\sin 18^0$ und $\sin 15^0$ hergeleitet, so findet man leicht $\sin 3^0$, und kann nun auf jene Gleichung verweisen, deren Auflösung $\sin 1^0$ liefert.

Da diese Gleichung aber zum irreducibeln Falle gehört, so setzt ihre Lösung entweder die Benutzung trigonometrischer Tafeln, deren Berechnung erst nachgewiesen werden soll, oder die Entwickelung von $(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{3}}$ nach dem binomischen Lehrsatze, oder die Kenntniss der Auflösung höherer numerischer Gleichungen voraus. Die erste Art ist wegen des speciellen Zwecks der Lösung dieser Aufgabe auszuschliessen, die dritte wegen des Standpunktes der Lernenden. Es erhellet mithin die Nothwendigkeit, bei der Auseinandersetzung der kubischen Gleichungen den irreducibeln Fall auf dem zweiten Wege ebenfalls aufzulösen und sich nicht auf die goniometrische Lösung zu beschränken.

Unsere Gleichung bietet dann, wenn man $C=3^0$ setzt, ein vortreffliches Uebungsbeispiel dar, da die ersten Glieder der Reihen schon ein sehr genaues Resultat geben. Ihre drei Wurzeln sind

$$u+v,\quad -\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i,\quad -\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i;$$

worin

$$u=-\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1+i\tang C)^{\frac{1}{3}}.i \text{ und } v=+\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}(1-i\tang C)^{\frac{1}{3}}.i$$

sind, wie durch leichte Umformungen der Cardanischen Formel gefunden wird. Man erhält dann

$$u+v=(\cos C)^{\frac{1}{3}}\{\overset{1}{B}_{\frac{1}{3}}\tang C-\overset{3}{B}_{\frac{1}{3}}(\tang C)^3+\overset{5}{B}_{\frac{1}{3}}(\tang C)^5-..\},$$

$$\frac{u-v}{2}\sqrt{3}.i=\tfrac{1}{2}(\cos C)^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\{1-\overset{2}{B}_{\frac{1}{3}}(\tang C)^2+\overset{4}{B}_{\frac{1}{3}}(\tang C)^4-..\};$$

wo nach der bekannten Bezeichnungsweise

$$\overset{k}{B}_{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)....(\frac{1}{3}-(k-1))}{1.2.3....k}$$

ist. Bezeichnet man die erste Reihe mit P, die zweite mit Q, so sind die Wurzeln

$$P\sqrt[3]{\cos C},\quad -\tfrac{1}{2}P\sqrt[3]{\cos C}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{\cos C}.Q.$$

Setzt man nun $\sin C=\sin 3^0$, so sind die drei Wurzeln $\sin 1^0$, $\sin 59^0$ und $\sin -61^0$, wovon der Grund leicht einzusehen ist.

3.

In der mathematischen Theorie des Lichtes sind die goniometrischen Formeln

$$\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)\ldots.+\sin(x+nz)=\frac{\sin(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

und

$$\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)..+\cos(x+nz)=\frac{\cos(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2}}{\sin\frac{1}{2}z}$$

von der grössten Wichtigkeit. Die in den Supplementen zu Klügel's Wörterbuche (Thl. II. S. 636 ff.) gegebene Herleitung derselben zeichnet sich dadurch aus, dass sie direkt und elegant ist, führt aber erst nach mancherlei Umformungen zu dem gewünschten Resultate. Als ich vor einiger Zeit die Beugungserscheinungen nach Schwerd durchging, der jene Formeln ohne Beweis aufstellt, fand ich folgende ganz leichte Ableitung derselben.

Aus den Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha^2-\sin\beta^2,$$
$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta$$

ergeben sich leicht die bekannten Formeln

$$1)\ \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1)+\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ldots.$$
$$+\sin(\alpha_n+\alpha_{n+1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\sin(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1}),$$

$$2)\ \cos(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\ldots.$$
$$+\cos(\alpha_n+\alpha_{n+1})\sin(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\cos(\alpha+\alpha_{n+1})\sin(\alpha-\alpha_{n+1}).$$

Setzt man in diesen $\alpha-\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2\ldots.=\alpha_n-\alpha_{n+1}=-\frac{z}{2}$ und $\alpha+\alpha_1=x$, so erhält man $\alpha=\frac{x}{2}-\frac{z}{4}$, $\alpha_1=\frac{x}{2}+\frac{z}{4}$, $\ldots.\ \alpha_{n+1}=\frac{x}{2}+(2n+1)\frac{z}{4}$, und $\alpha+\alpha_1=x$, $\alpha_1+\alpha_2=x+z$, $\alpha_2+\alpha_3=x+2z$, $\ldots.\ \alpha_n+\alpha_{n+1}=x+nz$, sowie $\alpha+\alpha_{n+1}=x+\frac{nz}{2}$, und $\alpha-\alpha_{n+1}=-\frac{(n+1)z}{2}$.

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (1) und (2), so erhält man

$$\sin\frac{z}{2}.\{\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)+\ldots.+\sin(x+nz)\}$$
$$=\sin(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

$$\sin\frac{z}{2}.\{\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)+\ldots.+\cos(x+nz)\}$$
$$=\cos(x+\frac{nz}{2})\sin\frac{(n+1)z}{2},$$

d by Googl

woraus die oben hingestellten Gleichungen sich ohne Weiteres ergeben.

4.

Scheuet man die Vermittelung des Imaginären nicht, so kann man die in der vorigen Bemerkung hergeleiteten Formeln auch auf folgendem Wege erhalten.

In der Progression

$$a+ae+ae^2....+ae^n=\frac{a(1-e^{n+1})}{1-e}$$

setze man

$$a=\cos x+i\sin x,\ e=\cos z+i\sin z;$$

dann kommt sogleich

$$\{\cos x+\cos(x+z)+\cos(x+2z)+\cos(x+3z).....+\cos(x+nz)\}$$
$$+i\{\sin x+\sin(x+z)+\sin(x+2z)+\sin(x+3z)....+\sin(x+nz)\}$$
$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-\cos(n+1)z-i\sin(n+1)z)}{1-\cos z-i\sin z}.$$

Der Zähler der rechten Seite verwandelt sich sofort in

$$\cos x-\cos(x+(n+1)z)+i(\sin x-\sin(x+(n+1)z),$$

und dies in

$$2\sin\frac{(n+1)z}{2}\{\sin(x+\frac{n+1}{2}z)-i\cos(x+\frac{n+1}{2}z)\}.$$

Multiplicirt man nun Zähler und Nenner der rechten Seite mit

$$1-\cos z+i\sin z,$$

so wird der Zähler

$$2\sin\frac{n+1}{2}z\left\{\begin{array}{l}\sin(x+\frac{n+1}{2}z)-\sin(x+\frac{n-1}{2}z)\\+i(\cos(x+\frac{n-1}{2}z)-\cos(x+\frac{n+1}{2}z))\end{array}\right\},$$

und der Nenner wird $4(\sin\frac{1}{2}z)^2$. Durch die leichteste Umformung erhält man dann als Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite unserer Gleichung

$$4\sin\frac{n+1}{2}z.\sin\frac{z}{2}\{\cos(x+\frac{nz}{2})+i\sin(x+\frac{nz}{2})\}.$$

Wird die Division mit dem Nenner $4(\sin\frac{1}{2}z)^2$ ausgeführt, so wird unsere Gleichung

$$\{\cos x + \cos(x+z) + \ldots + \cos(x+nz)\}$$
$$+ i\{\sin x + \sin(x+z) + \ldots + \sin(x+nz)\}$$
$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}z \cdot \cos(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}z \cdot \sin(x+\frac{nz}{2})}{\sin\frac{z}{2}},$$

aus welcher durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile die in Rede stehenden goniometrischen Formeln erhalten werden.

Mathematische Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen.

Fractiones continuae, in quas explicari possunt radices reales aequationum algebraicarum tertii altiorisve gradus, quae coefficientes habent rationales et ad gradum inferiorem reduci nequeunt, qualitates sine dubio habent similes illis, quas in aequationibus primi et secundi gradus cognitas habemus. Desinit quidem finita forma fractionum continuarum, ubi aequationes primum gradum excedunt, desinit periodicitas ultra secundum, sed pro hisce formis aliae exstare possunt explicationum genera, quae si bene cognita fuerint, ad analysin indeterminatam promovendam magnopere valeant. Proponimus itaque, ut inquiratur in propritates generales fractionum continuarum gradus altioris, saltem earum, quae illas, quas novimus, immediate sequuntur, id est, in quas explicari possunt radices cubicae irrationales quantorum rationalium, ita ut leges generales definiantur, quibus tam ipsarum fractionum quam seriei convergentium principalium terminos ad quemlibet usque ordinem computare liceat sine ulla praevia determinatione terminorum omnium antecedentium.

In quaestionibus tractandis sermone Latino, Gallico, Anglico, Germanico, Suecico, Danicove uti licebit. Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris, sed tessera aliqua, adjiciendaque charta obsignata, eadem tessera notata, quae scriptoris nomen, ordinem domiciliumque indicet. (Preis 50 Dänische Ducaten. Einlieferungstermin vor Ausgang des August 1816. Adresse an den Sekretair der Akademie, Herrn Professor Johann Christian Örsted.)

Digitized by Google

XIII.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erster Theil.

§. 1.

Begriff der geometrischen Verwandtschaft.

a) Sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ (Taf. II. Fig. 1.) irgend zwei Punkte B, B' gegeben, so bestimmt ein jeder andere Punkt a dieser Ebene zwei Gerade a, a', welche den letzteren mit B, B' verbinden, und umgekehrt: je zwei Strahlen a, a' der Punkte B, B' bestimmen einen, und zwar im Allgemeinen auch nur einen einzigen Punkt a der Ebene $\mathfrak{E}$, und nur diejenigen zwei Strahlen derselben, welche zusammenfallen, haben nicht bloss einen, sondern unzählige Punkte gemein. Jeder unendlich entfernte Punkt bestimmt zwei parallele Strahlen, und umgekehrt. Irgend ein System von Punkten a, b, c, d.... bestimmt zwei Strahlbüschel B, B', deren Strahlen a, b, c, d....; a', b', c', d'.... paarweise nach jenen Punkten gehen, und diese Strahlbüschel sind in Ansehung dieser Strahlenpaare perspektivisch oder überhaupt projektivisch, jenachdem jenes System von Punkten einer geraden Linie A oder einem Kegelschnitte K, welcher durch die Punkte B, B' geht, angehört, und umgekehrt (Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 4. und 11.). Insbesondere bestimmen sämmtliche unendlich entfernte Punkte von $\mathfrak{E}$ zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B'.

b) Sind andererseits in einer Ebene $\mathfrak{E}$ irgend zwei Gerade A, A' gegeben, so bestimmt eine jede andere Gerade a dieser

Ebene zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, in welchen sie die ersteren schneidet, und umgekehrt: je zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ der Geraden A, A' bestimmen eine Gerade a der Ebene $\mathfrak{E}$, und nur diejenigen zwei Punkte derselben, welche sich im Durchschnitte von A, A' vereinigen, gehören unzähligen Geraden zugleich an. Jede mit A (oder A') parallele Gerade geht nach dem unendlich entfernten Punkte von A (A'), und eine in $\mathfrak{E}$ unendlich entfernt liegende Gerade geht nach den unendlich entfernten Punkten von A und A', und umgekehrt. Irgend ein System von Geraden $a, b, c, d....$ bestimmt auf A, A' zwei Punktenschaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....$, und es sind die Geraden A, A' in Ansehung dieser letzteren perspektivisch oder projektivisch überhaupt, jenachdem erstere durch einerlei Punkt B gehen oder einen Kegelschnitt K umhüllen, welcher auch A, A' zu Tangenten hat, und umgekehrt. Insbesondere bestimmt jeder unendlich entfernte Punkt B zwei projectivisch-ähnliche Gerade A, A'.

c) Betrachtet man jetzt irgend zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und denkt sich in der einen, $\mathfrak{E}$, zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei Gerade A, A', und in der anderen, $\mathfrak{E}_1$, zwei Strahlbüschel B_1, B_1' oder zwei Gerade A_1, A_1' dergestalt gegeben, dass immer das eine Gebilde der einen Ebene mit einem Gebilde der anderen, und das andere der ersten mit dem anderen der zweiten projektivisch ist, d. h. um bestimmter zu reden, dass

entweder α) $B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....)$ und zugleich
$B'(a', b', c', d'....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....)$;

oder β) $A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....)$;

oder γ) $B(a, b, c, d....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....)$ und
$B'(a', b', c', d'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....)$

ist, so bestimmt im Falle α) ein jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlen a, a' der Strahlbüschel B, B', diese wieder bestimmen zwei und zwar nur zwei Strahlen a_1, a_1', welche denselben in den Strahlbüscheln B_1, B_1' entsprechen, und diese im Allgemeinen einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}_1$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird der Punkt $\mathfrak{a}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}_1$ bestimmt.

Im Falle β) bestimmt eine jede Gerade $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ der Geraden A, A'; diese wieder bestimmen zwei, und zwar nur zwei ihnen entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ der Geraden A_1, A_1', und diese im Allgemeinen eine einzige Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird die Gerade a durch die Gerade a_1 bestimmt.

Im Falle γ) bestimmt jeder Punkt $\mathfrak{a}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlen a, a' der Strahlbüschel B, B', diese bestimmen die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ der Geraden A_1, A_1', und letztere im Allgemeinen eine einzige Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$; und umgekehrt wird der Punkt $\mathfrak{a}$ durch die Gerade a_1 bestimmt.

d) Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ können also mittels projektivischer Gebilde auf drei wesentlich verschiedene Arten auf einander bezogen werden: entweder nämlich entspricht im Allgemeinen

Digitized by Google

α) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene ein bestimmter Punkt und ein bestimmtes System von Punkten der anderen, und umgekehrt: erstere den letzteren; oder

β) einer jeden Geraden und einem jeden Systeme von Geraden der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen; und umgekehrt: erstere den letzteren; oder

γ) einem jeden Punkte und einem jeden Systeme von Punkten der einen Ebene eine bestimmte Gerade und ein bestimmtes System von Geraden der anderen, und umgekehrt: erstere den letzteren.

Zwei auf irgend eine von diesen drei Arten auf einander bezogene Ebenen, sowie auch je zwei entsprechende Systeme ihrer Elemente, heissen, in Ansehung der zwei Paar projektivischen Gebilde B, B_1 und B', B_1', oder A, A_1 und A', A_1', oder B, A_1 und B', A_1', geometrisch verwandt (oder auch bloss verwandt), und diese Beziehung selbt die geometrische Verwandtschaft derselben.

§. 2.

Besondere Fälle.

Die weitere Eintheilung der geometrischen Verwandtschaften geht, wie bereits die so eben erhaltene, unmittelbar aus den, im Wesen der projektivischen Beziehungen überhaupt gegebenen Unterschieden hervor. Namentlich bieten sich drei verschiedene Gesichtspunkte dar, von denen die beiden ersteren alle drei Fälle *α*), *β*), *γ*), der dritte dagegen nur die Fälle *α*) und *β*) betreffen:

1) Nach der projektivischen Beziehung der den Gebilden beider Ebenen gemeinschaftlichen Elemente auf einander.

Entweder nämlich *a*) entspricht das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente in keiner Beziehung, d. h. weder insofern ersteres zu dem einen, noch insofern es zu dem anderen Gebilde gerechnet wird; *b*) oder ersteres entspricht dem letzteren nur insofern jenes zu dem einen Gebilde gerechnet wird; oder *c*) beide entsprechen sich in beiderlei Hinsicht.

2) Jenachdem die Ebenen aufeinander liegen oder nicht. Im ersten Falle können die gegebenen zwei Paare projektivischer Gebilde beide oder auch nur das eine schief, perspektivisch, oder aber aufeinander oder concentrisch, und insbesondere involutorisch liegen, und es entstehen die Fragen: ob und wieviele Paare entsprechender Elemente sich vereinigen? ob und wieviele Paare einander in doppeltem Sinne entsprechen?

3) Nach der projektivischen Beschaffenheit der gegebenen Gebilde; d. h. jenachdem beide Paare oder nur das eine projektivisch überhaupt, oder projektivisch-ähnlich oder projektivisch-gleich sind.

Im Folgenden wird der erste Gesichtspunkt vorherrschend die Ordnung der Betrachtung bestimmen, und daher werden zuvörderst die beiden unter 1. *a*) und 1. *b*) begriffenen Verwandtschaftsarten, welche wir die höheren nennen wollen, und im zweiten Theil dieser Abhandlung die dritte Art, welche unter den Namen der Collineation und Reciprocität bekannt ist, in Untersuchung gezogen werden.

§. 3.

Bestimmtheit zweier und vermittelte Beziehung mehrerer geometrisch verwandter Systeme aufeinander.

Da nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 2. das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier proj. Gebilde vollkommen bestimmt ist, wenn irgend drei dieser Paare beliebig gegeben sind, so muss auch, was unmittelbar einleuchtet:

1) Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen vollkommen und auf einzige Weise bestimmt sein, wenn in jeder die beiden Punkte oder Geraden B, B': A, A' und B_1, B_1'; A_1, A_1', und ausserdem irgend drei Paar entsprechende Elemente der beiden Ebenen gegeben sind.

2) Man kann in zwei Ebenen die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Paare projektivischer Gebilde und ausserdem drei Elementenpaare beliebig annehmen und sodann festsetzen: die Ebenen sollen in Ansehung der ersteren geometrisch verwandt, und die letzteren sollen entsprechende Elementenpaare derselben sein.

3) Von zwei geometrisch verwandten Systemen ist das eine vollkommen bestimmt, wenn das andere System und die Verwandtschaft ihrer Ebenen vollkommen bestimmt ist.

4) Ist in einer Ebene irgend ein System von Punkten oder Geraden gegeben, so kann man in dieser Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier Gebilde nebst drei Elementen jenes Systems, und in einer zweiten Ebene die Mittelpunkte oder Richtungslinien zweier mit den ersteren projektivischer Gebilde nebst drei Elementen beliebig annehmen und sodann festsetzen: diese drei Elemente sollen einem zweiten Systeme angehören, welches mit dem ersten in Ansehung jener Gebilde geometrisch verwandt sei, und zwar sollen sie jenen drei Elementen des ersten Systems entsprechen.

Ferner ergibt sich aus Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 5. unmittelbar der folgende Satz:

5) Sind in einer beliebigen Anzahl von Ebenen ebensoviele Systeme von Punkten oder Geraden in bestimmter Ordnung gegeben, und ist der Reihe nach ein jedes dieser Systeme mit dem ihm zunächst folgenden geometrisch verwandt, so ist ein jedes derselben mit jedem, und namentlich auch das erste mit dem letzten geometrisch verwandt.

Digitized by Google

Erste Art
der höheren geometrischen Verwandtschaften.

α.
Zwei Systeme von Punkten.

§. 4.

Denkt man sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ (Taf. II. Fig. 1.) zwei Strahlbüschel B, B', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1' dergestalt gegeben, dass

$$B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) \text{ und}$$
$$B'(a', b', c', d'..) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'..),$$

und dass dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B' sowohl insofern er zu B gehört, ein solcher Strahl P_1' in B_1, als auch insofern er zu B' gehört, ein solcher Strahl P_1 in B_1' entspreche, welcher nicht mit dem gemeinschaftlichen Strahle P_1'' von B_1, B_1' zusammenfällt, so werden auch umgekehrt dem letzteren, P_1'', in den Strahlbüscheln B, B' resp. zwei von P'' verschiedene Strahlen P', P entsprechen müssen; und wird der Durchschnitt von P, P' mit B'', und der Durchschnitt von P_1, P_1' mit B_1'' bezeichnet, so wird allen Punkten von P'' ein einziger Punkt der Ebene $\mathfrak{E}_1$, nämlich B_1'', und dem Punkte B'' ein jeder Punkt der Geraden P_1'' in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, und umgekehrt. Ferner entspricht jedem Punkte p von P derjenige Punkt in $\mathfrak{E}_1$, in welchem der dem P entsprechende Strahl von B_1', d. i. P_1'', den dem p entsprechenden Strahl von B_1, d. i. p, schneidet, also immer ein und derselbe Punkt B_1; und gleicherweise entspricht jedem Punkte von P' ein und derselbe Punkt B_1', u. s. w.

Die drei Punkte B, B', B'' und B_1, B_1', B_1'' werden Hauptpunkte, und die drei Geraden P, P', P'' und P_1, P_1', P_1'' werden Hauptlinien, und die von denselben gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke genannt; und zwar heissen sowohl je zwei Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'', als auch je ein Hauptpunkt und eine Hauptlinie B, P_1; B', P_1'; B'', P_1''; B_1, P; B_1', P'; B_1'', P'', und endlich die Hauptdreiecke selbst zugeordnet.

Sind die drei Paar zugeordneten Hauptpunkte von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gegeben, so kennt man von jedem der beiden Paare proj. Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' zwei Paar entsprechende Strahlen; also lässt sich jetzt der Satz 1) des §. 3. dergestalt aussprechen:

1) Die geometrische Verwandtschaft zweier Ebenen ist vollkommen und auf einzige Weise bestimmt, sobald ihre drei Paar zugeordneten Hauptpunkte und irgend ein Paar entsprechende Punkte derselben gegeben sind; und auf ähnliche Weise die Sätze 2), 3), 4) desselben §.

Ist in $\mathfrak{E}$ irgend eine Gerade A gegeben, deren Punkte a, b, c, d.. die Strahlen $a, b, c, d..$; $a', b', c', d'....$ in B, B' bestimmen, und

sind $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$; $a_1', b_1', c_1', d_1' \ldots$ die den letzteren in B_1, B_1' entsprechenden Strahlen, so hat man:

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1..) = B(a, b, c, d....) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}..) \equiv B'(a', b', c', d'..)$$
$$= B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....),$$

also auch

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1'....).$$

Geht nun A durch den Hauptpunkt B'', so fallen in B_1, B_1' zwei entsprechende Strahlen mit dem gem. Strahle P_1'' zusammen; nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. 8. entspricht also der Geraden A eine Gerade A_1. In jedem anderen Falle dagegen, wo die Strahlbüschel B_1, B_1' schiefliegend sind, entspricht der A ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' und zugleich durch den Punkt B_1'' geht, der dem Durchschnitte von A und P'' entspricht (Nr. XXX. 11.).

Denkt man sich nun die beliebig liegende A als den perspektivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel B, B'', so entsprechen den letzteren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B_1'', deren Strahlen sich paarweise auf dem Kegelschnitte $[A_1]$ schneiden, welche also unter sich und demnach mit jedem der Strahlbüschel B, B'' projektivisch sind. Also entspricht nicht nur jedem Strahlbüschel B, B', sondern auch jedem Strahlbüschel B'' ein demselben projektivisches B_1''.

Sind die Strahlen zweier Strahlbüschel B, B' paarweise parallel, so sind letztere projektivisch-gleich (§. 1. *a*), also sind auch die denselben entsprechenden Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch und bestimmen einen Kegelschnitt R_1, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht, und da einem jeden Kegelschnitte $[A_1]$, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, auch umgekehrt eine Gerade A entsprechen muss, so liegen alle unendlich entfernten Punkte von $\mathfrak{E}$ in einer einzigen geraden Linie. Dem Kegelschnitte R_1 steht übrigens ein anderer, R, in der Ebene $\mathfrak{E}$ zur Seite, welcher der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ entspricht. Hat die Gerade A mit R zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, so hat auch der Kegelschnitt $[A_1]$ mit der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}_1$ resp. zwei, nur einen oder keinen Punkt gemein, d. h. er ist eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse.

2) In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht *a*) jedem Punkte einer Hauptlinie ein einziger Punkt, nämlich der dieser Linie zugeordnete Hauptpunkt; *b*) jedem Hauptpunkte die sämmtlichen Punkte der ihm zugeordneten Hauptlinie; *c*) jedem Strahle eines Hauptpunktes ein bestimmter Strahl des ihm zugeordneten Hauptpunktes; *d*) einem jeden Strahlbüschel eines Hauptpunktes ein demselben projektivischer Strahlbüschel des zugeordneten Hauptpunktes.

3) Einer beliebigen Geraden A der einen Ebene entspricht in der anderen ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, und insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden von beiden Ebenen ein eigenthümlicher Kegel-

Digitized by Google

schnitt R_1, R, welcher durch die drei Hauptpunkte geht.

4) Einem jeden Kegelschnitte der einen Ebene, welcher durch die drei Hauptpunkte geht, entspricht eine bestimmte Gerade der anderen Ebene.

5) Der Kegelschnitt $[A_1]$ ist entweder eine Hyperbel, oder eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem die Gerade A mit dem Kegelschnitte R zwei, oder nur einen oder keinen Punkt gemein hat.

Da endlich jeder Kegelschnitt C, welcher nur durch zwei Hauptpunkte B, B' geht, zwei proj. Strahlbüschel B, B' bestimmt, deren entsprechende, B_1, B_1', ebenfalls projektivisch sein müssen, hier aber die Strahlen P_1, P_1' sich nicht entsprechen können, da die B, B' keine vereinigten entsprechenden Strahlen (P'') besitzen, so folgt ferner:

6) Einem jeden Kegelschnitte C der einen Ebene, welcher bloss durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht auch in der anderen ein Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte geht; und dieser ist eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse, jenachdem ersterer den Kegelschnitt R in zwei neuen Punkten schneidet, in einem neuen Punkte berührt oder nur in jenen zwei Hauptpunkten trifft.

§. 5.

Es sei S_1'' diejenige Gerade von $\mathfrak{E}_1$, welche den mit $[A_1]$ bezeichneten Kegelschnitt im Hauptpunkte B_1'' berührt; so entspricht derselben derjenige Strahl S'' in $\mathfrak{E}$, welcher der Geraden A in keinem ausserhalb P'' gelegenen Punkte begegnet; denn schnitte S'' die A ausserhalb P'' in einem Punkte $\mathfrak{n}$, so müsste auch S_1'' mit $[A_1]$ einen Punkt $\mathfrak{n}_1$ gemein haben, welcher nicht in B_1'' fiele, könnte also auch nicht Tangente in B_1'' sein. Auf die nämliche Weise, oder auch noch einfacher, lässt sich zeigen, dass den Geraden, welche den mit C_1 bezeichneten Kegelschnitt in den beiden Hauptpunkten B_1, B_1' berühren, diejenigen Geraden entsprechen, welche die Hauptpunkte B, B' resp. mit den Durchschnitten von C und P, P' verbinden.

Wird dagegen der Kegelschnitt $[A_1]$ oder C_1 von einer Geraden D_1, welche durch keinen Hauptpunkt geht, in einem Punkte $\mathfrak{n}_1$ berührt, so entspricht letzterer ein Kegelschnitt $[D]$, welcher seinerseits mit der Geraden A auch nur einen Punkt und resp. mit dem Kegelschnitte C, ausser den Hauptpunkten B, B', auch nur einen Punkt $\mathfrak{n}$ gemein hat. Ist $\mathfrak{n}_1$ insbesondere der Durchschnitt von C_1 und P_1, so hat der Kegelschnitt $[D]$ mit C eine gemeinschaftliche Tangente in B, welche dem Strahle $B_1\mathfrak{n}_1$ entspricht.

1) Geht ein Kegelschnitt durch die drei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den drei Geraden, welche denselben in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien

Digitized by Google

und der jenem Kegelschnitte entsprechenden Geraden gehen.

2) Geht ein Kegelschnitt bloss durch zwei Hauptpunkte der einen Ebene, so entsprechen den zwei Geraden, welche ihn in diesen Punkten berühren, diejenigen Strahlen der zugeordneten Hauptpunkte, welche nach den Durchschnitten der zugeordneten Hauptlinien und des dem ersteren entsprechenden Kegelschnittes gehen.

3) Jeder anderen Tangente des unter 1) oder 2) genannten Kegelschnittes entspricht ein Kegelschnitt, welcher die dem ersteren entsprechende Gerade oder den entsprechenden Kegelschnitt berührt, und zwar sind die Berührungspunkte ebenfalls entsprechende Punkte. Im zweiten Falle berühren sich die beiden Kegelschnitte in dem zugeordneten Hauptpunkte, wenn der Berührungspunkt jener Tangente auf einer Hauptlinie liegt.

§. 6.

Denkt man sich einen Hauptpunkt B als den Mittelpunkt zweier involutorischer Strahlbüschel B, B^0, deren zugeordnete Strahlenpaare a, a^0; b, b^0; c, c^0.... heissen mögen, und sind a_1, $a_1{}^0$; b_1, $b_1{}^0$; c_1, $c_1{}^0$.... die denselben entsprechenden Strahlen zweier Strahlbüschel B_1, $B_1{}^0$, so hat man

$$B_1(a_1, b_1, c_1 \ldots a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 \ldots) = B(a, b, c \ldots a^0, b^0, c^0 \ldots) =$$
$$B^0(a^0, b^0, c^0 \ldots a, b, c \ldots) = B_1{}^0(a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 \ldots a_1, b_1, c_1 \ldots);$$ also
auch $$B_1(a_1, b_1, c_1 .. a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 ..) = B_1{}^0(a_1{}^0, b_1{}^0, c_1{}^0 .. a_1, b_1, c_1 ..),$$

d. h. die Strahlbüschel B_1, $B_1{}^0$ sind gleichfalls involutorisch (Nr. XXX. §. 1. *a*). Und da den Hauptstrahlen der einen Involution, d. h. in denen zwei zugeordnete Strahlen sich vereinigen, offenbar wiederum zwei vereinigte Paare zug. Strahlen der anderen Involution oder deren Hauptstrahlen entsprechen, und da die Hauptstrahlen mit je zwei zugeordneten harmonisch sind, so folgt:

1) In zwei geometrisch verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt ein Hauptpunkt ist, wiederum eine Involution von Strahlen, und zwar sind die Hauptstrahlen beider Involutionen entsprechende Strahlen.

2) Je vier harmonischen Strahlen eines Hauptpunktes entsprechen vier harmonische Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes. Und daher

3) Entspricht einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch einen Hauptpunkt der Ebene geht, wiederum eine Involution von Punkten, und die Hauptpunkte beider Involutionen sind entsprechende Punkte.

4) Je vier harmonischen Punkten, welche mit einem Hauptpunkte der Ebene in gerader Linie liegen, entsprechen wiederum vier harmonische Punkte.

Digitized by Google

Enthält eine beliebige Gerade A eine Involution von Punkten $\mathfrak{a}, \alpha$; $\mathfrak{b}, \beta$; $\mathfrak{c}, \gamma$...., so bestimmt dieselbe im Strahlbüschel B eine Involution von Strahlen; dieser entspricht in B_1 ebenfalls eine Involution von Strahlen, und diese schneidet den der A entsprechenden Kegelschnitt $[A_1]$ in den, den Punkten $\mathfrak{a}, \alpha$; $\mathfrak{b}, \beta$; $\mathfrak{c}, \gamma$.... entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}_1, \alpha_1$; $\mathfrak{b}_1, \beta_1$; $\mathfrak{c}_1, \gamma_1$.... Nach Archiv. Theil IV. Nr. XXX. §§. 3. 4. gehen sämmtliche Sehnen $\mathfrak{a}_1\alpha_1, \mathfrak{b}_1\beta_1, \mathfrak{c}_1\gamma_1$.... durch einerlei Punkt, und daher bilden, nach Nr. XXX. §. 3. 3, die Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes $[A_1]$ nach den Punkten $\mathfrak{a}_1, \alpha_1$; $\mathfrak{b}_1, \beta_1$; $\mathfrak{c}_1, \gamma_1$.... gehen, eine Involution von Strahlen. Die Punktenpaare, in welchen ein Kegelschnitt von den einzelnen Strahlen eines Strahlbüschels geschnitten wird, sollen eine Involution von Punkten dieses Kegelschnitts, und die Berührungspunkte zweier berührenden Strahlen sollen die Hauptpunkte dieser Involution heissen. Je zwei zugeordnete Punkte bilden mit den zwei Hauptpunkten vier harmonische Punkte des Kegelschnitts.

5) Einer jeden Involution von Punkten, deren Richtungslinie durch keinen Hauptpunkt geht, entspricht eine Involution von Punkten des jener Richtungslinie entsprechenden Kegelschnittes.

6) Je vier harmonischen Punkten, welche mit keinem Hauptpunkte in gerader Linie liegen, entsprechen vier harmonische Punkte des ihrer Geraden entsprechenden Kegelschnitts.

Denkt man sich endlich irgend eine Involution von Strahlen, so schneiden diese eine jede Gerade in einer Involution von Punkten; den ersteren entsprechen ebensoviele Kegelschnitte, welche ausser den drei Hauptpunkten noch einen Punkt gemein haben, und jedem Kegelschnitte, welcher durch diese drei Hauptpunkte geht, entspricht eine Gerade der ersten Ebene; also:

7) Einer jeden Involution von Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen eine Schaar von Kegelschnitten, welche die drei Hauptpunkte und ausserdem einen vierten Punkt gemein haben, und zwar schneiden dieselben, paarweise geordnet, einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in einer Involution von Punkten.

8) Je vier harmonischen Strahlen, deren Mittelpunkt kein Hauptpunkt ist, entsprechen vier dem Hauptdreiecke umschriebene Kegelschnitte, welche noch einen vierten Punkt gemein haben, und diese schneiden einen jeden dem Hauptdreiecke umschriebenen Kegelschnitt in vier harmonischen Punkten.

§. 7.

Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf Kegelschnitte.

Man denke sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Schaar Kegelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.., welche vier Punkte B, B', B'', O gemein haben,

und in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ vier Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 beliebig gewählt; so darf man festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt, und O, O_1 sollen entsprechende Punkte derselben sein. Dies vorausgesetzt, so werden jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, welche durch den Punkt O_1 gehen, und da nun unter diesen Geraden entweder zwei oder nur eine oder keine sind, welche den mit R_1 bezeichneten Kegelschnitt berühren, im zweiten Falle aber der Punkt O_1 auf R_1 liegen, also O unendlich entfernt sein muss, so ergibt sich aus §. 5. 3. der folgende Satz:

1) Unter allen Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, befinden sich, wenn keiner dieser Punkte unendlich entfernt ist, entweder zwei Parabeln oder keine; widrigenfalls aber jedesmal eine Parabel, sobald bloss ein einziger von jenen vier Punkten unendlich entfernt ist.

Eine andere Schaar Kegelschnitte habe drei Punkte B, B', B'' und eine Tangente T gemein, so entsprechen denselben lauter Gerade, welche einen Kegelschnitt $[T_1]$ berühren. Dieser Kegelschnitt aber hat mit dem Kegelschnitte R_1 drei und folglich auch vier Punkte und demzufolge entweder vier oder keine Tangente gemein (Archiv. Thl. V. Nr. XVIII. §. 5. 6.); also.

2) Unter allen Kegelschnitten, welche drei Punkte und eine Tangente gemein haben, befinden sich entweder vier oder keine Parabeln.

Eine Schaar von Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$...., welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, werden von einer Geraden A in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... geschnitten; B_1, B_1', B_1'', p_1 seien irgend vier Punkte einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$, und es seien $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt und p, p_1 entsprechende Punkte derselben; so entsprechen jenen Kegelschnitten ebensoviele Gerade, welche durch den Punkt p_1 gehen, und der Geraden A ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und von jenen Geraden in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1; $\mathfrak{d}_1$, δ_1...., welche den ersteren entsprechen, geschnitten wird. Da nun diese Punkte eine Involution von Punkten dieses Kegelschnittes bilden, so ergibt sich aus der Umkehrung des Satzes §. 6. 5. der bekannte Satz:

3) Eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, werden von einer beliebigen Geraden in einer Involution von Punkten geschnitten.

Es sei in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt C gegeben, welcher von einer Geraden P'' in zwei Punkten B, B' geschnitten wird, und durch einen beliebigen dritten Punkt B'' der Ebene gehen die Strahlen a'', b'', c'', d''...., welche C resp. in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... und P'' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... schneiden; endlich seien die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... so bestimmt, dass $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ mit $\mathfrak{b}$, β u. s. w. harmonisch sind. Jetzt denke man sich eine zweite Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit den Punkten B_1, B_1', B_1'' und setze fest, dass $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' u. s. w. verwandt seien. Dies vorausgesetzt, so entspricht dem Kegelschnitte C ein

d by Google

Kegelschnitt C_1, welcher bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' geht; den Strahlen a'', b'', c'', d''.... entsprechen Strahlen a_1'', b_1'', c_1'', d_1'',... des dritten Hauptpunktes B_1'', und diese schneiden C_1 in Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, α_1; $\mathfrak{b}_1$, β_1; $\mathfrak{c}_1$, γ_1; $\mathfrak{d}_1$, δ_1...., welche den früheren $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; $\mathfrak{d}$, δ.... entsprechen; den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... entspricht ein einziger Punkt B_1'', und sind nun noch $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... die den $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... entsprechenden Punkte, so sind auch B_1'', $\mathfrak{a}_1''$ mit $\mathfrak{a}_1$, α_1; B_1'', $\mathfrak{b}_1''$ mit $\mathfrak{b}_1$, β_1 u. s. w. harmonisch. Unter diesen Umständen aber liegen die Punkte $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... auf einer Geraden A_1, nämlich auf der harmonischen Polare des Punktes B_1'' für C_1; also liegen auch die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... auf einem Kegelschnitte $[A]$, welcher durch B, B', B'' geht.

4) Wird ein Kegelschnitt und eine Sekante desselben von den Strahlen eines beliebigen Strahlbüschels geschnitten, so gehören sämmtliche Punkte, welche jedesmal zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Punkte der Sekante den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bilden, einem neuen Kegelschnitte an, welcher mit dem ersteren jene Sekante gemein hat und durch den Mittelpunkt jenes Strahlbüschels geht.

Dieser Satz gilt zunächst nur für reelle Sekanten, lässt sich aber auch für ideale darthun. Uebrigens ist derselbe nur ein besonderer Fall des folgenden, welcher auch aus der Eigenschaft der harmonischen Polaren durch Uebertragung sich ergibt:

5) Werden eine Schaar von Kegelschnitten, welche vier Punkte B, B', B'', p gemein haben, von irgend einer Geraden ein jeder in zwei Punkten geschnitten, und man bestimmt in jedem einen neuen Punkt dergestalt, dass er mit diesen zwei Punkten und mit einem bestimmten der Punkte B, B', B'', p, z. B. mit p, als zugeordnetem, vier harmonische Punkte bildet, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem und demselben Kegelschnitte, welcher durch die drei anderen Punkte B, B', B'' und ausserdem, wenn sie existiren, durch diejenigen zwei Punkte geht, in welchen jene Gerade von zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Endlich noch eine Uebertragung des Paskalschen Satzes: In der Ebene $\mathfrak{E}$ seien drei Punkte B, B', B'' und eine Gerade A mit sechs beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in bestimmter Ordnung gegeben; durch je zwei dieser Punkte, welche unmittelbar aufeinander folgen, und jedesmal durch die drei Punkte B, B', B'' sei ein Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte $[\mathfrak{ab}]$, $[\mathfrak{bc}]$, $[\mathfrak{cd}]$, $[\mathfrak{de}]$, $[\mathfrak{ef}]$, $[\mathfrak{fa}]$ gelegt, und es seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die vierten Punkte, welche resp. $[\mathfrak{ab}]$ und $[\mathfrak{de}]$, $[\mathfrak{bc}]$ und $[\mathfrak{ef}]$, $[\mathfrak{cd}]$ und $[\mathfrak{fa}]$ gemein haben. Ist nun eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ mit $\mathfrak{E}$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' verwandt, so entspricht der Geraden A ein Kegelschnitt $[A_1]$ mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$; jenen sechs Kegelschnitten die gleichnamigen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1\mathfrak{a}_1$, und den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Durchschnitte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{a}_1$. Bekanntlich aber liegen diese drei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ in einer

Geraden S_1; also liegen auch die drei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in einem Kegelschnitte $[S]$, welcher durch B, B', B'' geht.

6) Sind auf einer Geraden sechs Punkte in bestimmter Ordnung und ausserdem irgend drei Punkte in der Ebene gegeben, und legt man durch diese drei letzteren und jedesmal durch zwei von jenen sechs Punkten, welche unmittelbar auf einander folgen, und insbesondere auch durch den ersten und letzten, einen Kegelschnitt, im Ganzen also sechs Kegelschnitte, so liegen sechs Punkte, nämlich jene drei Punkte der Ebene und diejenigen drei, in welchen der erste und vierte, der zweite und fünfte, der dritte und sechste Kegelschnitt von Neuem sich schneiden, auf einem und demselben Kegelschnitte.

§. 8.

Eigenschaften der höheren Curven.

Man versteht unter einer Curve der n^{ten} Ordnung ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Punkte, welches mit einer beliebigen Geraden im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat; eine jede Gerade, in welcher zwei stetig auf einander folgende Punkte eines solchen Systems sich vereinigen, heisst eine Tangente desselben. Andererseits versteht man unter einer Curve der n^{ten} Klasse ein jedes ebene System stetig aufeinander folgender Geraden, welches mit einem beliebigen Punkte im Allgemeinen und höchstens n Gerade gemein hat; ein jeder Punkt, von welchem zwei stetig auf einander folgende Gerade eines solchen Systems, die zusammenfallen, ausgehen, heisst ein Punkt desselben.

Es sei nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve $\mathfrak{C}$ der n^{ten} Ordnung gegeben, und es sei $\mathfrak{C}_1$ das derselben entsprechende System von Punkten der verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$; so entsprechen den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit einer der Hauptlinien P, P', P'' gemein hat, ebensoviele Punkte von $\mathfrak{C}_1$, welche aber in dem zug. Hauptpunkte B_1, B_1', B_1'' sich vereinigen. Das System $\mathfrak{C}_1$ besitzt also in jedem der drei Hauptpunkte einen n-fachen Punkt, d. h. einen Punkt, in welchem n unstetig aufeinander folgende Punkte sich vereinigen. Geht aber $\mathfrak{C}$ selber mehrmals durch einen Hauptpunkt, z. B. um sogleich jetzt der Betrachtung den höchsten Grad von Allgemeinheit zu geben, $p$mal durch B, $q$mal durch B' und $r$mal durch B'', so hat $\mathfrak{C}$ mit P nur $n-(q+r)$, mit P' nur $n-(p+r)$ und mit P'' nur $n-(p+q)$ Punkte ausser den Punkten B, B', B'' gemein, und folglich besitzt $\mathfrak{C}_1$ in B_1 nur einen $(n-(q+r))$fachen, in B_1' nur einen $(n-(p+r))$fachen und in B_1'' nur einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Es sei A_1 irgend eine Gerade in $\mathfrak{E}_1$; so entspricht derselben in $\mathfrak{E}$ ein Kegelschnitt $[A]$, welcher durch die Punkte B, B', B'' geht, und dieser möge mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen m Punkte gemein haben, indem wir mit m irgend eine unbekannte, späterhin zu er-

Digitized by Google

mittelnde, ganze Zahl bezeichnen. Da nun derselbe mit $\mathfrak{C}$ bereits $p+q+r$ Punkte gemein hat, welche in den Hauptpunkten liegen, so sind der übrigen noch $m-(p+q+r)$. Diese letztere Anzahl von Punkten hat also auch die Gerade A_1 mit dem Systeme $\mathfrak{C}_1$ gemein, und zwar nicht mehr, weil jenen $p+q+r$ Punkten nur Punkte der Hauptlinien entsprechen, welche, da A_1 beliebig ist, nicht eben Durchschnitte von A_1 und $\mathfrak{C}_1$ sein müssen. Geht $\mathfrak{C}$ durch keinen Hauptpunkt, so ist $m-(p+q+r)=m$. Hieraus folgt zunächst:

1) Einer jeden Curve von bestimmter Ordnung entspricht wiederum eine Curve von bestimmter Ordnung, und diese besitzt, wenn die Ordnung der ersteren $=n$, im Allgemeinen in jedem der Hauptpunkte einen $n$fachen Punkt. Indessen wird die Ordnung der letzteren um $p+q+r$ Einheiten vermindert, wenn die erstere in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt besitzt, und zugleich besitzt dann jene in den Hauptpunkten nur einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt.

Offenbar ist die Zahl m irgend eine bestimmte Funktion von n, d. h.

$$m=F_{(n)}.$$

Aus demselben Grunde aber, weshalb einer Curve der $n$ten Ordnung mit einem p-, einem q- und einem $r$fachen Punkte, die in den Hauptpunkten liegen, eine Curve von der $(F_{(n)}-(p+q+r))$ten Ordnung entspricht, wird auch einer Curve der $k$ten Ordnung, welche in den Hauptpunkten einen $(n-(q+r))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(p+q))$fachen Punkt besitzt, eine Curve entsprechen müssen, deren Ordnung $=F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))$ ist. In diesem Falle befindet sich die Curve $\mathfrak{C}_1$, wenn $k=m-(p+q+r)$, und derselben entspricht nothwendig die Curve $\mathfrak{C}$, deren Ordnung $=n$; also ist

$F_{(k)}-(3n-2(p+q+r))=n$, oder weil $p+q+r=m-k$ ist:

$$F_{(k)}+2(m-k)=4n.$$

Setzt man

$$p=q=r=0, \text{ also } k=m,$$

so ist

$$F_{(m)}=4n, \text{ also auch}$$
$$F_{(k)}+2(m-k)=F_{(m)} \text{ oder}$$
$$F_{(k)}-2k=F_{(m)}-2m.$$

Die Zahl m hängt nur von n ab; ändert man also nur den Werth der Summe $p+q+r$, so bleibt $F_{(m)}-2m$ unverändert; folglich, wenn $p+q+r=m-1$ oder $k=1$ gesetzt wird, hat man

$$F_{(m)}-2m=F_{(1)}-2.$$

$F_{(1)}$ aber bedeutet die Zahl der Punkte, welche ein Kegelschnitt mit einer Curve der 1sten Ordnung, d. h. mit einer Geraden gemein hat, und diese Zahl ist $=2$; also ist

$$F_{(m)} = 2m \text{ und ebenso}$$
$$F_{(n)} = 2n.$$

Hieraus folgt zunächst:

2) Ein Kegelschnitt hat mit einer Curve der $n$ten Ordnung im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte gemein. Ferner:

3) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $2n$ten Ordnung.

Auf ähnliche Weise wie wir zu diesen Sätzen gelangt sind, d. h. ohne die Theorie der höheren Gleichungen in Anspruch zu nehmen, lassen sich noch andere Eigenschaften der höheren Curven ableiten, welche sonst dieser Theorie ausschliesslich anzugehören scheinen. Die folgenden §§. liefern einige Beispiele.

§. 9.

Anzahl der Durchschnittspunkte zweier Curven.

Die Anzahl der gegenseitigen Durchschnittspunkte zweier Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung ist offenbar eine bestimmte Funktion der Zahlen m und n, also $= F_{(m,n)}$. Es seien nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Curven M und N, die eine von der $m$ten, die andere von der $n$ten Ordnung gegeben, und zwar habe die eine einen $(m-1)$fachen Punkt B, die andere einen $(n-1)$fachen Punkt B', eine Annahme, welche unserem Zwecke, die Zahl $F_{(m,n)}$ zu ermitteln, durchaus nicht hinderlich sein wird. Wählt man nun B, B' und irgend einen dritten Punkt B'', welcher keiner der beiden Curven angehört, zu Hauptpunkten von $\mathfrak{E}$, so entspricht der Curve M in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve M_1, deren Ordnung $= 2m-(m-1) = m+1$, und der Curve N eine Curve N_1, deren Ordnung $= n+1$ ist; die Anzahl der Durchschnittspunkte beider ist also $= F_{(m+1,n+1)}$. M_1 besitzt in B_1 einen $m$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt, und N_1 besitzt in B_1' einen $n$fachen, in B_1 und B_1'' einen einfachen Punkt; also haben beide Curven in B_1 m Punkte, in B_1' n Punkte und in B_1'' einen Punkt gemein; und sie besitzen folglich ausser diesen Punkten nur noch $F_{(m+1,n+1)}-(m+n+1)$ gemeinschaftliche Punkte, welche allein den Durchschnitten von M, N entsprechen können. Die Anzahl der letzteren aber ist $F_{(m,n)}$; also ist

$$F_{(m+1,n+1)} - (m+n+1) = F_{(m,n)}$$

oder

$$F_{(m+1,n+1)} - F_{(m,n)} = m+n+1.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m+1$, $m+2$.... $m+p-m$ statt m

Digitized by Google

und $n+1$, $n+2$.... $n+q-n$ statt n, wo $p-q=m-n$ ist, so erhält man die neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_{(m+2,n+2)} - F_{(m+1,n+1)} &= m+n+3, \\ F_{(m+3,n+3)} - F_{(m+2,n+2)} &= m+n+5; \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ F_{(p,q)} - F_{(p-1,q-1)} &= m+n+2(p-m)-1. \end{aligned}$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen und der ersten erhält man nun:

$$F_{(p,q)} - F_{(m,n)} = (p-m)(m+n) + (p-m)(p-m) = (p-m)(p+n).$$

Setzt man hier $n=1$, also $m=p-q+1$, so entsteht:

$$F_{(p,q)} - F_{(p-q+1,1)} = (q-1)(p+1).$$

Aber $F_{(p-q+1,1)}$ ist die Anzahl der Durchschnitte einer **Geraden** mit einer Curve der $(p-q+1)$ten Ordnung, d. h. $=p-q+1$; folglich ist

$$F_{(p,q)} = p-q+1+(q-1)(p+1) = pq,$$

und

$$F_{(m,n)} = m.n.$$

Zwei Curven der $m$ten und der $n$ten Ordnung haben im Allgemeinen und höchstens $m.n$ Punkte gemein.

§. 10.

Anzahl der eine Curve bestimmenden Punkte.

Es bedeute $F_{(n)}$ die Anzahl der Punkte, welche im Allgemeinen eine Curve der $n$ten Ordnung vollkommen bestimmen. Befindet sich unter den **gegebenen** Punkten der Curve ein $p$facher Punkt, so sei $f_{(p)}$ die Anzahl der Punkte, welche durch diesen allein vertreten werden, indem offenbar diese Zahl bloss von p und nicht auch zugleich von der Ordnung der Curve abhängt. Denkt man sich nun in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung mittels eines $p$fachen Punktes B und einer Anzahl $F_{(n)}-f_{(p)}$ einfacher Punkte gegeben, und nimmt man B zum Hauptpunkte, und irgend zwei der Curve nicht angehörige Punkte zu den beiden anderen Hauptpunkten, so entspricht derselben in der anderen Ebene eine Curve der $(2n-p)$ten Ordnung, welche in dem einen Hauptpunkte einen $n$fachen, und in jedem der beiden anderen einen $(n-p)$fachen Punkt besitzt. Es sind also von dieser Curve im Ganzen

$$f_{(n)} + 2 \cdot f_{(n-p)} + F_{(n)} - f_{(p)}$$

Punkte gegeben. Ich behaupte, dass dieselbe durch diese Anzahl von Punkten vollkommen bestimmt sei. Denn liessen sich **meh-**

rere Curven derselben Ordnung durch diese Punkte legen, welche in denselben Hauptpunkten gleichvielfache Punkte besässen, so würden denselben auch mehrere Curven der $n$ten Ordnung entsprechen, welche mit der ursprünglich gegebenen einen $p$fachen Punkt B und ausserdem jene $F_{(n)}-f_{(p)}$ Punkte gemein haben würden. Dies widerspricht aber der Annahme, dass jene erstere Curve durch diese Punkte vollkommen bestimmt sein sollte. Also ist

$$f_{(n)}+2f_{(n-p)}+F_{(n)}-f_{(p)}=F_{(2n-p)},$$

oder

$$F_{(2n-p)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(p)}+2f_{(n-p)}\ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man hier $p=n-1$, so ist

$$F_{(n+1)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-1)}+2f_{(1)},$$

und da durch einen einfachen Punkt nur 1 Punkt gegeben ist.

$$F_{(n+1)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-1)}+2\ldots\ldots \quad (2).$$

Setzt man hier nach einander $n+1$, $n+2$.... $n+q-n$ an die Stelle von n, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&F_{(n+2)}-F_{(n+1)}=f_{(n+1)}-f_{(n)}+2;\\
&F_{(n+3)}-F_{(n+2)}=f_{(n+2)}-f_{(n+1)}+2;\\
&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\
&\underline{F_{(q)}-F_{(q-1)}=f_{(q-1)}-f_{(q-2)}+2;}\ \text{also durch Addition}\\
&F_{(q)}-F_{(n)}=f_{(q-1)}-f_{(n-1)}+2(q-n)\ldots\ldots \quad (3).
\end{aligned}$$

Hieraus wird für $q=1$, da die Gerade durch 2 Punkte bestimmt, und ein Punkt, durch welchen die Curve 0mal geht, auch für 0 gegebene Punkte zu rechnen ist:

$$F_{(n)}-f_{(n-1)}=2n\ldots\ldots \quad (4);$$

dies heisst:

1) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist vollkommen bestimmt, sobald ein $(n-1)$facher Punkt und ausserdem noch $2n$ Punte derselben beliebig gegeben sind.

Setzt man ferner in (3) $q=n+2$, und in (1) $p=n-2$, so erhält man:

$$F_{(n+2)}-F_{(n)}=f_{(n+1)}-f_{(n-1)}+4\ldots\ldots \quad (5).$$
$$F_{(n+2)}-F_{(n)}=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2\cdot f_{(2)}\ldots\ldots \quad (6).$$

also auch

$$f_{(n+1)}-f_{(n-1)}+4=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2\cdot f_{(2)};\ \text{oder}$$
$$f_{(n+1)}-f_{(n-}\ =f_{(n)}-f_{(n-2)}+2\cdot f_{(2)}-4\ldots\ldots \quad (7);$$

also

Digitized by Google

$$f_{(n+1)}-f_{(n-1)}=f_{(n)}-f_{(n-2)}+2\cdot f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+3)}-f_{(n+1)}=f_{(n+2)}-f_{(n)}+2\cdot f_{(2)}-4;$$
$$f_{(n+5)}-f_{(n+3)}=f_{(n+4)}-f_{(n+2)}+2\cdot f_{(2)}-4;$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(p)}-f_{(p-2)}=f_{(p-1)}-f_{(p-3)}+2\cdot f_{(2)}-4;$$ durch Addition:
$$f_{(p)}-f_{(n-1)}=f_{(p-1)}-f_{(n-2)}+(p-n+1)(f_{(2)}-2)$$

oder

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}-p\cdot(f_{(2)}-2)=f_{(n-1)}-f_{(n-2)}-(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots. \quad (8).$$

Hier ist, für $n=2$, $f_{(n-1)}=1$, $f_{(n-2)}=0$, also:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2)\ldots. \quad (9);$$

folglich:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=1+(p-1)(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+1)}-f_{(p)}=1+p\cdot(f_{(2)}-2);$$
$$f_{(p+2)}-f_{(p+1)}=1+(p+1)\cdot(f_{(2)}-2);$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f_{(n)}-f_{(n-1)}=1+(n-1)(f_{(2)}-2);$$ durch Addition:
$$f_{(n)}-f_{(p-1)}=n-p+1+\tfrac{1}{2}(n+p-2)(n-p+1)(f_{(2)}-2)\ldots. \quad (10);$$

und für $p=1$ oder 2:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)(f_{(2)}-2)\ldots. \quad (11).$$

Folglich ist nach (4):

$$F_{(n)}=f_{(n-1)}+2n=n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}-2)+2n$$
$$=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(f_{(2)}\ldots. \quad (12).$$

Setzt man endlich in der letzten Gleichung $n=0$ und bedenkt, dass eine Curve, welche von jeder beliebigen Geraden in 0 Punkten geschnitten wird, gar keine Punkte enthalten kann und also auch zu ihrer Bestimmung einer Anzahl von 0 Punkten bedarf, so findet man:

$$0=-1+f_{(2)}-2 \text{ oder } f_{(2)}=3\ldots. \quad (13);$$

folglich:

$$f_{(n)}=n+\tfrac{1}{2}n(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n+1)\ldots. \quad (14)$$

und

$$F_{(n)}=3n-1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)=\tfrac{1}{2}n(n+3)\ldots. \quad (15)$$

2) Wenn von einer Curve ein $n$facher Punkt gegeben ist, so ist derselbe für $\frac{1}{2}n(n+1)$ gegebene Punkte zu rechnen.

In der That: denkt man sich n Punkte einer Curve gegeben und fügt die Bestimmung hinzu, dass dieselben alle in einen einzigen zusammenfallen sollen, so sind ausser diesen n Punkten auch noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte gegeben; denn durch diese n Punkte

gehen n Zweige der Curve, und diese würden sich, sowie n Gerade, in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten schneiden, indem man von je zwei Zweigen nur einen einzigen Durchschnittspunkt nimmt, weil sie sich sonst bei der Vereinigung zweier Durchschnittspunkte in jenem $n$fachen Punkte berühren würden. Auch kann ein solcher Durchschnitt zweier Zweige hier nicht als Doppelpunkt gelten, weil der eine der beiden Punkte desselben immer als einer von jenen n gegebenen und bereits in Rechnung gebrachten Punkten anzusehen ist.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte vollkommen bestimmt.

§. 11.

Die Tangenten in den Hauptpunkten; Rückkehrpunkte und isolirte Punkte.

Kehren wir wieder zu dem allgemeinen Falle des §. 8 zurück und denken uns eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung, welche in B einen $p$fachen, in B' einen $q$fachen, in B'' einen $r$fachen Punkt besitzt. Es sei Z_1 ein Strahl von B_1, welcher in diesem Punkte B_1 einen der Zweige der entsprechenden Curve $\mathfrak{C}_1$ berührt, und es sei Z der ihm entsprechende Strahl von B: da B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so hat Z_1 in diesem Punkte $n-(q+r)+1$ Punkte, und ausserdem noch $2n-(p+q+r)-(n-(q+r)+1)=n-p-1$ Punkte, welche beliebig liegen, mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Diesen letzteren entspricht eine gleiche Anzahl von Punkten, welche der Strahl Z mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, und die weder in den Punkt B noch in die Gerade P fallen. Aber Z hat mit $\mathfrak{C}$ $n-p$ Punkte gemein, welche nicht in B fallen; also fällt einer dieser $n-p$ Punkte in die Gerade P. Folglich entsprechen den Tangenten, welche die $n-(q+r)$ Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ in B_1 berühren, diejenigen Strahlen von B, welche nach den $n-(q+r)$ Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P gerichtet sind, und umgekehrt.

1) Denjenigen Strahlen eines Hauptpunktes, welche nach den Durchschnitten einer Curve und der Gegenseite des Hauptdreiecks gehen, entsprechen ebensoviele Strahlen des zugeordneten Hauptpunktes, welche die verschiedenen Zweige der entsprechenden Curve im Hauptpunkte berühren; und umgekehrt.

Fallen zwei oder mehrere jener Durchschnittspunkte von $\mathfrak{C}$ und P in einen einzigen zusammen, d. h. hat $\mathfrak{C}$ mit P eine zwei oder mehrpunktige Berührung, so fallen auch andererseits zwei oder mehrere jener Tangenten zusammen, d. h. zwei oder mehrere Zweige der Curve $\mathfrak{C}_1$ haben in B_1 eine gemeinschaftliche Tangente. In diesem Falle heisst der Punkt B_1 ein Rückkehrpunkt von $\mathfrak{C}_1$, und zwar der $k$ten Klasse, wenn sich in demselben k Zweige der Curve berühren. Auch wird ein $n$facher Punkt einer Curve der $(n+1)$ten Ordnung, in welchem sich alle n Zweige berühren, κατ' ἐξοχήν ein Rückkehrpunkt der Curve genannt. Hat die Gerade P mit $\mathfrak{C}$ ein oder mehrere Punktenpaare weniger gemein, als die Ordnung der Curve fordert, so fallen auch in $\mathfrak{C}_1$ ebensoviele Tangentenpaare hinweg, und da letzteres nur denkbar

Digitized by Google

ist, wenn auf den betreffenden Zweigen von $\mathfrak{C}_1$ kein stetiger Uebergang vom Punkte B_1 zu anderen Punkten dieser Zweige stattfindet, so erscheint der Punkt B_1 als ein von diesen Zweigen abgesonderter oder isolirter Punkt der Curve.

2) Einem jeden Punkte, in welchem eine Curve eine Hauptlinie der einen Ebene berührt, entspricht ein Rückkehrpunkt der geometrisch verwandten Curve; und zwar berühren sich in demselben ebensoviele Zweige der Curve, soviele Punkte der ersten Curve in jenem Berührungspunkte zusammenfallen.

3) Wird eine Hauptlinie in zwei oder mehreren Punkten weniger geschnitten, als die Ordnung der Curve erfordert, so hat die verwandte Curve im zugeordneten Hauptpunkte einen zwei oder mehreren Zweigen angehörigen isolirten Punkt.

4) Ein und derselbe Punkt einer Curve kann zu gleicher Zeit für einige Zweige derselben ein gewöhnlicher vielfacher, für andere ein Rückkehrpunkt und wieder für andere ein isolirter Punkt sein.

Es gehe von dem $p$fachen Punkte B der Curve $\mathfrak{C}$ irgend eine Tangente t an $\mathfrak{C}$, deren Berührungspunkt t nicht in B falle; so hat t ausser den Punkten B und t noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein; und ist t_1 der entsprechende Punkt von t, so hat die entsprechende Gerade t_1 ausser den Punkten B_1 und t_1 auch nur noch $n-p-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Da nun die Ordnung der letzteren $=2n-(p+q+r)$ und B_1 ein $(n-(q+r))$facher Punkt ist, so muss der Punkt t_1 eine Anzahl von $2n-(p+q+r)-(n-(q+r))-(n-p-2)=2$ Punkten der Curve vertreten, d. h. t_1 berührt $\mathfrak{C}_1$ in t_1.

5) Einer jeden Tangente der einen Curve, welche durch einen Hauptpunkt geht, deren Berührungspunkt aber nicht in diesen letzteren fällt, entspricht wiederum eine Tangente der verwandten Curve, welche durch den zugeordneten Hauptpunkt geht; und zwar sind die Berührungspunkte beider Tangenten entsprechende Punkte.

Dagegen wird jeder Tangente A von $\mathfrak{C}$, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, also ausser dem Berührungspunkte a noch $n-2$ Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, ein Kegelschnitt $[A_1]$ entsprechen; derselbe hat überhaupt $2(2n-(p+q+r))$ Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein, von denen eine Anzahl von $n-(p+q)+n-(q+r)+n-(p+r)=3n-2(p+q+r)$ Punkten nach B_1, B_1', B_1'' gehören; zieht man diese und die jenen $n-2$ Punkten entsprechenden Punkte von den ersteren ab, so bleiben $4n-2(p+q+r)-(3n-2(p+q+r))-(n-2)=2$ Punkte, welche also mit dem dem a entsprechenden Punkte a_1 zusammenfallen; d. h. der Kegelschnitt $[A_1]$ berührt $\mathfrak{C}_1$ in a_1.

6) Jeder Tangente der einen Curve, welche kein Strahl eines Hauptpunktes ist, entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Hauptpunkte geht und die verwandte Curve in dem, dem Berührungspunkte der ersteren entsprechenden Punkte berührt.

§. 12.

Bestimmung der Klassenzahl einer Curve der $n$ten Ordnung.

Durch den 5ten Satz des §. 11. sind wir nun in den Stand gesetzt, die Frage nach der Klasse einer Curve von gegebener Ordnung — eine Frage, welche vor einigen Decennien einen in der Geschichte der Mathematik fast unerhörten Streit hervorrief — auf exakte Weise und ohne Hülfe der höheren Gleichungen zu beantworten.

Da die Tangenten einer Curve der $n$ten Ordnung offenbar stetig aufeinander folgen, so bilden sie eine Curve von einer bestimmten Klasse, welche wir, da sie eine Funktion der Zahl n sein muss, durch $F_{(n)}$ bezeichnen wollen. Denkt man sich nämlich von einem beliebigen Punkte alle diejenigen Geraden gezogen, auf denen sich zwei Punkte einer Curve der $n$ten Ordnung vereinigen, so werden im Allgemeinen alle diese Geraden Tangenten der Curve sein, und die Zahl dieser Tangenten ist es, welche mit $F_{(n)}$ bezeichnet wird. Hat aber jene Curve irgend einen vielfachen Punkt, so vereinigen sich zwar auf derjenigen Geraden, welche nach diesem Punkte geht, auch ein oder mehreremale zwei Punkte der Curve, aber weder diese Punkte, noch auch diese Gerade und die Tangenten der Curve stehen in stetigem Zusammenhange miteinander. Es wird also durch einen vielfachen Punkt die Zahl $F_{(n)}$ um eine gewisse Zahl vermindert.

Für den besonderen Fall, den wir zunächst betrachten werden, lassen wir die Grösse dieser Verminderung ganz unberücksichtigt, indem wir unter $\varphi_{(n)}$ die Anzahl der wirklichen Tangenten verstehen, welche sich von einem beliebigen Punkte an eine Curve der $n$ten Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte ziehen lassen. Es sei $\mathfrak{C}$ diese Curve und B der $(n-1)$fache Punkt derselben, während die beiden anderen Hauptpunkte B', B'' nicht auf der Curve liegen. Die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ ist von der $(n+1)$ten Ordnung und hat in B_1 einen $n$fachen, in B_1' und B_1'' einen einfachen Punkt. Also ist auch die Klasse von $\mathfrak{C}_1$ mit $\varphi_{(n+1)}$ zu bezeichnen. Von einem der Punkte B', B'' gehen an $\mathfrak{C}$ eine Anzahl von $\varphi_{(n)}$ Tangenten, und diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten der $\mathfrak{C}_1$, welche durch den Punkt B_1', B_1'' gehen, aber diesen Punkt nicht zum Berührungspunkte haben. Man kann also vom Punkte B_1' im Ganzen $\varphi_{(n)}+1$ Tangenten an $\mathfrak{C}_1$ legen: folglich werden von einem beliebigen Punkte, der nicht auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, höchstens $\varphi_{(n)}+2$ Tangenten ausgehen, und man hat demnach die folgende Relation:

$$\varphi_{(n+1)} = \varphi_{(n)} + 2.$$

Zu derselben Relation würde man übrigens auch gelangt sein, wenn man, statt des Punktes B', den $(n-1)$fachen Punkt B gewählt hätte. Denn ausser den $n-1$ Tangenten, welche $\mathfrak{C}$ in B berühren, und deren Anzahl für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen ist, gehen von dem Punkte B noch $\varphi_{(n)}-2(n-1)$ Tangenten an $\mathfrak{C}$; diesen entsprechen eine gleiche Anzahl Tangenten von $\mathfrak{C}_1$.

Digitized by Google

welche die Curve nicht in B_1 berühren; hierzu kommen noch n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und die für einen beliebigen Punkt doppelt zu rechnen sind; also ist

$$\varphi_{(n+1)} = \varphi_{(n)} - 2(n-1) + 2n = \varphi_{(n)} + 2, \text{ oder}$$

$$\varphi_{(n+1)} - \varphi_{(n)} = 2; \text{ folglich ist auch....} \quad (1)$$

$$\varphi_{(n+2)} - \varphi_{(n+1)} = 2;$$

$$\varphi_{(n+3)} - \varphi_{(n+2)} = 2;$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$\varphi_{(p)} - \varphi_{(p-1)} = 2; \text{ durch Addition wird hieraus:}$$

$$\varphi_{(p)} - \varphi_{(n)} = 2(p-n) \text{ oder}$$

$$\varphi_{(p)} - 2p = \varphi_{(n)} - 2n.... \quad (2).$$

Aber von einem Punkte lassen sich an eine Curve der 1ten Ordnung, die Gerade, keine, und an einen Kegelschnitt, als Curve 2ter Ordnung, nur 2 Tangenten legen, so dass

$$\varphi_{(1)} = 0 \text{ und } \varphi_{(2)} = 2 \text{ ist;}$$

also hat man für $p = 1$ und ebenso auch für $p = 2$:

$$\varphi_{(n)} - 2n = -2 \text{ oder}$$

$$\varphi_{(n)} = 2(n-1).$$

1) Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, mit einem $(n-1)$fachen Punkte, ist zugleich eine Curve der $2(n-1)$ten Klasse.

Corollar. An eine Curve der 3ten Ordnung, mit einem Doppelpunkte, lassen sich von einem beliebigen Punkte aus im Allgemeinen und höchstens 4 Tangenten, und an eine Curve der 4ten Ordnung, mit einem 3fachen Punkte, 6 Tangenten legen.

Um nun die Zahl $F_{(n)}$ für eine Curve der $n$ten Ordnung überhaupt, welche keine vielfachen Punkte oder deren mehrere und von beliebiger Vielfachheit besitzt, bestimmen zu können, gehe die Bemerkung voraus, dass, da eine Verminderung der Zahl $F_{(n)}$ offenbar nur von vielfachen Punkten herrühren, und die Grösse dieser Verminderung nur von der Anzahl der in einem solchen Punkte vereinigten Punkte, und nicht etwa zugleich auch von der Ordnung der Curve abhängen kann, diese Grösse für einen $p$fachen Punkt $= f_{(p)}$, und wenn zugleich ein p-, ein q-, ein $r$facher Punkt u. s. w. vorhanden ist, $= f_{(p)} + f_{(q)} + f_{(r)}$.... gesetzt werden kann, wo $f_{(p)}$ nur als von p und nicht auch von n abhängig gedacht wird.

Es habe nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in B einen $p$fachen Punkt, gehe aber weder durch B' noch durch B''; so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-p)$ten Ordnung, besitzt in B_1 einen $n$fachen, und sowohl in B_1' als B_1'' einen $(n-p)$fachen Punkt. $\mathfrak{C}$ wird in B von p Geraden berührt, welche

Digitized by Google

für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind; also ist die Anzahl der Tangenten, welche ausserdem noch von B an $\mathfrak{C}$ gelegt werden können, und denen allein Tangenten von $\mathfrak{C}_1$ entsprechen, $= F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$. Vom Punkte B_1 gehen an $\mathfrak{C}_1$ n Tangenten, deren Berührungspunkt B_1 ist, und welche für einen beliebigen Punkt der Ebene doppelt zu rechnen sind, und ausserdem noch die jenen $F_{(n)} - f_{(p)} - 2p$ Tangenten entsprechenden; also ist

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 \cdot f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} - 2p + 2n \ldots . \quad (1).$$

Oder aber: Vom Punkte B' gehen an $\mathfrak{C}$ im Ganzen $F_{(n)} - f_{(p)}$ Tangenten, denen eine gleiche Anzahl von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, deren Berührungspunkt B_1' nicht ist. Zu diesen letzteren kommt noch die doppelte Anzahl der Tangenten, deren Berührungspunkt B_1' ist, so ist $F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p)$ die Anzahl sämmtlicher Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte an $\mathfrak{C}_1$ gelegt werden können; also

$$F_{(2n-p)} - f_{(n)} - 2 \cdot f_{(n-p)} = F_{(n)} - f_{(p)} + 2(n-p),$$

eine Relation, welche mit der vorigen identisch ist. Setzt man hier zunächst $p = n-1$, so erhält man, weil $f_{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned}
&F_{(n+1)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-1)} + 2; \text{ folglich } \ldots . \quad (2).\\
&F_{(n+2)} - F_{(n+1)} = f_{(n+1)} - f_{(n)} + 2;\\
&F_{(n+3)} - F_{(n+2)} = f_{(n+2)} - f_{(n+1)} + 2;\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&F_{(p)} - F_{(p-1)} = f_{(p-1)} - f_{(p-2)} + 2; \text{ durch Addition:}\\
&F_{(p)} - F_{(n)} = f_{(p-1)} - f_{(n-1)} + 2(p-n) \ldots . \quad (3).
\end{aligned}$$

Setzt man hier $p = n+2$, so wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n+1)} - f_{(n-1)} + 4 \ldots . \quad (4);$$

und für $p = 1$ oder 2 erhält man, weil $F_{(1)} = 0$, $F_{(2)} = 2$, $f_{(0)} = 0$, $f_{(1)} = 0$ ist:

$$F_{(n)} - f_{(n-1)} = 2(n-1) \ldots . \quad (5).$$

Ferner wird aus (1), wenn $p = n-2$ gesetzt wird:

$$F_{(n+2)} - F_{(n)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 \cdot f_{(2)} + 4 \ldots . \quad (6);$$

also durch Verbindung von (4) und (6):

$$\begin{aligned}
&f_{(n+1)} - f_{(n-1)} = f_{(n)} - f_{(n-2)} + 2 \cdot f_{(2)}; \text{ also auch } \ldots . \quad (7)\\
&f_{(n+3)} - f_{(n+1)} = f_{(n+2)} - f_{(n)} + 2 \cdot f_{(2)};\\
&f_{(n+5)} - f_{(n+3)} = f_{(n+4)} - f_{(n+2)} + 2 \cdot f_{(2)};\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&f_{(p)} - f_{(p-2)} = f_{(p-1)} - f_{(p-3)} + 2 \cdot f_{(2)}; \text{ durch Addition:}\\
&f_{(p)} - f_{(n-1)} = f_{(p-1)} - f_{(n-2)} + (p-n+1) \cdot f_{(2)}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

oder:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}-p\cdot f_{(2)}=f_{(n-1)}-f_{(n-2)}-(n-1)\cdot f_{(2)}\ldots\ (8):$$

also für $n=2$:

$$f_{(p)}-f_{(p-1)}=(p-1)\cdot f_{(2)}.\quad \text{Demnach ist....}\quad (9)$$

$$f_{(p+1)}-f_{(p)}=p\cdot f_{(2)}:$$

$$f_{(p+2)}-f_{(p+1)}=(p+1)\cdot f_{(2)}:$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$f_{(n)}-f_{(n-1)}=(n-1)\cdot f_{(2)};\quad \text{durch Addition:}$$

$$f_{(n)}-f_{(p)}=\tfrac{1}{2}(n-p)(n+p-1)\cdot f_{(2)}\ldots\ (10).$$

Hieraus wird für $p=0$ oder 1:

$$f_{(n)}=\tfrac{1}{2}n(n-1)\cdot f_{(2)}.\quad (11).$$

Aber nach (5) ist:

$$F_{(n)}=f_{(n-1)}+2(n-1)=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)f_{(2)}+2(n-1);$$

folglich ist

$$F_{(n)}=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\cdot f_{(2)}+2(n-1)\ldots\ (12);$$

und da eine Curve der 0ten Ordnung gewiss auch keine Tangenten besitzt, also $F_{(0)}=0$ ist, so ist für $n=0$:

$$f_{(2)}=2\ldots\ (13);$$

und setzt man diesen Werth von $f_{(2)}$ in (11) und (12), so findet sich:

$$f_{(n)}=n(n-1)\ldots\ (14)$$

und ebenso auch:

$$F_{(n)}=n(n-1)\ldots\ (15).$$

2) Durch einen jeden $p$fachen Punkt, welchen eine Curve der $n$ten Ordnung besitzt, wird die Klassenzahl derselben um $p(p-1)$ Einheiten erniedrigt.

3) Eine Curve der $n$ten Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens zugleich eine Curve der $n(n-1)$ten Klasse.

Corollar. Eine Curve der 3ten, 4ten, 5ten.... Ordnung ist im Allgemeinen und höchstens eine Curve der 6ten, 12ten, 20ten.... Klasse.

Besitzt nun eine Curve $\mathfrak{C}$ der $n$ten Ordnung in den Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt, sonst aber keinen vielfachen Punkt, so ist $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q+r))$ten Ordnung und besitzt auch bloss in den Hauptpunkten einen $(n-(p+q))$-, einen $(n-(p+r))$- und einen $(n-(q+r))$fachen Punkt; also ist die Klasse von $\mathfrak{C}_1=$

$$\begin{aligned}&(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)-1)-(n-(p+q))(n-(p+q)-1)\\&-(n-(p+r))(n-(p+r)-1)-(n-(q+r))(n-(q+r)-1)\\&=n(n+1)-p(p+1)-q(q+1)-r(r+1).\end{aligned}$$

Und auch umgekehrt, indem $\mathfrak{C}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{C}$ gesetzt wird, findet sich die Klasse von $\mathfrak{C}$ =

$$(2n-(p+q+r))(2n-(p+q+r)+1)-(n-(p+q))(n-(p+q)+1)$$
$$-(n-(p+r))(n-(p+r)+1)-(n-(q+r))(n-(q+r)+1)$$
$$=n(n-1)-p(p-1)-q(q-1)-r(r-1),$$

wie es von vornherein zu erwarten stand.

4) Einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht im Allgemeinen und höchstens eine Curve der $n(n+1)$ten Klasse.

Endlich, da jedem vielfachen Punkte von $\mathfrak{C}$, der nicht Hauptpunkt ist, ein ebensovielfacher Punkt von $\mathfrak{C}_1$ entspricht, so folgt:

5) Besitzt eine Curve der $n$ten Ordnung in den drei Hauptpunkten einen p-, einen q- und einen $r$fachen Punkt und ausserdem noch einen beliebigen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt, so ist die ihr entsprechende Curve von derselben Klasse, als eine Curve der $(n+1)$ten Ordnung, welche einen $(p+1)$-, einen $(q+1)$-, einen $(r+1)$- und einen π-, $\varkappa$-, ϱ-...fachen Punkt besitzt.

§. 13.

Konstruktion einiger Curven höherer Ordnung mittels des blossen Lineals, und Uebertragung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte auf höhere Curven.

Aufgabe.

Eine Curve der dritten Ordnung mittels des blossen Lineals punktweise zu zeichnen, sobald ein Doppelpunkt B_1'' und ausserdem irgend sechs Punkte B_1, B_1', $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ derselben beliebig gegeben sind.

Auflösung.

Man verbinde den Doppelpunkt B_1'' (Taf. II. Fig. 2.) mit zweien der übrigen Punkte, z. B. mit B_1 und B_1', durch die Geraden P_1', P_1, und diese Punkte mit sich selber durch die Gerade P_1'', ziehe zwei beliebige Gerade A, A', welche die P_1'' resp. in $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1'$ schneiden, und von denen die eine, A, der P_1' in $\mathfrak{p}$, die andere, A', der P_1 in $\mathfrak{p}'$ begegnet; verbinde die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ mit einander durch die Gerade P'', nehme auf P'' irgend zwei Punkte B, B' an und verbinde B mit $\mathfrak{p}_1$ durch P', B' mit $\mathfrak{p}_1'$ durch P. Der Durchschnitt von P, P' heisse B''. Nun denke man sich zwei perspektivische Strahlbüschel B, B_1, deren persp. Durchschnitt A, und wieder zwei andere, B', B_1', deren persp. Durchschnitt A' ist, und zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Bezug auf diese zwei Paar Strahlbüschel geometrisch verwandt; bestimme in $\mathfrak{E}$ die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und lege durch die fünf Punkte B'', $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, d. h. man suche beliebig viele andere Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... desselben, was sich auf mehrfache Weise durch blosses Linienziehen bewirken lässt. Endlich bestimme man in $\mathfrak{E}_1$ die den Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$.... entsprechen

Digitized by Google

den Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$....; so gehören sämmtliche Punkte B_1'', B_1, B_1', $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$...., und zwar ersterer als Doppelpunkt, einer und derselben Curve dritter Ordnung an.

Beweis.

Da der Verbindungslinie P'' der Punkte B, B', insofern sie dem Strahlbüschel B oder B' angehört, in den Strahlbüscheln B_1, B_1' die Gerade P_1' oder P_1 entspricht, und da ebenso der Geraden P_1'' in den Strahlbüscheln B, B' die Geraden P', P entsprechen, so sind die Punktenpaare B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' die zugeordneten Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$. Und da nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ im Allgemeinen nur durch einen Hauptpunkt B'' geht, so ist die demselben entsprechende Curve von der $2.2-1=3$ten Ordnung und besitzt in B_1'' einen 2fachen und in jedem der Punkte B_1, B_1' einen $2-1=1$fachen Punkt (§. 8. 1.).

Sind überhaupt in einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ von einer Curve $\mathfrak{C}_1$ der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt B_1'' besitzt, dieser Punkt B_1'' und ausserdem $2n$ Punkte beliebig gegeben, von denen irgend zwei B_1, B_1' heissen mögen, und bestimmt man die Punkte B, B', B'' ebenso wie in der obigen Aufgabe, und noch die den übrigen $2n-2$ gegebenen Punkten entsprechenden Punkte, so ist nach §. 10. 1. durch diese $2n-2$ Punkte und den Punkt B'' eine Curve der $(n-1)$ten Ordnung, welche B'' zum $(n-2)$fachen Punkte hat, bestimmt, und ist die der $\mathfrak{C}_1$ entsprechende Curve $\mathfrak{C}$. Man würde also jene Curve $\mathfrak{C}_1$ mit dem blossen Lineal zeichnen können, wenn die Curve $\mathfrak{C}$ gezeichnet vorläge. Nun aber lässt sich die der 2ten Ordnung, also auch die der 3ten mit einem Doppelpunkte, die der 4ten, 5ten, 6ten.... $n$ten Ordnung mit einem 3-, 4-, 5-.... $(n-1)$fachen Punkte mittels des blossen Lineals zeichnen. (Vgl. Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques par M. J. V. Poncelet. art. 204. in Crelle's Journal. Bd. 8. Hft. 2.).

1) Eine jede Curve der $n$ten Ordnung, welche einen $(n-1)$fachen Punkt besitzt, lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald dieser vielfache Punkt und ausserdem $2n$ Punkte der Curve beliebig gegeben sind.

Es seien in Taf. II. Fig. 2. durch den (beliebigen) Punkt B_1 der Curve 3. O. $\mathfrak{K}_1$ die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... gelegt, welche den (ebenfalls beliebigen) Strahl P_1 des Doppelpunktes B_1'' in den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... und die Curve selbst noch in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_1$, a_1; $\mathfrak{b}_1$, b_1; $\mathfrak{c}_1$, c_1; $\mathfrak{d}_1$, d_1.... schneiden; und es sei auf jeder noch ein Punkt α_1', β_1', γ_1', δ_1'.... so bestimmt, dass α_1, α_1' mit $\mathfrak{a}_1$, a_1; β_1, β_1' mit $\mathfrak{b}_1$, b_1 u. s. f. harmonisch sind. Dann sind nach §. 6. 4. die je vier solchen Punkten entsprechenden Punkte ebenfalls harmonisch, und da allen Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... ein und derselbe Punkt B entspricht, und die entprechenden von $\mathfrak{a}_1$, a_1; $\mathfrak{b}_1$, b_1.... einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ angehören, so liegen, wie bekannt, alle Punkte, welche den α_1', β_1' γ_1' δ_1'.... entsprechen, auf einer Geraden, nämlich der harmonischen Polare von B für $\mathfrak{K}$, und folglich die Punkte α_1', β_1', γ_1', δ_1'.. selber auf einem Kegelschnitte, welcher durch B_1, B_1', B_1'' geht u. s. w.

2) Legt man durch den Doppelpunkt einer Curve dritter Ordnung irgend eine Gerade P_1, und durch irgend einen anderen Punkt B_1 derselben beliebig viele Gerade a_1, b_1, c_1, d_1.... und bestimmt auf jeder denjenigen Punkt, welcher zu den beiden neuen Punkten und zu dem der Geraden P_1 angehörigen der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese neuen Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher der Curve im Doppelpunkte, im Punkte B_1, in demjenigen Punkte, in welchem die Gerade P_1 dieselbe von Neuem schneidet, und ausserdem, wenn sie vorhanden sind, in den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche von B_1 an dieselbe gehen, begegnet.

Den Strahlenpaaren, welche den Doppelpunkt B_1'' mit jenen Durchschnittspunkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$.... verbinden, entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Strahlenpaare, welche die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$.... des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ mit dem Punkte B'' verbinden; diese Strahlenpaare aber bilden, weil die Linien $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$.... durch einerlei Punkt B gehen, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 3. 3. eine Involution von Strahlen; also hat man nach §. 6. 1. den folgenden Satz:

3) Legt man durch irgend einen Punkt einer Curve dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzt, beliebig viele Gerade, so bilden die Strahlenpaare, welche den Doppelpunkt mit den neuen Durchschnitten dieser Geraden und der Curve verbinden, eine Involution von Strahlen, und zwar gehen die Hauptstrahlen dieser Involution, wenn sie vorhanden sind, nach den Berührungspunkten der beiden von jenem Punkte ausgehenden Tangenten.

Durch irgend einen Punkt p_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ und durch die drei Punkte B_1, B_1', B_1'' denke man sich beliebig viele Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$.... gelegt; so wird im Allg. ein jeder derselben die Curve $\mathfrak{K}_1$ in noch zwei Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$; $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1'$; $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1'$.... schneiden, und auf jedem wird es einen Punkt α_1, β_1, γ_1, δ_1...., geben, welcher mit p_1, als zugeordnetem Punkte, und mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$.... vier harmonische Punkte des betreffenden Kegelschnittes bildet. Jenen Kegelschnitten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$... entsprechen in $\mathfrak{E}$ ebensoviele Gerade, welche durch einerlei Punkt p gehen, den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$; $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1'$.... die Durchschnitte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. und den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... solche Punkte, welche mit p, als zug. Punkte, und mit diesen Durchschnitten vier harmonische Punkte bilden, also sämmtlich der harm. Polare des Punktes p für $\mathfrak{K}$ angehören. Folglich liegen auch die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1.... alle auf einem Kegelschnitte u. s. w.

4) Haben eine Schaar von Kegelschnitten mit einer Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt und zwei einfache Punkte und unter sich noch einen vierten Punkt p_1 gemein, und bestimmt man auf einem jeden dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er noch ausserdem die Curve schneidet, und zu dem

Digitized by Google

Punkte p_1, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher mit jener Schaar und der Curve die nämlichen drei Punkte gemein hat und die letztere in denjenigen zwei Punkten schneidet, in welchen sie von zwei Kegelschnitten jener Schaar berührt wird.

Sind von einer Curve der 4ten Ordnung, welche drei Doppelpunkte besitzt, ausser diesen letzteren noch $\frac{4(4+3)}{2} - 3\frac{2(2+1)}{2} = 5$ einfache Punkte gegeben, so ist dieselbe, und mit ihr zugleich, als die ihr entsprechende Curve, ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt: da nun dieser mittels des Lineals sich zeichnen lässt, so folgt:

5) Eine Curve der vierten Ordnung mit drei Doppelpunkten lässt sich punktweise mittels des blossen Lineals zeichnen, sobald diese drei Doppelpunkte und ausserdem irgend fünf Punkte derselben gegeben sind.

Die Ausführung sei dem Leser überlassen. Sind die drei Doppelpunkte insbesondere drei Rückkehrpunkte, so entspricht nach §. 11. 2. der Curve ein Kegelschnitt, welcher die drei Hauptlinien der Ebene berührt, und den drei Tangenten in den Rückkehrpunkten entsprechen diejenigen Geraden, welche die Berührungspunkte des Kegelschnittes mit den Gegenecken des Hauptdreiecks verbinden; solche drei Geraden aber, wie bekannt, schneiden einander in einerlei Punkte; also:

6) Die drei Tangenten in drei Rückkehrpunkten einer Curve vierter Ordnung gehen durch einen und denselben Punkt.

Ferner erhält man auf ähnliche Weise, wie der Satz 2. des §. 13. gefunden wurde, den folgenden:

7) Besitzt eine Curve 4ter Ordnung drei Doppelpunkte, und denkt man sich auf irgend einem Strahle des einen dieser Punkte einen Punkt so bestimmt, dass er zu den beiden neuen Punkten der Curve und zu demjenigen, welcher der Verbindungslinie der beiden anderen Doppelpunkte angehört, der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher durch die drei Doppelpunkte und durch die Berührungspunkte derjenigen zwei Tangenten der Curve geht, welche sich in jenem Doppelpunkte schneiden.

Und wenn statt des ersten Doppelpunktes irgend ein beliebiger Punkt der Ebene gesetzt wird:

8) Besitzt eine Curve vierter Ordnung drei Doppelpunkte, und legt man durch die letzteren und durch einen beliebigen Punkt p der Ebene eine Schaar Kegelschnitte, und bestimmt auf jedem dieser Kegelschnitte zu den beiden Punkten, in welchen er die Curve von Neuem schneidet, und zu dem Punkte p, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einem neuen Kegelschnitte, welcher auch die drei Doppelpunkte enthält u. s. w.

Digitized by Google

Es sei endlich $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt; durch B_1'' gehe eine beliebige Gerade a_1'', welche $\mathfrak{C}_1$ von Neuem in 2 Punkten a_1, a_1' schneidet; durch die Punkte B_1, B_1', B_1'', O_1 sei ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ gelegt, welcher die Gerade a_1'' zum andernmal in b_1 schneidet und mit $\mathfrak{C}_1$ noch einen (einzigen) Punkt J_1 gemein hat. Endlich sei b_1' zu a_1, a_1' und b_1 der vierte harmonische, dem b_1 zugeordnete Punkt. Jetzt denke man sich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ die Punkte B, B', B'' beliebig gewählt, und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der zug. Hauptpunkte B, B_1; B', B_1'; B'', B_1'' geometrisch verwandt; so entspricht der $\mathfrak{C}_1$ eine Curve 3ter Ordnung $\mathfrak{C}$, welche durch den Punkt B'' geht und einen dem O_1 entsprechenden Doppelpunkt O besitzt; dem Strahle a_1'' und den harmonischen Punkten a_1, a_1'; b_1, b_1' entspricht ein Strahl a'' von B'' und vier harmonische Punkte a, a'; b, b'; dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ entspricht eine Gerade $\mathfrak{K}$, welche durch O, den dem J_1 entsprechenden Punkt J der Curve und durch b geht; die Punkte a, a' liegen auf $\mathfrak{C}$, und nach 2. liegen alle Punkte b', welche den verschiedenen Strahlen von B'' angehören, auf einem Kegelschnitte, welcher die Punkte B'', O, J enthält; da nun dieser Kegelschnitt nur durch einen einzigen Hauptpunkt B'' geht, so entspricht ihm in $\mathfrak{E}_1$ eine Curve 3. O., welche in B_1'' einen Doppelpunkt besitzt und einfach durch B_1, B_1' und O_1 hindurch geht. Hieraus folgt:

9) Sind irgend eine Curve 5ter Ordnung, welche einen 3fachen Punkt B_1'' und drei Doppelpunkte B_1, B_1', O_1 besitzt, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, welcher durch diese vier Punkte geht, beliebig gegeben, und denkt man sich auf jedem Strahle jenes Punktes B_1'' zu den beiden Punkten, welche ausserdem noch der Curve 5ter Ordnung, und zu jenem, welcher noch dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ angehört, den vierten harmonischen, dem letzteren zugeordneten Punkt bestimmt, so liegen alle diese vierten Punkte auf einer Curve 3ter Ordnung, welche an der Stelle jenes dreifachen Punktes einen Doppelpunkt besitzt, durch die drei Doppelpunkte der Curve 5ter Ordnung und ausserdem durch denjenigen Punkt, in welchem der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ diese Curve von Neuem schneidet, hindurchgeht.

Besondere Fälle.

§. 14.

Zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

Sind sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als auch B', B_1' projektivisch-gleich, d. h. schliessen je zwei Strahlen a, b des einen denselben spitzen Winkel ein als die entsprechenden Strahlen a_1, b_1 des anderen, so sind auch die von den Hauptlinien P, P'' und P_1'', P_1' einerseits, und die von P, P'' und P_1'', P_1 andererseits eingeschlossenen spitzen Winkel einander gleich. Es sind aber hierbei zwei Fälle denkbar: *a)* Entweder sind die in-

Digitized by Google

neren Winkel B, B' des Hauptdreiecks $BB'B''$ den inneren Winkeln B_1, B_1' des Hauptdreiecks $B_1B_1'B_1''$ gleich; oder *b*) es sind nur zwei innere Winkel B, B_1: dagegen der andere innere Winkel B' des einen Dreiecks dem Aussenwinkel B_1' des anderen gleich.

Im Falle *a*) sind die Hauptdreiecke ähnlich, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ für einen Augenblick so aufeinander gelegt, dass die Hauptlinien P'', P_1'' in einerlei gerade Linie fallen, die Richtung von B nach B' dieselbe sei, als die von B_1 nach B_1', und dass die Punkte B'', B_1'' auf einerlei Seite jener geraden Linie liegen, so müssen sowohl die Strahlbüschel B, B_1 als die Strahlbüschel B', B_1' ungleichliegend sein, d. h. folgen z. B. in B die Strahlen P', a, b, c, d, P'.... von der Rechten zur Linken aufeinander, so gehen die entsprechenden Strahlen P_1' a_1, b_1, c_1, d_1, P_1''.... von der Linken zur Rechten. Sind nun die Strahlbüschel B, B' selber projektivisch-gleich, und sind z. B. a, b; a', b' irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Strahlen, so ist

$$\text{W.}\,a_1b_1 = \text{W.}\,ab = \text{W.}\,a'b' = \text{W.}\,a_1'b_1', \text{ also auch } \text{W.}\,a_1b_1 = \text{W.}\,a_1'b_1';$$

also sind auch die von den entsprechenden Strahlen gebildeten Strahlbüschel B_1, B_1' projektivisch-gleich, und zwar sind letztere gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem B, B' gleichliegend oder ungleichliegend sind.

Im Falle *b*) sind die Hauptdreiecke nicht ähnlich, es sei denn, sie wären rechtwinklig, und denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so wie oben aufeinander gelegt, so werden die Strahlbüschel B, B_1 ungleichliegend, dagegen die Strahlbüschel B', B_1' gleichliegend sein. Sind also die Strahlbüschel B, B' gleichliegend, so müssen die ebenfalls projektivisch-gleichen Strahlbüschel B_1, B_1' ungleichliegend sein, und umgekehrt.

Bekanntlich sind zwei perspektivische Strahlbüschel B, B' projektivisch gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihr perspektivischer Durchschnitt unendlich entfernt oder auf ihrem gemeinschaftlichen Strahle in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten senkrecht steht; und zwei schiefliegende projektivische Strahlbüschel B, B' sind gleich, und zwar gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem ihre Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, und ihre entsprechenden Strahlen auf demselben sich schneiden, oder ihre Mittelpunkte die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel sind, auf welcher die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen liegen; und umgekehrt. Hieraus folgt nun im Falle *a*):

1) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ entspricht in der anderen der dem Hauptdreiecke umschriebene Kreis; und daher bilden auch die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte (B'', B_1'') zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel.

2) Den drei Geraden, welche auf den Seiten des einen Hauptdreiecks in deren Mitten senkrecht stehen, entsprechen drei dem anderen Hauptdreiecke umschriebene gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf den betreffenden Seiten liegen.

3) Allen Kreisen der einen Ebene, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen, entsprechen in der anderen ebenfalls Kreise, welche bloss durch die zwei zugeordneten Hauptpunkte gehen.

4) Allen gleichseitigen Hyperbeln, welche bloss durch zwei Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben, entsprechen ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte gehen und deren Verbindungslinie zum Durchmesser haben.

Ferner ergiebt sich aus 2. und aus Archiv Thl. III. S. 225. *a.*:

5) Dem Mittelpunkte der den beiden Hauptdreiecken umschriebenen Kreise entsprechen gegenseitig die Durchschnitte der Höhen dieser Dreiecke.

Dagegen findet im Falle *b*) Folgendes statt:

6) Der unendlich entfernten Geraden einer jeden der beiden Ebenen entspricht eine dem Hauptdreiecke der anderen umschriebene gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt auf einer bestimmten Seite dieses Dreiecks liegt; und daher bilden die entsprechenden Strahlen des dritten Paares zugeordneter Hauptpunkte keine projektivisch-gleichen Strahlbüschel.

7) Einer bestimmten von den drei Senkrechten in den Mitten der Hauptdreiecksseiten entspricht der dem anderen Hauptdreieck umschriebene Kreis; und daher gehen die beiden den Hauptdreiecken umschriebenen Kreise gegenseitig durch die ihren Mittelpunkten entsprechenden Punkte.

8) Allen Kreisen, welche bloss durch die beiden Hauptpunkte B, B' (oder B_1, B_1') gehen, entsprechen gleichseitige Hyperbeln, welche bloss durch die Hauptpunkte B_1, B_1' (oder B, B') gehen und dieselben zu Endpunkten eines Durchmessers haben.

§. 15.

Zwei aufeinander gelegte Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$.

Denkt man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ aufeinander gelegt, so ist ihre geometrische Verwandtschaft am Allgemeinsten durch zwei Kegelschnitte K, K' (Taf. II. Fig. 1.) bestimmt, deren einer die zug. Hauptpunkte B, B_1 und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a, a_1; b, b_1 ...., der andere zwei andere zug. Hauptpunkte B', B_1' und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen a', a_1'; b', b_1'.... enthält.

Fallen zwei entsprechende Punkte a, a_1 beider Ebenen zusammen, so gehen die Strahlen a, a', a_1, a_1' durch einerlei Punkt (aa_1), und folglich ist letzterer den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich, und da zwei Kegelschnitte im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keinen Punkt gemein haben, so folgt:

1) Zwei aufeinander gelegte geometrisch verwandte Ebenen besitzen im Allgemeinen entweder vier oder zwei oder keine Punkte, und nur in gewissen Grenzla-

Digitized by Google

gen auch drei oder einen, in welchen sich entsprechende Punkte vereinigen.

Sind insbesondere zwei Strahlbüschel B, B' perspektivisch, d. h. ist K eine Gerade, so werden sowohl in den Durchschnitten von K und K', als auch in denen des gemeinschaftlichen Strahles BB_1 und des Kegelschnittes K' entsprechende Punkte vereinigt; und sind zugleich B, B_1 und B', B_1' perspektivisch, so giebt es solcher Punkte allemal vier, es sei denn, dass einige zusammenfallen, nämlich im Durchschnitte der perspektivischen Durchschnitte, in dem der Geraden BB_1, $B'B_1'$, und in den Punkten, wo allemal die eine der beiden letzteren den persp. Durchschnitt der beiden anderen Strahlbüschel schneidet.

Dahingegen können im Allgemeinen keine zwei entsprechenden Geraden zusammenfallen, weil nur den Strahlen der Hauptpunkte wiederum gerade Linien entsprechen. Sind aber z. B. B, B_1 perspektivisch, so fallen längs BB_1 zwei entsprechende Gerade zusammen; und sind zugleich auch B', B_1' perspektivisch, und ist der gem. Strahl des einen Paares zugleich der perspektivische Durchschnitt des anderen, so müssen sich in jedem Punkte dieses Strahles zwei entsprechende vereinigen. Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so fallen nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. 9. *a.* entweder zwei oder bloss ein oder kein Paar entsprechende Strahlen derselben zusammen.

Man denke sich ferner zwei Punkte a, a_1, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. sowohl wenn a zu $\mathfrak{E}$, a_1 zu $\mathfrak{E}_1$, als auch wenn a_1 zu $\mathfrak{E}$, a zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird; und es seien α, α; α', α'; α_1, α_1; α_1', α_1' resp. die nach a, a_1 gehenden Strahlen von B, B', B_1, B_1'; so liegen einerseits die Durchschnitte von α und α_1; α und α_1 auf dem Kegelschnitte K, und die Gerade A, welche dieselben verbindet, trifft die Gerade BB_1 in einem Punkte t, welcher der harm. Pol der Geraden aa_1 für K ist; folglich geht aa_1 durch den harm. Pol von BB_1 für K; aber auch andererseits durch den harm. Pol von $B'B_1'$ für K'; also ist sie die Gerade, welche den Durchschnitt der Tangenten in B und B_1 mit dem der Tangenten in B' und B_1' verbindet.

Da nun die Punkte B, B_1 und der Durchschnitt von α, α_1 auf K liegen, und BB_1 den harmonischen Pol t von aa_1 für K enthält, so sind, nach Archiv Thl. IV. Nr. XXX. §. 4. 2. die Punkte a, a_1 zwei zugeordnete harm. Pole für K; aber auch für K'; also das den Involutionen zug. harm. Pole für K und K' gemeinschaftliche Paar.

2) In zwei aufeinander gelegten geometrisch verwandten Ebenen giebt es im allgemeinsten Falle entweder nur ein einziges oder kein Paar Punkte, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen.

Fällt der Pol von $B'B_1'$ für K' mit dem von BB_1 für K zusammen, so gehen durch dieselben unzählige Gerade, deren jede zwei Punkte a, a_1 besitzt. Im Archiv Thl. V. Nr. XVIII. §. 6, 9. ist gezeigt worden, dass in dem Falle, wenn jener Pol auf einer gemeinschaftlichen Sekante von K, K' liegt, die Punktenpaare a, a_1, welche den verschiedenen Strahlen desselben angehören, einen Kegelschnitt bilden müssen. In jedem anderen Falle aber bilden sie keinen Kegelschnitt, sondern eine Curve höherer Ordnung.

Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, so sind der Punkt $\mathfrak{k}$, wo BB_1 vom persp. Durchschnitt derselben, und der Punkt $\mathfrak{k}_1$, wo BB_1 von der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ geschnitten wird, mit den Punkten B, B_1 harmonisch; und ausserdem sind die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{k}_1$ und dem dem persp. Durchschnitt K angehörigen Punkte $\mathfrak{k}_2$ harmonisch. Im Fall nun auch B', B_1' perspektivisch sind und $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ analoge Bedeutung als $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ haben, so giebt es, so lange weder die persp. Durchschnitte K, K' noch auch die Punkte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammenfallen, nur eine Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und entweder zwei oder keine Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$. Fallen nur K und K' zusammen, also auch $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_2'$, so giebt es keine Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, die zugleich mit $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und mit $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ harmonisch sind; und fallen nur $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so besitzt aus demselben Grunde nur ein einziger Strahl derselben Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, dann aber unzählige Paare solcher Punkte. Fallen endlich sowohl K, K' als $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1'$ zusammen, so giebt es auf jedem Strahle der letzteren, d. h. des Durchschnittes von BB_1 und $B'B_1'$, unzählige Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; aber dann geht der gemeinsame persp. Durchschnitt nach dem Durchschnitte der Geraden BB' und B_1B_1', und dem Strahle BB' entspricht sowohl in B_1 als in B_1' der Strahl B_1B_1', ein Fall, der noch nicht hierher gehört.

Wenn im allgemeinen Falle die Kegelschnitte K, K' sich decken, so giebt es auf der Geraden, welche die harm. Poole von BB_1 und $B'B_1'$ verbindet, unzählige Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; nämlich je zwei zugeordnete harm. Pole derselben sind ein solches Paar.

Sind endlich zwei Strahlbüschel B, B_1 concentrisch, so sind die Strahlen a, a_1 derselben, welche nach zwei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ gehen, in doppeltem Sinne entsprechend, also sind nach Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. §. 1. *b.* die Strahlbüschel involutorisch; hieraus folgt:

3) Sind die beiden Paar Strahlbüschel B, B_1; B', B_1', in Ansehung derer zwei aufeinander gelegte Ebenen geometrisch verwandt sind, concentrisch, so entsprechen entweder alle oder kein Paar Punkte derselben einander in doppeltem Sinne.

Gilt letzteres von allen entsprechenden Punktenpaaren, so sollen die Ebenen involutorisch-verwandt, und je zwei entsprechende Systeme derselben zwei Involutions-Systeme heissen. Im Ganzen bleiben dann noch alle Erscheinungen, wie früher; einer Curve der $n$ten Ordnung entspricht eine der $2n$ten Ordnung u. s. w., doch ist es einerlei, in welcher der beiden Ebenen liegend eine jede von beiden Curven vorgestellt wird: es fallen nämlich, was bei bloss concentrischen proj. Strahlbüscheln nicht stattfindet, jetzt auch das dritte Paar zugeordnete Hauptpunkte zusammen.

β.

Zwei Systeme von Geraden.

§. 16.

Sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Gerade A, A' mit den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$...., in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei

Digitized by Google

Gerade A_1, A_1' mit den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... und $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{d}_1'$.... gegeben, und ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) \text{ und zugleich}$$
$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....),$$

so entspricht jeder Geraden a der Ebene $\mathfrak{E}$, welche A, A' in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ schneidet, eine Gerade a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$, welche durch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1'$ geht; insbesondere entspricht der unendlich entfernten Geraden einer jeden Ebene diejenige Gerade der anderen, welche die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen verbindet. Dem Durchschnitte p'' von A, A' entspreche in A_1 ein Punkt p_1' und in A_1' ein Punkt p_1; und umgekehrt: dem Durchschnitte p_1'' von A_1, A_1' entspreche in A ein Punkt p', in A' ein Punkt p, und es seien A'', A_1'' die Geraden, welche resp. p und p', p_1 und p_1' verbinden. Dies vorausgesetzt, so entspricht jedem Strahle von p'' die Gerade A_1'', und jedem Strahle von p_1'' die Gerade A''.

Es sei B irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen $a, b, c, d....$ die A in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., die A' in $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... schneiden; so hat man:

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) \equiv (a, b, c, d....) \equiv$$
$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....); \text{ also}$$

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1'....).$$

Liegt B auf A'', so entspricht dem Strahle A'' von B ein durch p_1'' gehender Strahl, also sind die Geraden A_1, A_1' in Ansehung der den a, b, c, d.... entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... perspektivisch, und da demjenigen Strahle von B, welcher durch p'' geht, die Gerade A_1'' entspricht, so liegt der Projektionspunkt B_1 von A_1, A_1' auf A_1''. In jedem anderen Falle, wo B auf keiner der Geraden A, A', A'' liegt, umhüllen die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... nebst A_1, A_1', A_1'' einen Kegelschnitt $[B_1]$. Liegt der Punkt B auf der Geraden r, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A, A' verbindet, so wird der Kegelschnitt $[B_1]$ von der unendlich entfernten Geraden berührt, ist also eine Parabel; und ist B selbst unendlich entfernt, so berührt $[B_1]$ die Gerade r_1, welche die Durchschnitte der Parallelstrahlen von A_1, A_1' verbindet.

Die drei Geraden A, A', A'' und A_1, A_1', A_1'' werden Hauptlinien, die Punkte p, p', p'' und p_1, p_1', p_1'' Hauptpunkte, die von ihnen gebildeten Dreiecke Hauptdreiecke, und je zwei gleichmarkirte Hauptlinien und Hauptpunkte, wie A'', A_1''; p', p_1'; A'', p_1'', zugeordnete genannt.

1. Einem jeden Punkte, welcher auf einer Hauptlinie der einen Ebene liegt, entspricht wieder ein Punkt der zugeordneten Hauptlinie der anderen Ebene.

2. Einem jeden Strahle eines Hauptpunktes der einen Ebene entspricht ein und dieselbe Gerade, nämlich die zugeordnete Hauptlinie der anderen Ebene.

3. Einem jeden Punkte, welcher auf keiner Hauptlinie liegt, entspricht ein Kegelschnitt, welcher von den drei Hauptlinien der anderen Ebene und von den, den Strahlen des ersteren entsprechenden Geraden berührt wird, und umgekehrt. Dieser Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn jener Punkt auf der mit r (r_1) bezeichneten Geraden liegt.

Es würde langweilig sein, diese Untersuchung noch weiter zu verfolgen, indem man sich bereits aus diesem Anfang derselben überzeugt, dass dieselbe kaum mehr als eine wiederholte Erzählung der unter α. gewonnenen Resultate in anderem Gewande liefern würde. Der Leser kann sich sogleich in den Besitz des hier zu Gewinnenden setzen, wenn er in den früheren Betrachtungen und Lehrsätzen die Ausdrücke: Punkt, Hauptpunkt, Gerade, Hauptlinie, Curve $n$ter Ordnung oder Klasse, Punkt oder Tangente einer Curve, $n$facher Punkt, Rückkehrpunkt u. s. w. resp. mit den Ausdrücken: Gerade, Hauptlinie, Punkt, Hauptpunkt, Curve $n$ter Klasse oder Ordnung, Tangente oder Punkt einer Curve, $n$fache Tangente, Wendungstangente u. s. w. vertauscht. Nur in einem besonderen Falle stellt sich Eigenthümliches heraus: Sind nämlich sowohl die Geraden A, A_1 als die Geraden A', A_1' projektivisch-ähnlich oder gleich, so entsprechen sich die unendlich entfernten Punkte derselben, und folglich auch die unendlich entfernten Geraden ihrer Ebenen gegenseitig; die Geraden A'' und A_1'' sind also in Ansehung ihrer entsprechenden Punkte ebenfalls ähnlich; jeder Parabel, welche die drei Hauptlinien der einen Ebene berührt, entspricht ein unendlich entfernter Punkt der anderen, und jeder Parabel, welche bloss zwei Hauptlinien berührt, entspricht wieder eine Parabel.

γ.

Ein System von Punkten und ein System von Geraden.

§. 17.

Von der Betrachtung dieser beiden Systeme gilt fast dasselbe als von der der beiden vorigen. Man erhält die Eigenschaften derselben, wenn man in α. die Ausdrücke für die Elemente der einen Ebene unverändert lässt, dagegen die für die Elemente der anderen mit den so eben genannten vertauscht. Nur dem §. 14. steht hier durchaus kein ähnlicher zur Seite, und das Analogon der Frage über die in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte dürfte wenigstens kein besonderes Interesse darbieten. Wichtiger dagegen wäre es zu untersuchen: welchem Orte diejenigen Punkte der einen Ebene angehören, deren entsprechende Geraden durch diese Punkte selber gehen? und umgekehrt; indem dieselbe Frage für reciprok-verwandte Figuren von besonderer Bedeutung ist. Schwerlich aber dürfte dieselbe hier ohne Hülfe der algebraischen Analysis beantwortet werden können, wesshalb ich sie übergehe.

Digitized by Google

Zweite Art der höheren geometrischen Verwandtschaften.

§. 18.

Es seien jetzt die in §. 4. betrachteten zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B_1' so beschaffen, dass zwar dem gemeinschaftlichen Strahle P'' von B, B', insofern er zu B' gerechnet wird, in B_1' wiederum der gemeinschaftliche Strahl P_1'' von B_1, B_1' entspreche, d. h. dass sowohl P mit P'' als auch P_1 mit P_1'' zusammenfalle; dass dagegen dem Strahle P'' des Strahlbüschels B ein von P_1'' verschiedener Strahl P_1' in B_1, und umgekehrt: dem Strahle P_1'' von B_1 ein von P'' verschiedener Strahl P' in B entspreche. In diesem Falle muss einem jeden Punkte von P'' der einzige Punkt B_1, und einem jeden Punkte von P' der einzige Punkt B_1'; und ebenso einem jeden Punkte von P_1'' der Punkt B, und einem jeden von P_1' der Punkt B' entsprechen. Einer jeden Geraden A der Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht in $\mathfrak{E}_1$ offenbar ebenso wie früher ein Kegelschnitt $[A_1]$, welcher durch die Punkte B_1, B_1' geht; weil aber jetzt denjenigen zwei Strahlen von B, B', welche nach dem Durchschnitte von A und P'' gerichtet sind, in B_1, B_1' die Strahlen P_1', P_1'' entsprechen, so muss, zufolge Archiv. Thl. IV. Nr. XXX. II., der Kegelschnitt $[A_1]$ die Hauptlinie P_1' in B_1 berühren. Und umgekehrt: wird jedem Kegelschnitt, welcher durch die Hauptpunkte B, B' geht und die Hauptlinie P' berührt, in der anderen Ebene eine Gerade entsprechen. Dagegen entspricht jedem Kegelschnitt, welcher durch B, B' geht, aber P' nicht berührt, zwar wiederum ein Kegelschnitt, welcher durch B_1, B_1' geht, der aber die Hauptlinie P_1' nicht berührt.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine Curve der $n$ten Ordnung, welche durch keinen der Hauptpunkte B, B' gehe, und es sei $\mathfrak{C}_1$ die ihr entsprechende Curve: so entspricht den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P'' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1, und den n Punkten, welche $\mathfrak{C}$ mit P' gemein hat, ein $n$facher Punkt B_1'. Einer jeden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht ein Kegelschnitt, welcher mit $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen $2n$ Punkte, welche nicht in B, B' fallen, gemein hat; also wird $\mathfrak{C}_1$ von dieser Geraden in $2n$ Punkten geschnitten, ist folglich von der $2n$ten Ordnung. Demnach hat jeder Strahl des Punktes B_1 ausser diesem $n$fachen Punkte noch n Punkte mit $\mathfrak{C}_1$ gemein. Der Strahl P_1' aber kann keine Punkte der Curve besitzen, welche nicht mit B_1 zusammenfallen, weil sonst die Curve $\mathfrak{C}$ durch den Punkt B' gehen müsste, was gegen die Annahme ist; also sind längs P_1' ausser jenen n Punkten noch n Punkte mit B_1 vereinigt. Dennoch aber ist B_1 kein $2n$facher Punkt; weil sonst auch alle übrigen Strahlen desselben ausser ihm keinen Punkt mit $\mathfrak{C}_1$ gemein haben könnten.

Denkt man sich nämlich die jetzt in Rede stehende Art der Verwandtschaft aus der ersten durch allmähligen Uebergang entstanden, indem die Hauptlinien P, P_1 immer kleinere Winkel mit P'', P_1'' bilden, so sieht man, dass zwar längs der festen Geraden P_1' ein jeder der n Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1'' bildeten, sich mit einem der Punkte, welche den $n$fachen Punkt B_1

bilden, nämlich mit dem demselben Zweige angehörenden, vereinigt hat, und folglich längs P_1' $2n$ Punkte der Curve liegen; dass aber eine solche Vereinigung zweier Punkte auf keinem anderen Strahle des Punktes B_1 stattfindet. Ferner ersieht man hieraus, dass die Hauptlinie P_1' die n Zweige der Curve, welche durch B_1 (und B_1'') gehen, im Punkte B_1 berührt, und folglich diese Zweige selber einander in B_1 berühren, gleichwohl aber dieser Punkt kein Rückkehrpunkt, sondern nur ein vielfacher Punkt überhaupt ist, weil derselbe nicht den unmittelbaren Uebergang von einem Zweige zum anderen bildet, vielmehr der die Curve beschreibende Punkt sich continuirlich und auf demselben Zweige verharrend durch B_1 hindurch bewegt und erst später wieder auf einem anderen Zweige nach B_1 gelangt. Dies letztere erhellt auch aus dem Umstande, dass bei jenem allmähligen Uebergange nur die Geraden, welche den Punkt B'' mit den Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ und P'' verbinden, sich zu vereinigen streben, diese Durchschnitte selber aber unverrückt und getrennt von einander bleiben, weshalb auch die in B_1 vereinigten n Punkte noch immer als diskrete Punkte der Curve anzusehen sind. Man nennt diejenige Tangente einer Curve, längs welcher mehr als eine Berührung stattfindet, eine vielfache Tangente derselben, und zwar in dem Falle, wenn zwei oder mehrere der Berührungspunkte zusammenfallen, eine Wendungstangente, und den gemeinschaftlichen Berührungspunkt einen Wendungspunkt der Curve; insbesondere gelten die beiden letzten Ausdrücke mit Vorzug, wenn alle Berührungspunkte einer vielfachen Tangente sich vereinigen. Man sieht sogleich, dass die vielfachen Tangenten, die Wendungstangenten und die Wendungspunkte für Curven einer Klasse dasselbe sind, als die vielfachen Punkte, die Rückkehrpunkte und die Tangenten in derselben für Curven einer Ordnung. Im Falle der Curve $\mathfrak{C}_1$ ist demnach der Punkt B_1 ein vollkommener Wendungspunkt, und die Hauptlinie P_1' ist eine vollkommene Wendungstangente. Es gibt aber auch Fälle, wo B_1 nur theilweise ein vielfacher Punkt und theilweise ein Wendungspunkt ist.

Geht nämlich die Curve $\mathfrak{C}$ $p$mal durch B und $q$mal durch B', so ist die entsprechende Curve $\mathfrak{C}_1$ von der $(2n-(p+q))$ten Ordnung, besitzt in B_1' einen $(n-p)$fachen und in B_1 einen $(n-q)$fachen Punkt, und längs P_1' vereinigen sich $n-(p+q)$ Punkte mit einer gleichen Anzahl der bereits in B_1 vereinigten Punkte. Es müssen sich also in B_1 $n-(p+q)$ Zweige der Curve berühren, während die übrigen p Zweige die letzteren und einander in diesem Punkte durchschneiden.

Verfolgt man, wozu hier kein Raum mehr ist, die in §. 10. und §. 12. angestellten Betrachtungen, so wird man finden, dass ein Punkt einer Curve, in welchem sich $n-(p+q)$ Zweige berühren und von p Zweigen geschnitten werden, dieselbe Geltung hat, als zwei Punkte, von denen der eine ein $(n-q)$facher und der andere ein $(n-(p+q))$facher Punkt ist.

Digitized by Google

XIV.

Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Band VI. Heft 1. dieses Archives.

Von dem

Herrn Doctor Dippe,

Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Der Herr Herausgeber dieses Archives hat die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in einer Weise gegeben, welche von den Mängeln der Darstellung dieses Gegenstandes in unsern Lehrbüchern zwar frei ist, in mir aber ein Bedenken darüber zurückgelassen hat, ob dieselbe für den Schulunterricht durchweg geeignet sei. Man soll nämlich, um die Gleichung $x^3=ax+b$ aufzulösen,

$$\begin{aligned} x&=(p+q\sqrt{-1})+(p_1+q_1\sqrt{-1})\\ &=(p+p_1)+(q+q_1)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

setzen, darauf

$$\begin{aligned} x^3&=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})\{p+p_1+(q+q_1)\sqrt{-1}\}\\ &\quad+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3\\ &=3(p+q\sqrt{-1})(p_1+q_1\sqrt{-1})x\\ &\quad+(p+q\sqrt{-1})^3+(p_1+q_1\sqrt{-1})^3 \end{aligned}$$

entwickeln, und hierauf zur Bestimmung von p, p_1, q, q_1 die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} &pp_1-qq_1=\tfrac{1}{3}a,\ pq_1+qp_1=0;\\ &p^3+{p_1}^3-3pq^2-3p_1{q_1}^2=b,\\ &q^3+{q_1}^3-3p^2q-3{p_1}^2q_1=0 \end{aligned}$$

herleiten. Nun erst richtet sich die Untersuchung auf die Auffindung einer reellen Wurzel.

Dieser Anfang scheint mir für Schüler schwierig und abschreckend. Die Auflösung quadratischer Gleichungen ist ihnen so leicht geworden und beruht auf einem so einfachen Gedanken, der sich ihnen mit Nothwendigkeit aufgedrängt hat, dass sie Aehnliches auch bei den cubischen Gleichungen erwarten. Die sofortige Einführung des Imaginären muss sie nothwendig befremden, da ihnen dasselbe immer noch als Ausnahme erscheint, und ihnen der Gedanke, dass die Form $p+q\sqrt{-1}$ die allgemeinste Zahlform ist, zwar bekannt aber noch nicht geläufig ist. Sodann erschrecken sie vor den Schwierigkeiten, wenn ihnen statt einer leicht aufzufassenden Gleichung vier neue, dem Anscheine nach viel schwierigere, entgegen treten; und in der Muthlosigkeit, die sie erfasst, können sie keinen Schritt selbstständig vorwärts thun, und höchstens den Lehrer bewundern, der mit geschickter Hand die Schwierigkeiten zu beseitigen weiss.

Wenn ich im Folgenden den oft behandelten Gegenstand nochmals aufnehme, so geschieht dies in der Absicht, die Resultate meiner Erfahrungen über denselben mitzutheilen, was gewiss öfter von den Lehrern geschehen könnte, zum Nutzen und Frommen unseres Unterrichts und unserer Lehrbücher.

Den Schülern, denen man cubische Gleichungen vortragen will, sind die Sätze $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$, $x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ bekannt, und die quadratischen Gleichungen geläufig; man wird also ohne Schwierigkeit die drei Wurzeln der reinen cubischen Gleichung finden.

Wenn man die gemischte quadratische Gleichung auch zuerst dadurch gelöst hat, dass man die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate machte, so wird man es doch nicht versäumen dürfen.

$$x^2+ax+b=0$$

auf eine reine quadratische Gleichung zu reduciren, indem man $x=y+z$ setzt, und z so bestimmt, dass der Coefficient von y Null werde. Dann geht man an die Behandlung von

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

so werden die Schüler den Rath geben, $x=y+z$ zu setzen, und z so zu bestimmen, dass y^2 wegfalle. Man findet dann

$$1)\quad y^3+py+q=0.$$

Sicher wird nun der eine oder der andere den Rath ertheilen, eine solche Substitution nochmals vorzunehmen, $y=u+v$ zu setzen, um auch die erste Potenz der Unbekannten wegzuschaffen, und zu einer reinen cubischen Gleichung zu gelangen. Ich pflege solchem Rathe zu folgen, und setze

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3, \\ py &= \quad pu+pv, \\ q &= \quad q: \end{aligned}$$

folglich:

$$2)\quad 0=u^3+3v\,.\,u^2+(3v^2+p)u+(v^3+pv+q).$$

Digitized by Google

Es erhellet dann, dass man durch $3v^2+p=0$ zu einer Gleichung $u^3+\alpha u^2+\beta=0$ gelangen würde, so wie, dass nicht zugleich $3v^2+p=0$ und $3v=0$ sein kann, wenn nicht p selbst Null ist, d. h. wenn man nicht schon eine reine cubische Gleichung hat.

Nun muss der Lehrer weiter helfen: Die Aufgabe, die Wurzeln von $y^3+py+q=0$ zu finden, ist gelöst, wenn man u und v so bestimmen kann, dass der Gleichung 2) Genüge geschieht. Zur Bestimmung zweier Unbekannten gebraucht man zwei Gleichungen. Diese ergeben sich, wenn man die Gleichung 2) so ordnet:

$$3)\quad (u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0.$$

Da in der Gl. 1) das absolute Glied nicht Null ist, so kann Null keine Wurzel derselben sein, mithin kann man nicht $u+v=0$ setzen. Es bleibt also, wenn man der Gl. 3) Genüge leisten will, nur übrig

$$4)\quad \begin{cases} u^3+v^3+q=0, \\ 3uv+p=0 \end{cases}$$

zu setzen.

Ich habe absichtlich vermieden, die Herleitung so zu ordnen: man setze $y=u+v$, dann ist

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \\ &= 3uv(u+v)+u^3+v^3, \end{aligned}$$

also auch

$$y^3=3uv\,.\,y+u^3+v^3.$$

Vergleicht man dies mit $y^3=-py-q$, so erhält man $3uv=-p$, $u^3+v^3=-q$. Dass man nämlich statt $u+v$ wieder rückwärts y schreibt, nachdem man eben erst $u+v$ statt y gesetzt hat, und dabei u und v doch noch beibehält, erscheint den Schülern immer als ein Kunstgriff. Schreibt man nun die Gl. 4) in der Form

$$5)\quad \begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}; \end{cases}$$

oder gar $\alpha+\beta=-q$, $\alpha\beta=-\dfrac{p^3}{27}$, so sind die Schüler auf ganz bekanntem Boden und sehen das Ziel schon vor Augen. Man kann also, ehe man weiter geht, die Frage aufwerfen: werden α und β, mithin u und v immer reell sein, und durch den ihnen geläufigen Satz

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$

sie jene Frage dahin beantworten lassen, dass α und β reell sein werden, wenn $q^2+\dfrac{4p^3}{27}$ positiv oder Null ist, imaginär dagegen,

wenn dieser Werth negativ ist. Für alle Fälle aber ist doch

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}};$$

und $u+v$ eine Wurzel der Gleichung $y^3+py+q=0$.

Um die beiden andern Wurzeln zu finden, subtrahirt man entweder von dem Ausdrucke y^3+py+q den Werth $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, und erhält

$$y^3+py+q=(y-(u+v))(y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p);$$

oder man dividirt y^3+py+q durch $y-(u+v)$, und ich ziehe dies letztere vor, weil die Schüler hierbei sicherer gehen. Man erhält so den Quotienten $y^2+(u+v)y+(u+v)^2+p$, und den Rest $(u+v)^3+p(u+v)+q$, welcher Null ist, mithin für y^3+py+q das obige Product.

Sucht man die Werthe von y, welche dessen quadratischen Factor zu Null machen, so erhält man, nach Berücksichtigung von $p=-3uv$,

$$-\frac{u+v}{2}\pm\frac{u-v}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1},$$

also imaginäre Wurzeln, wenn u und v reell sind. Es ist gut, wenn man den Grund hiervon dadurch aufzeigt, dass man jenen quadratischen Factor auf die Form bringt:

$$(y+\frac{u+v}{2})^2+3(\frac{u+v}{2})^2.$$

Nun wird man den irreducibeln Fall betrachten müssen, und gleich darauf hinweisen, dass u und v zwar imaginär sind, dass aber u^3 und v^3 conjugirte imaginäre Ausdrücke sind, und dass, wenn eine genauere Untersuchung auch u und v als solche erkennen liesse, nicht bloss $u+v$, sondern auch $(u-v)\sqrt{-1}$ reell sein, dass also in diesem Falle drei reelle Wurzeln vorhanden sein würden, deren Berechnung man sich entweder noch vorbehält, oder, was ich vorziehe, sofort ausführt, indem man den binomischen Lehrsatz zu Hülfe nimmt. Die Erfahrung hat mir gezeigt, dass die Schüler kaum irgend einer Reihenentwickelung mit gespannterem Interesse folgen, als gerade dieser. Es liegt dies wohl mit darin, dass sie eine so lebhafte Ueberzeugung von der Nothwendigkeit der Aufgabe selbst haben.

Hierauf habe ich gewöhnlich erst die Vereinfachung der cardanischen Formel durch die goniometrischen Functionen vorgenommen, und liess mich dann durch den Versuch, dem irreducibeln Falle dieselbe Wohlthat zu erzeigen, zum Ausdruck

$$\sqrt[3]{[r(\cos\omega\pm\sin\omega\sqrt{-1})]}$$

führen, um bei dieser Gelegenheit von den imaginären Ausdrücken der Form $\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}$ das Wenige zu lehren, was man gebraucht, um für $u+v$ die bekannte Formel zu finden. Für die

Digitized by Google

beiden andern Wurzeln ergeben sich die einfachen bekannten Ausdrücke, wenn man beachtet, dass $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist.

Die Beziehung zwischen den goniometrischen Functionen des dreifachen und einfachen Winkels pflege ich beim Vortrage der Trigonometrie zu benutzen, um die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$ aufzulösen. So natürlich dies den Schülern erscheint, und soviel Freude es ihnen macht, von den eine cubische Gleichung bildenden goniometrischen Formeln diese Anwendung zu machen, gerade so wunderbar kommt es ihnen vor, wenn man umgekehrt bei der Auflösung der cubischen Gleichungen in dem Momente, wo ihnen das Imaginäre im Wege steht, die ihnen vielleicht wieder entfallene Formel

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$$

zu Hülfe ruft. Diese Art Bewunderung soll die Mathematik, wie mir scheint, eher vermeiden als erstreben, denn sie stählt die Kräfte der Lernenden eben so wenig, als sie ihren Muth hebt. Etwas ganz Anderes ist es, wenn man bei der Auflösung der Gleichungen den Umstand benutzt, dass jeder positive ächte Bruch dem Quadrat eines Sinus gleich ist, und die Lernenden dann sehen, wie in Folge dieser Substitution eine überraschende Vereinfachung gewonnen wird; denn hier wird der Ausgang von einem einfachen Gedanken gemacht, von dem man einsieht, dass er auch in andern Fällen die trefflichsten Dienste leisten muss.

XV.

Ueber Poinsot's Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen.

Von

dem Herausgeber.

In dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Février. 1845. p. 48. hat Poinsot eine Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Grössen vorgetragen, deren Princip so einfach ist, dass es sich kaum denken lässt, dass dieselbe

nicht schon einmal anderswo entwickelt worden sein sollte. Poinsot bezeichnet diese Methode aber als neu, und jedenfalls ist dieselbe nicht so allgemein bekannt, wie sie nach meiner Meinung in gewisser Rücksicht zu sein verdient, weshalb wir ihr hier, mit mehreren eigenen Bemerkungen und Zusätzen und überhaupt in grösstentheils eigenthümlicher Entwickelung, die folgenden Seiten widmen wollen.

Wenn A und B zwei beliebige gleichartige Grössen bezeichnen, deren grösstes gemeinschaftliches Maass gefunden werden soll, so nehme man die eine, etwa A, von der anderen B so oft weg, als es angeht. Bleibt dann ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Zweifache $2B$ von B, und nehme A von $2B$ wieder so oft weg, als es angeht. Bleibt bei dieser Operation wieder ein Rest, welcher kleiner als A ist, so bilde man das Dreifache $3B$ von B, und nehme A von $3B$ so oft weg, als es angeht. Findet man nun bei der Fortsetzung dieser Operation endlich ein Vielfaches mB von B, von welchem A sich n Mal, wo n eine ganze Zahl bezeichnet, wegnehmen lässt, ohne dass ein Rest, welcher kleiner als A ist, übrig bleibt, d. h. findet man endlich ein Vielfaches mB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und ist mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B, welches es giebt, so ist der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B, und dasselbe also auf diese Weise gefunden. Kommt man aber bei Fortsetzung des obigen Verfahrens niemals auf ein Vielfaches von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, d. h. es giebt für dieselben gar kein gemeinschaftliches Maass.

Um dies zu beweisen, wollen wir zuerst annehmen, dass man bei der Anwendung des obigen Verfahrens ein Vielfaches mB von B gefunden habe, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen nA von A gleich ist, und dass mB das niedrigste einem gewissen Vielfachen nA von A gleiche Vielfache von B sei, welches es giebt. Dann lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass der $m$te Theil von A, d. h. $\frac{A}{m}$, das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden Grössen A und B ist. Da nämlich $A=m\frac{A}{m}$ ist, so wird A von $\frac{A}{m}$ gemessen. Weil ferner nach der Voraussetzung $mB=nA$ ist, so ist $B=n\frac{A}{m}$, und es wird folglich auch B von $\frac{A}{m}$ gemessen. Also ist $\frac{A}{m}$ ein gemeinschaftliches Maass von A und B. Gäbe es nun ein gemeinschaftliches Maass $M>\frac{A}{m}$ von A und B, so dass, wenn μ und ν zwei ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ wäre, so wäre, weil nach der Voraussetzung $A<mM$ ist, $\mu M<mM$, folglich $\mu<m$ Weil aber $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es gäbe also

Digitized by Google

ein niedrigeres Vielfaches μB von B als mB, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann es kein grösseres gemeinschaftliches Maass der beiden Grössen A und B als $\frac{A}{m}$ geben, und $\frac{A}{m}$ ist folglich das grösste gemeinschaftliche Maass von A und B, welches der erste Theil unserer Behauptung war.

Wenn die Grössen A und B commensurabel sind, d. h. wenn dieselben überhaupt ein gemeinschaftliches Maass M haben, so dass, wenn μ und ν ganze Zahlen bezeichnen, $A=\mu M$ und $B=\nu M$ ist, so ist $\mu B=\mu\nu M=\nu.\mu M=\nu A$, und es giebt also unter der gemachten Voraussetzung immer ein Vielfaches μB von B, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen νA von A gleich ist; man muss folglich in diesem Falle bei Anwendung des obigen Verfahrens offenbar immer endlich einmal auf ein Vielfaches von B kommen, welches von A genau gemessen wird, oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist. Wenn man also bei Anwendung des obigen Verfahren niemals auf ein Vielfaches von B kommt, welches von A genau gemessen wird oder einem gewissen Vielfachen von A gleich ist, so sind die beiden Grössen A und B incommensurabel, welches der zweite Theil unserer Behauptung war.

Bei Anwendung des obigen Verfahrens auf zwei ungleiche ganze Zahlen a und b dividirt man mit der einen, etwa mit a, in die andere b hinein. Bleibt bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben b und dividirt in die Summe wieder mit a hinein. Bleibt auch bei dieser Division ein nicht verschwindender Rest, so addirt man zu demselben wieder b und dividirt in die Summe mit a hinein. Diese Operation setzt man so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, was nach dem Vorhergehenden im vorliegenden Falle offenbar immer endlich einmal Statt finden muss, weil zwei ganze Zahlen jederzeit commensurabel sind. Dann dividirt man mit der Anzahl der ausgeführten Divisionen in a hinein, und der auf diese Weise erhaltene Quotient ist nach dem oben Bewiesenen das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden ganzen Zahlen a und b.

Folgendes Schema stellt diese Operation im Allgemeinen dar:

$$1)\quad \begin{cases} b=aq_1+r_1,\ 0<r_1<a; \\ r_1+b=aq_2+r_2,\ 0<r_2<a; \\ r_2+b=aq_3+r_3,\ 0<r_3<a; \\ r_3+b=aq_4+r_4,\ 0<r_4<a; \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ r_{m-2}+b=aq_{m-1}+r_{m-1},\ 0<r_{m-1}<a; \\ r_{m-1}+b=aq_m. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m ist, so ist $\frac{a}{m}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Verwechselt man, was natürlich verstattet ist, a und b mit einander, so erhält man folgendes Schema:

$$2)\quad \begin{cases} a = bq_1' + r_1',\ 0 < r_1' < b; \\ r_1' + a = bq_2' + r_2',\ 0 < r_2' < b; \\ r_2' + a = bq_3' + r_3',\ 0 < r_3' < b; \\ r_3' + a = bq_4' + r_4',\ 0 < r_4' < b; \\ \text{u. s. w.} \\ r'_{m'-2} + a = bq'_{m'-1} + r'_{m'-1},\ 0 < r'_{m'-1} < b; \\ r'_{m'-1} + a = bq'_{m'}. \end{cases}$$

Weil die Anzahl der ausgeführten Divisionen m' ist, so ist $\frac{b}{m'}$ das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass von a und b.

Weil also sowohl $\frac{a}{m}$, als auch $\frac{b}{m'}$, das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b ist, so ist natürlich

$$3)\quad \frac{a}{m} = \frac{b}{m'},$$

also $m'a = mb$; und weil nun

$$a = m\frac{a}{m},\ b = m'\frac{b}{m'}$$

oder

$$a : \frac{a}{m} = m,\ b : \frac{b}{m'} = m'$$

ist, so müssen m und m' nothwendig relative Primzahlen sein, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ offenbar nicht das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b sein könnte. Wegen der Gleichung $m'a = mb$ geht aber m in $m'a$ und m' in mb auf; also muss nach einem sehr bekannten Satze, weil m und m' relative Primzahlen sind, m in a und m' in b aufgehen, oder das grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{a}{m} = \frac{b}{m'}$ der beiden ganzen Zahlen a und b ist jederzeit eine ganze Zahl.

Durch Addition der Gleichungen 1) erhält man, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$4)\quad mb = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_m);$$

und eben so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 2), wenn man wieder aufhebt, was sich aufheben lässt, die Gleichung

$$5)\quad m'a = b(q_1' + q_2' + q_3' + q_4' + \ldots + q'_{m'}).$$

Digitized by Google

Also ist nach 4):

$$6)\quad \frac{a}{m}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

und nach 5):

$$7)\quad \frac{b}{m'}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}.$$

Nach 3) und 7) ist

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}},$$

und nach 3) und 6) ist

$$\frac{b}{m'}=\frac{b}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Folglich ist jederzeit

$$8)\quad m=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_m$$

und

$$9)\quad m'=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m.$$

Also ist auch immer

$$10)\quad a:\frac{a}{m}=q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$

und

$$11)\quad b:\frac{b}{m'}=q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m;$$

und der in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückte Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ ist folglich jederzeit

$$\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m}.$$

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die beiden ganzen Zahlen 77 und 91, und setzen demzufolge $a=77$ und $b=91$.

Bringen wir nun zuvörderst das Schema 1) in Anwendung, so haben wir die folgende Rechnung auszuführen. Die derselben im Nachstehenden gegebene Anordnung hat man sich für alle ähnlichen Fälle zu merken, da nach unserer Ueberzeugung schon der grossen Einfachheit der Sache wegen sich eine bessere nicht finden lassen dürfte.

77|91|1
77
14
91
77|105|1
77
28
91
77|119|1
77
42
91
77|133|1
77
56
91
77|147|1
77
70
91
77|161|2
154
7
91
77|98|1
77
21
91
77|112|1
77
35
91
77|126|1
77
49
91
77|140|1
77
63
91
77|154|2
154
0

Hier ist $m=11$. Also ist $\frac{a}{m}=\frac{77}{11}=7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a=77$ und $b=91$.

Das Schema 2) führt zu der folgenden Rechnung:

Digitized by Google

91|77|0
0
77
77
91|154|1
91
63
77
91|140|1
91
49
77
91|126|1
91
35
77
91|112|1
91
21
77
91|98|1
91
7
77
91|84|0
0
84
77
91|161|1
91
70
77
91|147|1
91
56
77
91|133|1
91
42
77
91|119|1
91
28
77
91|105|1
91
14
77
91|91|1
91
0

Hier ist $m' = 13$. Also ist $\frac{b}{m'} = \frac{91}{13} = 7$ das grösste gemeinschaftliche Maass von $a = 77$ und $b = 91$.

Digitized by Google

Im ersten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m$$
$$=1+1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=13=m';$$

im zweiten Falle ist die Summe der Quotienten

$$q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}$$
$$=0+1+1+1+1+1+0+1+1+1+1+1+1=11=m,$$

ganz den Gleichungen 9) und 8) entsprechend. Der Ausdruck des Bruchs $\frac{77}{91}$ in den kleinsten Zahlen ist

$$\frac{77:7}{91:7}=\frac{11}{13}=\frac{m}{m'}=\frac{q_1'+q_2'+q_3'+q_4'+\ldots+q'_{m'}}{q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots+q_m},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier ganzen Zahlen kann die obige Methode, wie leicht in die Augen fällt, in vielen Fällen sehr weitläufig werden, und steht der gewöhnlichen Methode in jeder Beziehung nach. Im obigen Falle erfordert die gewöhnliche Methode nur die folgende äusserst leichte und kurze Rechnung:

$$\begin{array}{l|l|l}
77 & 91 & 1 \\
\underline{77} & & \\
14 & 77 & 5 \\
\underline{70} & & \\
7 & 14 & 2 \\
\underline{14} & & \\
0 & &
\end{array}$$

Also ist 7 das grösste gemeinschaftliche Maass von 77 und 91, wie vorher. Sind die beiden gegebenen Zahlen 43134 und 269087, so braucht man nach der gewöhnlichen Methode bloss die folgende Rechnung zu machen:

$$\begin{array}{l|l|l}
43134 & 269087 & 6 \\
\underline{258804} & & \\
10283 & 43134 & 4 \\
\underline{41132} & & \\
2002 & 10283 & 5 \\
\underline{10010} & & \\
273 & 2002 & 7 \\
\underline{1911} & & \\
91 & 273 & 3 \\
\underline{273} & & \\
0 & &
\end{array}$$

Also ist 91 das grösste gemeinschaftliche Maass von 43134 und 269087. In diesem Falle wäre, wenn man $a=43134$, $b=269087$ setzt,

Digitized by Google

$$\frac{a}{m}=\frac{43134}{m}=91,\ m=\frac{43134}{91}=474;$$

$$\frac{b}{m'}=\frac{269087}{m'}=91,\ m'=\frac{269087}{91}=2957.$$

Bei Anwendung des Schemas 1) würde man also 474, bei Anwendung des Schemas 2) dagegen sogar 2957 Divisionen zu machen haben, und die praktische Anwendung der obigen Methode würde folglich so gut wie unmöglich sein.

Dagegen bin ich der Meinung, dass in allen den Fällen, wo man durch wirkliche Abmessung das grösste gemeinschaftliche Maass zweier geraden Linien *A* und *B* mit möglichster Annäherung bestimmen soll, Poinsots Methode nicht ohne Werth ist, und vor der gewöhnlichen Methode des Euklides entschiedene Vorzüge besitzt. Man braucht nämlich nur eine der beiden gegebenen Linien, etwa die Linie *B*, auf einer unbestimmt langen geraden Linie von einem beliebigen Anfangspunkte an mehrere Male, und in einer des Folgenden wegen hinreichenden Anzahl, neben einander aufzutragen, worauf man von demselben Anfangspunkte an auf derselben geraden Linie die zweite gerade Linie *A* so oft neben einander aufträgt, bis ein Punkt dieser zweiten Theilung mit einem Punkte der ersten Theilung entweder völlig genau oder doch so genau, dass der Unterschied nicht mehr sinnlich wahrnehmbar ist, zusammenfällt. Findet dies nun, indem man sich den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der beiden Theilungen mit 0 bezeichnet denkt, zuerst bei dem *m*ten Theilpunkte der ersten Theilung Statt, so theilt man die Linie *A* in *m* gleiche Theile ein, und ein solcher Theil ist dann das gesuchte grösste gemeinschaftliche Maass der beiden gegebenen geraden Linien *A* und *B* entweder völlig genau oder doch mit einer so grossen Annäherung, als die Genauigkeit der angewandten Instrumente und die zu Gebote stehende Schärfe der Sinne zu erreichen gestatten.

Dass ein ganz ähnliches Verfahren auch bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Kreisbogen in Anwendung gebracht werden kann, fällt auf der Stelle in die Augen, wenn man nur überlegt, dass man von jedem beliebigen Punkte in der Kreislinie an die ganze Peripherie ungehindert willkührlich oft durchlaufen kann.

Endlich frägt sich noch, ob man auf die im Obigen entwickelten Principien nicht mit Vortheil für die Kürze und Deutlichkeit die Beweise mancher, die Incommensurabilität betreffender Sätze gründen kann, was, wenn es der Fall wäre, der obigen Methode jedenfalls in dieser Rücksicht zu besonderer Empfehlung gereichen würde. Desfallsige Versuche zu machen, überlasse ich den Lesern, werde denselben aber, wenn sie gelingen sollten, jederzeit gern eine Stelle im Archive einräumen.

Digitized by Google

XVI.

Ueber eine Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen.

Von
dem Herausgeber.

An die in dem vorhergehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen lässt sich, wenn man dieselben noch etwas weiter als dies in diesem Aufsatze geschehen ist verfolgt, die Entwickelung einer Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades anschliessen, welche von mir bei Anfertigung des vorhergehenden Aufsatzes, der auch mehrere mir eigenthümliche Betrachtungen enthält, gefunden wurde, und mir der Beachtung nicht ganz unwerth zu sein scheint, wenn sie auch öfters in ziemlich weitläufige Rechnungen führt.

Betrachten wir nämlich wieder das aus dem vorhergehenden Aufsatze bekannte Schema

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < a;\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < a;\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < a;\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4, \quad 0 < r_4 < a;\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{m-2} + b &= aq_{m-1} + r_{m-1}, \quad 0 < r_{m-1} < a;\\
r_{m-1} + b &= aq_m;
\end{aligned}$$

so überzeugen wir uns auf der Stelle, dass die nicht verschwindenden Reste

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_{m-1}$$

in allen Fällen sämmtlich unter einander ungleich sein müssen, weil, wenn unter diesen Resten zwei einander gleiche, die wir im Allgemeinen durch r_h und r_{h+i} bezeichnen wollen, vorkämen, nach der Natur des obigen Verfahrens offenbar die nicht verschwindenden Reste

Digitized by Google

$$r_h,\ r_{h+1},\ r_{h+2},\ r_{h+3},\ \ldots r_{h+i-1}$$

ins Unendliche wiederkehren müssten, man also niemals auf einen verschwindenden Rest kommen könnte, welches doch bekanntlich jederzeit endlich einmal der Fall sein muss.

Sind nun a und b relative Primzahlen, so ist deren grösstes gemeinschaftliches Maass $\frac{a}{m}$ (m. s. den vorhergehenden Aufsatz) die Einheit, und folglich $m=a$. Also können offenbar die $a-1$ nicht verschwindenden, sämmtlich unter einander ungleichen Reste

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \ldots . r_{a-1}$$

welche alle kleiner als a sind, nur die in einer gewissen Ordnung genommenen ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots .,\ a-1$$

sein, und es muss also unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots . r_{a-1}$$

in allen Fällen die Einheit vorkommen.

Bezeichnen wir jetzt denjenigen unter den Resten

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots . r_{a-1}$$

welcher der Einheit gleich ist, durch r_k, und setzen also $r_k=1$, so haben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1,\\
r_1 + b &= aq_2 + r_2,\\
r_2 + b &= aq_3 + r_3,\\
r_3 + b &= aq_4 + r_4,\\
&\text{u. s. w.}\\
r_{k-2} + b &= aq_{k-1} + r_{k-1},\\
r_{k-1} + b &= aq_k + 1;
\end{aligned}$$

durch deren Addition sich die Gleichung

$$bk = a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) + 1$$

oder

$$bk - a(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots + q_k) = 1$$

ergiebt.

Haben wir nun die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx - ay = 1,$$

wo a und b relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern nach dem Vorhergehenden offenbar die Werthe

$$x=k,\ y=q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots+q_k$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Haben wir ferner die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx+ay=1,$$

wo a und b wieder relative Primzahlen sind, aufzulösen, so liefern, weil nach dem Obigen

$$bk+a\{-(q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots+q_k)\}=1$$

ist, offenbar die Werthe

$$x=k,\ y=-(q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots+q_k)$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Ist die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx-ay=-1,$$

wo wieder a und b relative Primzahlen sind, gegeben, so kann man dieselbe immer auf die Form

$$ay-bx=1$$

bringen, und nun auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichung

$$bx-ay=1$$

auflösen.

Soll endlich die unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen

$$bx+ay=-1,$$

wo auch jetzt a und b relative Primzahlen sind, aufgelöst werden, so liefern, weil nach dem Obigen

$$b(-k)+a(q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots+q_k)=-1$$

ist, offenbar die Werthe

$$x=-k,\ y=q_1+q_2+q_3+q_4+\cdots+q_k$$

eine Auflösung dieser Gleichung.

Um das Vorhergehende auf ein Beispiel anzuwenden, wolle wir die Gleichung

$$12x-7y=1$$

betrachten. Da hier $a=7$, $b=12$ ist, so hat man Behufs der Auflösung dieser Gleichung folgende Rechnung zu machen:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{r|r|l}
7 & 12 & 1 \\
 & 7 & \\
\hline
 & 5 & \\
 & 12 & \\
\hline
7 & 17 & 2 \\
 & 14 & \\
\hline
 & 3 & \\
 & 12 & \\
\hline
7 & 15 & 2 \\
 & 14 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}
$$

Weil nun $k=3$ und $q_1+q_2+q_3=1+2+2=5$ ist, so ist $x=3$, $y=5$; und wirklich ist

$$12.3-7.5=1.$$

Für die Gleichung $12x+7y=1$ ist nach dem Obigen $x=3$, $y=-5$ eine Auflösung; und wirklich ist auch

$$12.3+7.(-5)=1.$$

Man kann diese Gleichung aber auch auf die Form

$$7y+12x=1$$

bringen, und durch folgende Rechnung eine neue Auflösung derselben finden:

$$
\begin{array}{r|r|l}
12 & 7 & 0 \\
 & 0 & \\
\hline
 & 7 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 14 & 1 \\
 & 12 & \\
\hline
 & 2 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 9 & 0 \\
 & 0 & \\
\hline
 & 9 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 16 & 1 \\
 & 12 & \\
\hline
 & 4 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 11 & 0 \\
 & 0 & \\
\hline
 & 11 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 18 & 1 \\
 & 12 & \\
\hline
 & 6 & \\
 & 7 & \\
\hline
12 & 13 & 1 \\
 & 12 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}
$$

Also ist $k=7$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+q_7=0+1+0+1+0+1+1=4,$$

folglich nach dem Obigen $x=-4$, $y=7$ eine Auflösung unserer Gleichung; und in der That ist auch

$$12.(-4)+7.7=1.$$

Wenn die Gleichung

$$12x-7y=-1$$

gegeben ist, so bringt man dieselbe auf die Form

$$7y-12x=1,$$

und erhält durch eine der unmittelbar vorhergehenden ganz gleiche Rechnung die Auflösung $x=4$, $y=7$; und in der That ist auch

$$12.4-7.7=-1.$$

Hat man endlich die Gleichung

$$12x+7y=-1 \text{ oder } 7y+12x=-1$$

aufzulösen, so findet man nach dem Obigen leicht die beiden Auflösungen $x=-3$, $y=5$ und $x=4$, $y=-7$; und in der That ist auch

$$12.(-3)+7.5=-1 \text{ und } 12.4+7.(-7)=-1.$$

Eine Auflösung der Gleichung

$$15x+22y=1$$

ergiebt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r|r|l} 22 & 15 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 15 & \\ & 15 & \\ \hline 22 & 30 & 1 \\ & 22 & \\ \hline & 8 & \\ & 15 & \\ \hline 22 & 23 & 1 \\ & 22 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

Weil nun $k=3$ und

$$q_1+q_2+q_3=0+1+1=2$$

ist, so ist nach dem Obigen $x=3$, $y=-2$ eine Auflösung unserer Gleichung; und in der That ist auch

$$15.3+22.(-2)=1.$$

Eine zweite Auflösung ergiebt sich mittelst der folgenden Rechnung:

Digitized by Google

15 | 22 | 1
15
7
22
15 | 29 | 1
15
14
22
15 | 36 | 2
30
6
22
15 | 28 | 1
15
13
22
15 | 35 | 2
30
5
22
15 | 27 | 1
15
12
22
15 | 34 | 2
30
4
22
15 | 26 | 1
15
11
22
15 | 33 | 2
30
3
22
15 | 25 | 1
15
10
22
15 | 32 | 2
30
2
22
15 | 24 | 1
15
9
22
15 | 31 | 2
30
1

Digitized by Google

Also ist $k=13$ und

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+\cdots+q_{13}$$
$$=1+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2+1+2=19,$$

folglich nach dem Obigen $x=-19$, $y=13$; und in der That ist auch

$$15.(-19)+22.13=1.$$

Dass durch das Obige die vollständige Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei unbekannten Grössen gegeben ist, kann aus den Elementen der Algebra als bekannt vorausgesetzt werden, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Es frägt sich, ob sich das obige völlig allgemeine, und in theoretischer Rücksicht, wie ich glaube, höchst einfache Verfahren, nicht durch zweckmässige Abkürzungen, deren es in vielen Fällen allerdings sehr bedarf, für die Praxis brauchbarer machen lässt. Desfallsige Mittheilungen von Seiten der Leser würden mir, da anderweitige Arbeiten mich zur Zeit hindern, das Obige noch weiter zu verfolgen, sehr angenehm sein, und immer so bald als irgend möglich im Archive abgedruckt werden.

XVII.

Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre.

Von

dem Herausgeber.

In der Abhandlung: Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. Par M. Poinsot, welche in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Janvier et Février 1845. p. 1.—p. 101. abgedruckt ist, hat der berühmte Verfasser die Beweise mehrerer der wichtigsten Sätze der Zahlenlehre auf so eigenthümliche und an sich so einfache Betrachtungen gegründet, dass wir durch eine Darstellung dieser Beweise, die wir im Folgenden zu geben versuchen wollen, die Leser des

Digitized by Google

Archivs uns zu verbinden hoffen. Ausser diesen von Poinsot „Démonstrations nouvelles tirées de la considération de l'ordre“ genannten Beweisen, auf die wir uns in dem vorliegenden Aufsatze absichtlich beschränken werden, enthält übrigens die genannte Abhandlung noch mehrere andere neue Beweise und eigenthümliche Untersuchungen, deren Mittheilung in dem Archive wir uns für die Folge noch vorbehalten.

§. 1.

Auf dem Umfange eines Kreises denken wir uns in einer bestimmten Ordnung und sämmtlich in gleichen Abständen von einander eine beliebige Anzahl, etwa n, Punkte, welche also den Umfang des Kreises in n gleiche Theile theilen.

Einen dieser Punkte werden wir immer als den Anfangspunkt oder den Nullpunkt annehmen und durch 0, die auf denselben in der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte folgenden Punkte aber nach der Reihe durch $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n, 2n+1, 2n+2, \ldots$ bezeichnen, so dass nämlich mit den durch

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

bezeichneten Punkten respective die durch

$$n, n+1, n+2, n+3, \ldots, 2n-1$$

bezeichneten Punkte, ferner wieder die durch

$$2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3, \ldots, 3n-1$$

bezeichneten Punkte, eben so wieder die durch

$$3n, 3n+1, 3n+2, 3n+3, \ldots, 4n-1$$

bezeichneten Punkte, u. s. w. zusammenfallen.

Wenn nun die in Rede stehenden Punkte von dem 0ten an nach der zu Grunde gelegten Ordnung aller Punkte so durchlaufen werden, dass man von dem 0ten zum $i$ten, vom $i$ten zum $2i$ten, vom $2i$ten zum $3i$ten, vom $3i$ten zum $4i$ten u. s. w. übergeht, so wollen wir im Folgenden der Kürze wegen sagen, dass man die Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen habe, oder wir wollen dies ein Durchlaufen der Punkte mit dem Intervalle i nennen.

Alles dieses vorausgesetzt, lässt sich nun zuvörderst der nachstehende Lehrsatz, welcher als die Hauptgrundlage alles Folgenden zu betrachten ist, beweisen.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden, so trifft man immer endlich einmal wieder auf den Nullpunkt; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist man auf keinen Punkt

mehr als *ein* Mal getroffen; wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, hat man, wenn wir das grösste gemeinschaftliche Maass von n und i durch μ bezeichnen, die ganze Peripherie $\frac{i}{\mu}$ Mal durchlaufen; bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist mit Einrechnung des Nullpunktes $\frac{n}{\mu}$ die Anzahl der überhaupt getroffenen verschiedenen Punkte.

Beweis. Bezeichnen wir die ganze Peripherie mit Π, so ist $\frac{\Pi}{n}$ jeder der n gleichen Theile, in welche die Peripherie durch die n Punkte getheilt wird. Durchläuft man also die Punkte mit dem Intervalle i, so geht man dabei jedesmal über den Theil $i\frac{\Pi}{n}$ der Peripherie hinweg, und weil nun

$$ni\frac{\Pi}{n} = in\frac{\Pi}{n} = i\Pi$$

ist, so muss man offenbar, spätestens nachdem mit Einrechnung des Nullpunktes als Anfangspunkt der Bewegung n Punkte getroffen worden sind, jederzeit wieder auf den Nullpunkt zurückkehren, womit der erste Theil unsers Satzes bewiesen ist.

Entsprechen die Zahlen ki und $k'i$, wo k' grösser als k sein soll, einem und demselben von dem Nullpunkte verschiedenen Punkte, so ist offenbar

$$(k'-k)\,i\frac{\Pi}{n}$$

ein Vielfaches $m\Pi$ von Π, also

$$(k'-k)\,i\frac{\Pi}{n} = m\Pi,$$

und folglich

$$(k'-k)i = mn,$$

d. i. $(k'-k)i$ ein Vielfaches von n. Daher trifft der Punkt, welchem die Zahl $(k'-k)i$ entspricht, mit dem Nullpunkte zusammen, und es muss also, weil $(k'-k)i$ kleiner als $k'i$ ist, bevor man auf den Punkt, welchem die Zahl $k'i$ entspricht, trifft, der Nullpunkt mindestens schon ein zweites Mal getroffen worden sein. Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar der zweite Theil unseres Satzes, dass nämlich, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, kein Punkt zwei Mal getroffen werden kann.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dass man, wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, die ganze Peripherie q Mal durchlaufen habe, so ist offenbar, da die ganze Peripherie in n gleiche Theile getheilt ist und jedes Intervall i solcher Theile enthält, qn das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird. Also ist $\frac{i}{q}$ der grösste aliquote Theil von i, von

Digitized by Google

welchem n gemessen wird, wie sich leicht auf folgende Art zeigen lässt. Weil qn ein Vielfaches von i ist, so sei $qn=pi$. Dann ist $n=p\frac{i}{q}$, und n wird also von $\frac{i}{q}$ gemessen. Würde nun n auch von $\frac{i}{q'}$, wo $q'<q$ sein soll, gemessen, so sei $n=p'\frac{i}{q'}$. Dann wäre $q'n=p'i$, und qn wäre folglich offenbar nicht das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird, was gegen das Obige streitet. Folglich ist, wie vorher behauptet wurde, $\frac{i}{q}$ der grösste aliquote Theil von i, von welchem n gemessen wird, d. h. $\frac{i}{q}$ ist das grösste gemeinschaftliche Maass von n und i, also $\frac{i}{q}=\mu$, und folglich $q=\frac{i}{\mu}$, welches der dritte Theil des zu beweisenden Satzes war.

Bezeichnen wir endlich die Anzahl aller verschiedenen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, getroffenen Punkte, mit Einrechnung des Nullpunkts als Anfangspunkt der Bewegung, durch x, so ist offenbar

$$xi\frac{\Pi}{n}=q\Pi=\frac{i}{\mu}\Pi,$$

woraus auf der Stelle $x=\frac{n}{\mu}$ folgt, wie im vierten Theile des zu beweisenden Satzes behauptet wurde.

Unser Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

§. 3.

Wenn n und i relative Primzahlen sind, so ist $\mu=1$, also $\frac{i}{\mu}=i$ und $\frac{n}{\mu}=n$, was unmittelbar auf den folgenden Satz führt.

Erster Zusatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden und n und i relative Primzahlen sind, so hat man, wenn man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, die ganze Peripherie i Mal durchlaufen, und bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, ist man auf jeden der n Punkte *ein* Mal getroffen.

Dieser Satz kann aber auch auf folgende Art umgekehrt werden

Zweiter Zusatz. Wenn die n Punkte mit dem Intervalle i durchlaufen werden, und, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, jeder der n Punkte getroffen worden ist, so sind n und i jederzeit relative Primzahlen.

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich offenbar in das niedrigste Vielfache von n, welches von i gemessen wird, weil, wenn $i'<i$ und $i'n=pi$ wäre, $p<n$ sein, und daher schon

wenn man die ganze Peripherie nur i' Mal durchlaufen hätte, der Nullpunkt wieder getroffen werden würde, nachdem man vorher über nur p, d. h. weniger als n Punkte hinweggegangen wäre, was gegen die Voraussetzung streitet. Also ist $\frac{i}{i}$ der grösste aliquote Theil von i, von welchem n gemessen wird, was sich auf dieselbe Weise wie in dem ähnlichen Falle in dem dritten Theile des Beweises des vorhergehenden Lehrsatzes zeigen lässt. Daher ist $\frac{i}{i}=1$ das grösste gemeinschaftliche Maas von n und i, und n und i sind folglich relative Primzahlen, wie behauptet wurde.

Dritter Zusatz. Wenn daher bei jedem Intervalle, mit welchem man die n Punkte auch durchlaufen mag, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft, alle n Punkte getroffen werden, so ist n jederzeit eine Primzahl.

Vierter Zusatz. Die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit allen Zahlen, die zu n relative Primzahlen sind, als Intervallen durchläuft, ist jederzeit der Anzahl der Zahlen gleich, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind.

Für jede zwei Intervalle, welche zu n relative Primzahlen und kleiner als n sind, müssen die Ordnungen, in denen die n Punkte durchlaufen werden, nothwendig von einander verschieden sein, wie auf der Stelle in die Augen fällt, wenn man nur überlegt, dass unter dieser Voraussetzung die unmittelbar auf den Nullpunkt folgenden Punkte in den beiden Ordnungen offenbar jederzeit von einander verschieden sein müssen. Wenn aber i zu n relative Primzahl und grösser als n ist, so ist, wenn

$$i=kn+i'$$

gesetzt wird, wo $i'<n$ sein soll, offenbar auch i' zu n relative Primzahl; und da ein Durchlaufen der n Punkte mit dem Intervalle i augenscheinlich ganz zu der nämlichen Ordnung dieser Punkte führen muss, wie ein Durchlaufen derselben mit dem Intervalle i', so ist klar, dass jedes Durchlaufen mit einem Intervalle, welches zu n relative Primzahl und grösser als n ist, zu einer Ordnung der n Punkte führen muss, welche schon früher bei einem Durchlaufen dieser n Punkte mit einem Intervalle, das zu n relative Primzahl und kleiner als n ist, herbeigeführt wurde. Verbindet man dies mit dem Obigen, so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn n mit a und b relative Primzahl ist, so sind auch n und das Product ab relative Primzahlen.

Digitized by Google

Beweis. Wenn man auf dem Umfange eines Kreises n Punkte auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Weise anordnet und dieselben dann mit dem Intervalle a durchläuft, so werden, weil nach der Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Nimmt man jetzt die n Punkte in der Ordnung, in welcher sie bei diesem Durchlaufen mit dem Intervalle a nach und nach getroffen werden, und durchläuft sie in dieser Ordnung mit dem Intervalle b, so werden, weil nach der Voraussetzung auch n und b relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. wieder alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Auf der Stelle erhellet aber, dass diese beiden Operationen zusammen ganz auf die eine hinauslaufen, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit dem Intervalle ab durchläuft, und man sieht also aus dem Vorhergehenden, dass, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit dem Intervalle ab durchläuft, alle n Punkte getroffen werden, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Daher sind nach §. 3. Zweiter Zusatz. n und das Product ab relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

Aus dem vorhergehenden, für die ganze Zahlenlehre bekanntlich höchst wichtigen Satze, der sich, wenn auch unter einer etwas anderen Form, schon im siebenten Buche der Elemente des Euklides findet, lassen sich viele Folgerungen ziehen, von denen wir hier nur die folgenden in der Kürze hervorheben wollen.

Erster Zusatz. Wenn n mit jeder der Zahlen a, b, c, d, e,.... relative Primzahl ist, so sind auch n und das Product $abcde$.... relative Primzahlen.

Weil nämlich nach der Voraussetzung n mit a und b relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product ab relative Primzahlen. Weil also n mit c und ab relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product abc relative Primzahlen. Weil folglich n mit d und abc relative Primzahl ist, so sind nach §. 4. auch n und das Product $abcd$ relative Primzahlen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und die allgemeine Gültigkeit unsers Satzes fällt daher in die Augen.

Zweiter Zusatz. Wenn n mit a relative Primzahl ist, so sind auch n und die Potenz a^k jederzeit relative Primzahlen.

Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze, wenn man $a=b=c=d=e=$.... setzt.

Dritter Zusatz. Wenn die Zahl n, welche mit jeder der Zahlen a, b, c, d, e,.... relative Primzahl ist, in dem Producte $\alpha abcde$... aufgeht, so geht n jederzeit in α auf.

Bezeichnen wir das grösste gemeinschaftliche Maass von α und n durch μ, und setzen $\alpha=\lambda\mu$ und $n=\lambda'\mu$, so sind λ und λ' relative Primzahlen. Weil nun

$$\frac{\alpha abcde....}{n} = \frac{\lambda\mu abcde....}{\lambda'\mu} = \frac{\lambda abcde....}{\lambda'}$$

ist, und nach der Voraussetzung n in $\alpha abcde....$ aufgeht, so geht auch λ' in $\lambda abcde....$ auf. So wie aber n mit $a, b, c, d, e,....$ relative Primzahl ist, so ist natürlich auch λ' mit $a, b, c, d, e,....$ relative Primzahl, und λ' ist folglich mit $\lambda, a, b, c, d, e,....$, also nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit $\lambda abcde....$ relative Primzahl. Daher kann λ' nur dann in $\lambda abcde....$ aufgehen, wenn $\lambda'=1$ ist. Folglich ist $\lambda'=1$, also nach dem Obigen $n=\mu$, und daher $\alpha=\lambda n$, so dass also n in α aufgeht, wie behauptet wurde.

Vierter Zusatz. Jede Zahl n kann nur auf eine einzige Art in von der Einheit verschiedene Primfactoren zerlegt werden.

Sei nämlich, wenn sowohl $a, b, c, d,....$, als auch $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, sämmtlich unter einander und von der Einheit verschiedene Primzahlen bezeichnen, und die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta,....$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1,....$ sämmtlich grösser als Null sind, $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta....$ und $n=a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....$; so lässt sich auf folgende Art zeigen, dass die Producte

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.... \text{ und } a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....$$

identisch sein müssen.

Weil nach der Voraussetzung

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.... = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....$$

und α grösser als Null ist, so ist $a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....$ durch a theilbar. Käme nun die von der Einheit verschiedene Primzahl a unter den von der Einheit verschiedenen, unter einander ungleichen Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ nicht vor, so wäre a mit jeder der Zahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, also nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch mit jeder der Potenzen $a_1^{\alpha_1}, b_1^{\beta_1}, c_1^{\gamma_1}, d_1^{\delta_1},.....$, und folglich nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit dem Producte $a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....$ relative Primzahl, könnte folglich natürlich in diesem Producte nicht aufgehen, was gegen das Obige streitet. Also muss die Primzahl a unter den Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ vorkommen. Auf dieselbe Art muss aber überhaupt jede der Primzahlen $a, b, c, d,..$ unter den Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$, und eben so umgekehrt jede der Primzahlen $a_1, b_1, c_1, d_1,....$ unter den Primzahlen $a, b, c, d,....$ vorkommen, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die beiden Producte $abcd...$ und $a_1 b_1 c_1 d_1...$ identisch sind. Also könnte eine Verschiedenheit der einander gleichen Producte

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta.... \text{ und } a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} d_1^{\delta_1}....,$$

in denen wir nun $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, $d=d_1$, u. s. w. zu setzen berechtigt sind, nur in einer Verschiedenheit der Exponenten α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1, u. s. w. begründet sein. Wäre aber z. B. $\alpha > \alpha_1$, so würde sich aus der Gleichung

Digitized by Google

$$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots = a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}\ldots\ldots$$

die Gleichung

$$a^{\alpha-\alpha}\,b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots = b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}\ldots\ldots,$$

wo $\alpha-\alpha_1>0$ ist, ergeben, und das Product $b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}\ldots$. würde also durch a theilbar sein. Weil aber die von der Einheit verschiedene Primzahl a unter den von der Einheit verschiedenen Primzahlen b, c, d,.... oder b_1, c_1, d_1,.... nach dem Obigen nicht vorkommt, so ist a mit jeder der Zahlen b_1, c_1, d_1,...., also nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch mit jeder der Potenzen $b_1^{\beta_1}$, $c_1^{\gamma_1}$, $d_1^{\delta_1}$,... ., und folglich nach dem vorhergehenden Ersten Zusatze auch mit dem Producte $b_1^{\beta_1}\,c_1^{\gamma_1}\,d_1^{\delta_1}\ldots\ldots$ relative Primzahl, kann also in diesem Producte natürlich nicht aufgehen, was gegen das Obige streitet. Daher ist $\alpha=\alpha_1$, und ganz eben so $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, $\delta=\delta_1$, u. s. w. Weil nun $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, $d=d_1$, u. s. w. und $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, $\delta=\delta_1$, u. s. w. ist, so sind die Producte

$$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots. \text{ und } a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}d_1^{\delta_1}\ldots.$$

identisch, und die Zerlegung der Zahl n in von der Einheit verschiedene Primfactoren ist folglich immer nur auf eine Art möglich, wie bewiesen werden sollte.

Fünfter Zusatz. Wenn die Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a}$ durch keine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, so giebt es auch keinen dieser Wurzelgrösse gleichen Bruch.

Wäre $\sqrt[n]{a}=\frac{x}{y}$, wo, wie anzunehmen offenbar verstattet ist, x und y relative Primzahlen sein sollen, und der Voraussetzung des Satzes gemäss y grösser als die Einheit angenommen wird, so wäre $a=\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$, und folglich $\frac{x^n}{y}=ay^{n-1}$, also $\frac{x^n}{y}$ eine ganze Zahl. Weil aber x und y relative Primzahlen sind, so sind nach dem vorhergehenden Zweiten Zusatze auch x^n und y relative Primzahlen, und $\frac{x^n}{y}$ kann also, weil y grösser als die Einheit ist, offenbar keine ganze Zahl sein, was gegen das Vorhergehende streitet. Folglich kann unter den gemachten Voraussetzungen nicht $\sqrt[n]{a}=\frac{x}{y}$ sein, wie behauptet wurde.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn x und n relative Primzahlen sind, und p die Anzahl der Zahlen bezeichnet, welche kleiner als n und mit n relative Primzahlen sind, so ist x^p-1 immer durch n theilbar oder ein Vielfaches von n.

Beweis. Auf dem Umfange eines Kreises ordne man n Punkte auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Art. Diese n

Punkte durchlaufe man mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Nun nehme man die n Punkte in der Ordnung, in welcher sie jetzt getroffen worden sind, und durchlaufe sie von Neuem mit dem Intervalle x, so trifft man, weil nach der Voraussetzung n und x relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. wieder auf alle n Punkte, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Setzt man aber dieses Verfahren auf dieselbe Art weiter fort, so erhält man dadurch offenbar ganz dieselben Ordnungen der n Punkte, welche man erhält, wenn man dieselben nach und nach mit den Intervallen x, x^2, x^3, x^4,.... durchläuft. Da nun nach der Voraussetzung x, und nach §. 5. Zweiter Zusatz. also auch die sämmtlichen Potenzen von x mit n relative Primzahlen sind, so kann nach §. 3. Vierter Zusatz. die Anzahl der verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche man auf die obige Weise erhält, nicht grösser als p sein, und es muss folglich immer eine Ordnung der n Punkte wiederkehren. Die erste wiederkehrende Ordnung der n Punkte muss aber nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung derselben sein, weil offenbar ganz aus denselben Gründen, aus welchen eine spätere von der ersten ursprünglichen Ordnung verschiedene Ordnung wiedergekehrt sein sollte, schon früher die erste ursprüngliche Ordnung selbst wiedergekehrt sein müsste.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der auf die obige Weise erhaltenen verschiedenen Ordnungen der n Punkte durch p', so ist $p' \leqq p$. Wenn aber $p' < p$ ist, so lässt sich auf folgende Art leicht übersehen, dass p jederzeit ein Vielfaches von p' sein muss. Denken wir uns nämlich eine beliebige unter den auf die obige Weise erhaltenen sämmtlich unter einander verschiedenen p' Ordnungen der n Punkte nicht vorkommende Ordnung, so führt diese Ordnung, wenn man auf dieselbe das nämliche Verfahren wie vorher anwendet, natürlich auch auf p' sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen, welche aber nothwendig auch sämmtlich von den ersten unter einander verschiedenen p' Ordnungen verschieden sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, wie leicht erhellen wird, die ersten Ordnungen in den beiden Systemen nothwendig identisch sein müssten, was gegen die Voraussetzung streitet. Gäbe es nun noch eine weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommende Ordnung der n Punkte, so würde diese, wenn man sie dem obigen Verfahren unterwirft, auf dieselbe Weise wie vorher wieder zu p' weder in dem ersten, noch in dem zweiten Systeme vorkommenden, unter einander verschiedenen Ordnungen führen. Setzt man diese Betrachtungen weiter fort und überlegt, dass nach §. 3. Vierter Zusatz. p die Anzahl aller überhaupt möglichen Ordnungen der n Punkte ist, so ist ersichtlich, dass p ein Vielfaches von p' sein muss, und daher $p = mp'$ gesetzt werden kann.

Weil nun nach dem Vorhergehenden, wenn man die n Punkte mit dem Intervalle $x^{p'}$ durchläuft, deren ursprüngliche Ordnung wieder herbeigeführt wird, so muss die Potenz $x^{p'}$ offenbar nothwendig einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich sein. Durch successive Multiplication oder auch mittelst

Digitized by Google

des Binomischen Lehrsatzes erhellet aber sogleich, dass dann auch jede Potenz von $x^{p'}$, und folglich auch $(x^{p'})^m = x^{mp'}$, d. h. nach dem Obigen x^p, einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich, oder, was dasselbe ist, $x^p - 1$ durch n theilbar oder ein Vielfaches von n ist, wie behauptet wurde.

§. 7.

Wenn n eine in x nicht aufgehende Primzahl ist, so sind x und n relative Primzahlen, und die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$$

sind offenbar alle Zahlen, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind. Da nun $n-1$ die Anzahl dieser Zahlen ist, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Lehrsatze unmittelbar der folgende Satz.

Zusatz. Wenn n eine in x nicht aufgehende Primzahl ist, so ist $x^{n-1}-1$ jederzeit durch n theilbar.

Ist z. B. $x=12$, $n=7$, so ist $12^6-1=2985983$ und $(12^6-1):7 = 426569$.

Dieser wichtige und merkwürdige Satz wird bekanntlich in der Zahlenlehre Fermat's Satz genannt.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ die sämmtlichen Zahlen sind, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind, so ist immer die eine der beiden Grössen

$$abcdefg\ldots. \pm 1$$

durch n theilbar oder ein Vielfaches von n, wobei wir n grösser als die Einheit annehmen.

Beweis. Auf dem Umfange eines Kreises ordne man auf die aus dem Vorhergehenden bekannte Art n Punkte, und durchlaufe dieselben mit dem Intervalle a, so werden, weil nach der Voraussetzung a und n relative Primzahlen sind, nach §. 3. Erster Zusatz. alle n Punkte getroffen, bevor man das zweite Mal auf den Nullpunkt trifft. Durchläuft man nun die n Punkte in der neuen Ordnung, in welcher sie jetzt getroffen worden sind, nach und nach mit jeder der Zahlen

$$a, b, c, d, e, f, g, \ldots.$$

d. h. mit jeder Zahl, welche kleiner als n und zu n relative Primzahl ist, als Intervall, so erhält man, wenn p die Anzahl der obigen Zahlen bezeichnet, alle p verschiedenen Ordnungen der n Punkte, welche nach §. 3. Vierter Zusatz. jetzt überhaupt nur möglich sind. Ganz zu denselben Ordnungen muss man aber offenbar geführt werden, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

Digitized by Google

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots,$$

welche nach §. 4. sämmtlich zu n relative Primzahlen sind, durchläuft. Wenn man also die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots$$

durchläuft, so erhält man nach dem Vorhergehenden p sämmtlich von einander verschiedene Ordnungen der n Punkte; und da nun nach §. 3. Vierter Zusatz. überhaupt nur p verschiedene Ordnungen der n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung möglich sind, so muss unter den p verschiedenen Ordnungen, welche man erhält, wenn man die n Punkte in ihrer ursprünglichen Ordnung mit den Intervallen

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ ag,\ldots\ldots$$

durchläuft, jederzeit nothwendig die erste ursprüngliche Ordnung der n Punkte selbst vorkommen. Also muss unter den obigen Producten immer eins vorkommen, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist. Wäre dieses Product aber das erste Glied der obigen Reihe, nämlich aa, und wäre also

$$aa = kn + 1,$$

so wäre

$$a(n-a) = an - aa = (a-k)n - 1,$$

und folglich das Product $a(n-a)$ einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich. $n-a$ ist offenbar kleiner als n, und kann nicht gleich a sein, weil, wenn $n-a=a$ wäre, $n=2a$ wäre, und daher n nur dann mit a relative Primzahl sein könnte, wenn $a=1$ wäre; dann wäre aber $n=2$, welchen Fall wir, weil in demselben die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes auf der Stelle erhellet, auszuschliessen berechtigt sind. Ferner fällt leicht in die Augen, dass $n-a$ jederzeit mit n relative Primzahl ist, weil, wenn $n-a=\lambda\mu$, $n=\lambda'\mu$, wo μ grösser als die Einheit sein soll, wäre, offenbar $a=(\lambda'-\lambda)\mu$, und daher a mit n nicht relative Primzahl sein würde. Hieraus sieht man, dass $n-a$ jederzeit in der Reihe der Zahlen $b, c, d, e, f, g,\ldots$ vorkommen muss, und es erhellet nun, dass sich die Zahlen $a, b, c, d, e, f, g,\ldots$ immer so zu Producten mit zwei ungleichen Factoren unter einander verbinden lassen, dass jedes dieser Producte entweder einem um die Einheit vermehrten oder einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich ist. Leicht lässt sich endlich auch zeigen, dass unter diesen Producten nicht zwei von der Form ab und ac, wo a, b, c unter einander ungleich sein sollen, vorkommen können. Sollte nämlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$ab = qn \pm 1,\ ac = q'n \pm 1$$

sein können, so wäre

$$a(b-c) = (q-q')n,$$

und folglich $a(b-c)$, also nach §. 5. Dritter Zusatz., weil nach der

Digitized by Google

Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, $b-c$ durch n theilbar, was ungereimt ist, da unter den gemachten Voraussetzungen das nicht verschwindende $b-c$ offenbar kleiner als das die Einheit übersteigende n ist. Sollte aber

$$ab = qn+1,\ ac = q'n-1$$

sein können, so wäre, wie aus dem Obigen sich unmittelbar ergiebt, $a+c=n$, also $c=n-a$, und folglich

$$ab = qn+1,\ a(n-a) = q'n-1,$$

also, wenn man addirt:

$$a(n-a+b) = a(n-(a-b)) = (q+q')n.$$

Daher wäre $a(n-(a-b))$, und folglich nach §. 5. Dritter Zusatz., weil nach der Voraussetzung n und a relative Primzahlen sind, $n-(a-b)$, also auch $a-b$ durch n theilbar, was ganz aus denselben Gründen wie vorher bei $b-c$ ungereimt ist.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass man jederzeit das Product *abcdefg....* auf eine solche Weise in lauter Producte mit zwei Factoren zerlegen kann, dass jedes dieser Producte mit zwei Factoren, durch deren Multiplication in einander das Product *abcdefg....* entsteht, entweder ein um die Einheit vermehrtes oder ein um die Einheit vermindertes Vielfaches von n ist, woraus ferner durch successive Multiplication auf der Stelle folgt, dass immer das Product *abcdefg....* selbst entweder ein um die Einheit vermehrtes oder ein um die Einheit vermindertes Vielfaches von n ist, oder dass immer eine der beiden Grössen

$$abcdefg.... \pm 1$$

durch n theilbar sein muss, wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Wenn n eine Primzahl ist, so sind

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1$$

die sämmtlichen Zahlen, welche kleiner als n und mit n relative Primzahlen sind. Kommt nun unter den Producten mit zwei Factoren, in welche sich auf die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Art das Product

$$1.2.3.4.5....(n-1)$$

zerlegen lässt, das Product

$$x(n-x) = qn-1$$

vor, so ist

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) = (x-q)n,$$

Digitized by Google

und es muss also die in dem Producte $(x-1)(x+1)$ aufgehende Primzahl n entweder in $x-1$ oder in $x+1$ aufgehen. Geht aber n in $x-1$ auf, und ist also $x-1=q'n$, so ist

$$x=q'n+1.$$

Wäre nun $q'>0$, so wäre $x>n$, was gegen die Voraussetzung ist, und es ist folglich $q'=0$, also $x=1$. Geht ferner n in $x+1$ auf, und ist also $x+1=q''n$, so ist

$$x=n-1+(q''-1)n.$$

Wäre nun $q''>1$, so wäre $x>n-1$, was gegen die Voraussetzung ist, und es muss folglich, weil in diesem Falle offenbar q'' nicht verschwinden kann, $q''=1$, also $x=n-1$ sein. Folglich ist entweder $x=1$ oder $x=n-1$. Für $x=1$ ist

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

und für $x=n-1$ ist auch

$$x(n-x)=1.(n-1),$$

so dass also immer

$$x(n-x)=1.(n-1)$$

ist. Nimmt man hierzu, dass offenbar, wenn $n-k$ irgend ein Glied der Reihe 2, 3, 4, 5, ..., $n-1$ bezeichnet, niemals

$$1.(n-k)=q'''n+1$$

sein kann, und dass sich also 1 mit keiner der Zahlen 2, 3, 4, 5, ..., $n-1$ zu einem Producte verbinden lässt, welches einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, so wird leicht erhellen, dass unter den Producten mit zwei Factoren, in welche sich auf die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Art das Product $1.2.3.4....(n-1)$ zerlegen lässt, immer das Product $1.(n-1)=1.n-1$ vorkommen muss, dass aber jedes andere dieser Producte einem um die Einheit vermehrten Vielfachen von n gleich ist, woraus sich ferner mittelst successiver Multiplication sogleich ergiebt, dass das Product $1.2.3.4.5....(n-1)$ immer einem um die Einheit verminderten Vielfachen von n gleich, oder dass jederzeit die Grösse

$$1.2.3.4.5....(n-1)+1$$

durch n theilbar ist, welches uns zu dem folgenden Satze führt:

Wenn n eine Primzahl ist, so ist die Grösse

$$1.2.3.4.5....(n-1)+1$$

jederzeit durch n theilbar.

Dieser wichtige und merkwürdige Satz wird in der Zahlenlehre bekanntlich Wilsons Satz genannt.

Digitized by Google

XVIII.

Die Epochen der Geschichte der Menschheit; eine historisch-philosophische Skizze

von

Dr. E. F. Apelt,

ausserordentlichem Professor zu Jena.

Erster Band. Jena. Hochhausen 1845 *).

Die Leser des Archives werden sich vielleicht wundern, hier die Anzeige eines Werkes zu finden, das dem Titel nach nicht unter diejenigen zu gehören scheint, welche in demselben besprochen zu werden pflegen. Gleichwohl ist dasselbe der Mathematik und Physik sehr nahe verwandt, in so fern es das Verhältniss betrachtet, in welchem die genannten Wissenschaften zu dem Ganzen unserer wissenschaftlichen Erkenntniss überhaupt stehen und den im Verlaufe der Geschichte hervortretenden Einfluss schildert, welchen die fortschreitende Ausbildung der Naturwissenschaften (im weitesten Sinne) auf die geistige Cultur ausgeübt hat und noch ausübt. Am meisten macht sich dieser Einfluss da geltend, wo wir es mit geschichtlichen Ueberlieferungen zu thun haben, die nach unserer jetzigen Kenntniss der Naturgesetze viel von ihrer sonstigen Glaubwürdigkeit verlieren müssen. Seit die Naturwissenschaften aufkamen, haben die Wunder aufgehört und die Weissagungen sind verstummt; der teleskopische Blick hat das scheinbare Dach des Himmels durchbrochen, hinter welchem sonst der fromme Glaube die Wohnung der unsterblichen Geister suchte, jenes Firmament der Alten, das man als die gemeinschaftliche Gränze der sichtbaren Körperwelt und der unsichtbaren Geister-

---

*) Schon aus Archiv. Thl. 1. Nr. XII. und Nr. XXXIV. ist bekannt und ersichtlich, dass auch ausführlichere Anzeigen wissenschaftlicher, in das Gebiet des Archivs einschlagender Werke in diese Zeitschrift selbst, nicht bloss in den Literarischen Bericht, aufgenommen werden sollen. Obgleich nun vorliegende Anzeige von ihrem unterzeichneten Herrn Vf. mir für den Literarischen Bericht zugesandt war, so habe ich es, des interessanten Inhalts derselben wegen, doch vorgezogen, sie dem Archive selbst einzuverleiben. G.

Digitized by Google

welt zu betrachten gewohnt war; die grossen astronomischen und geologischen Perioden, welche man durch das Studium der Natur kennen gelernt hat, haben den harmlosen Erzählungen der Väter von den vergangenen und künftigen Zeiten Anfang und Ende geraubt; die Naturgesetze endlich haben den vertraulichen Umgang aufgehoben, in welchem, jenen Sagen zufolge, das Menschengeschlecht mit höheren Wesen stand *).

Aber nicht nur die geschichtlichen Ueberlieferungen, selbst die eigenen religiösen Ueberzeugungen und ewigen Hoffnungen scheint der Naturalismus der Physik zu bedrohen. Was soll uns ein Gott bei einer Welt, die den Gesetzen der Mechanik gehorcht? Diese Gesetze sind selbstständig, werden mathematisch erkannt und erleiden eben desswegen keine Ausnahme; die Gottheit bliebe nur ein müssiger Zuschauer, der den Gang der Bewegungen in keiner Weise willkührlich ändern kann. Was soll uns die Freiheit da, wo es nur die eiserne Nothwendigkeit des Naturgesetzes giebt, wo selbst das Leben in der organischen Welt, dieses grösste aller physikalischen Räthsel, nach und nach unter die Herrschaft eben der Kräfte geräth, welche den Krystall formen und den Gestirnen des Himmels ihre Bahnen zeichnen? Wo endlich soll das Jenseits sein, auf das wir hoffen, da der Raum mit der ganzen Gesetzmässigkeit der Geometrie sich ins Unendliche hinauserstreckt und keine Gränze gedacht werden kann, die das Diesseits von dem Jenseits trennte?

Diess sind die Fragen, welche als letzte Consequenzen der Mathematik und Physik sich uns aufdrängen und mit deren historisch-philosophischer Entwickelung sich der Verfasser des oben genannten Werkes beschäftigt. Zuvörderst giebt er uns eine Uebersicht der Culturgeschichte im Allgemeinen, ein Bild, dessen schönste Partie die Zeichnung der griechischen Weltansicht ausmacht, in welcher noch physikalische und religiöse Ideen in friedlicher Vereinigung ein ästhetisches Ganzes bilden. Der Blick der Griechen reichte nur über das Mittelmeer und Vorderasien und verlor sich ringsum im Unbegränzten. Die menschliche Einbildungskraft ist von selbst geschäftig, den leeren Raum auszufüllen und das lückenhafte Bild zu ergänzen. Dichterische und religiöse Phantasieen des Volks, philisophische Ansichten der Denker und geologische Muthmassungen vereinigten sich, den fehlenden Stoff herbeizuschaffen, dem die Einbildungskraft leicht eine passende und ästhetische Form verleihen konnte. Aber schon die ersten geographischen Entdeckungen änderten dieses Bild. Soweit auch der Blick des Menschen vorwärts gedrungen war, überall fand er die Erde vom Meere umflossen, und so konnte leicht der Gedanke entstehen, dass ausser der bekannten Zone noch andere Länder-

*) M. s. „Anti-Orion zum Nutzen und Frommen des Herrn von Schaden" von dem nämlichen Verf. Diese Brochüre ist gerichtet gegen: Antwort auf den Angriff eines Herrn E. Apelt in der neuen Jenaischen Literaturzeitung von Dr. v. Schaden (Privatdozenten an der Universität zu Erlangen); dieser „Angriff" ist nämlich eine höchst originelle Recension des Orion des Herrn v. Schaden, welche auch in der „Antwort" des letzteren abgedruckt ist. Ref. erinnert sich nicht, etwas Ergötzlicheres gelesen zu haben, als Herrn v. Schadens mystisch-astronomische Träume und die Polemik gegen seinen Recensenten.

Digitized by Google

massen jenseits des Oceans vorhanden wären. Unbemerkt schmolzen die geographischen Vorstellungen von dem Vorhandensein anderer bewohnbarer Zonen mit der religiösen Idee einer anderen Welt zusammen und zogen sich in den ätherischen Duft dichterischer Phantasieen zurück. Der Garten der Hesperiden, das Elysium, die glückseligen Inseln, das Paradies der Christen sind geographische Phantasiegebilde, welche aus religiösen Ideen entstanden und hier bestimmter, dort unbestimmter an eine gewisse Oertlichkeit gebunden waren.

Die grossen geographischen Entdeckungen, namentlich die Erdumsegelungen, haben diese Phantasiegebilde zerstört; die Dichtung wurde von der Anschauung verdrängt, die mythische Kosmographie verwandelte sich in physische Geographie. Die letzte Folge hiervon war die Flucht der guten Geister von der Erde. Die seligen Gefilde, die schon anfangs über den Ocean zurückgewichen waren, erhoben sich von der Erde zu den Wolkensitzen und flüchteten unter die Sterne.

Aber auch von da sind sie vertrieben worden. Die Gesetze Kepplers, des Ersten, der die Natur richtig zu befragen verstehl und dem sie antwortet, zerbrechen die krystallenen Sphären der Alten und rauben den Planeten ihre Führer; Newton zeigt, dass die Kraft, welche in den Tiefen der himmlischen Räume waltet und die Planeten in ihren Bahnen führt, keine andere ist, als die Schwere an unserer Erde. Die Geheimnisse schwinden aus der Sternenwelt, die fortschreitende Theorie greift sogar in einigen Fällen der Beobachtung vor und Laplace krönt das ruhmwürdig begonnene Werk mit der Mechanik des Himmels. So zerstörte die Astronomie sogar im Bau des Himmels den architektonischen Zauber und das Land der Verheissung schwand aus den Räumen des Aethers. Wohin auch das Fernrohr den Blick des Menschen trug, überall folgte ihm die Nothwendigkeit des Calcüls, Raum verweigernd einer ätherischen Welt. Die Mechanik des Himmels hat des Aristoteles Lichtwelt der Gestirne, den Himmel unserer Väter zertrümmert und uns dafür ein Weltgebäude massenhafter schwerer Körper geschenkt. Die schützenden Engel des Menschengeschlechts, alle Genien und gütigen Feen verliessen dessen Gesellschaft und wanderten in das Land der Sage oder der Dichtung.

Diess ist eine ungefähre Skizze der vier ersten Kapitel des Buches, bei der sich Ref. zum Theil der Worte des Verf. bedient hat. Im fünften Kapitel (II. 4.) giebt er uns eine historische Darstellung der verschiedenen Stufen religiöser Ausbildung im Völkerleben und ihres Verhältnisses zur Philosophie und Naturwissenschaft. Eine sehr schätzenswerthe Zugabe bildet der Anhang, welcher drei bemerkenswerthe Aufsätze enthält: I. Erläuterungen über die Epicykelntheorie und das Verhältniss der drei Weltsysteme; II. Kepplers Mysterium cosmographicum und III. Kepplers Induktion zur Entdeckung der wahren Gestalt der Planetenbahnen. In diesem Anhange zeigt sich der Verf. als guter Kenner der Mathematik, was um so bemerkenswerther ist, als sich die Philosophie ungefähr seit dem Anfange dieses Jahrhunderts der Mathematik zu schämen scheint und namentlich die sogenannten Philosophen mancher Schulen auf unsere Wissenschaft mit einer Geringschätzung herabblicken, wie sie nur aus grober Igno-

Digitized by Google

ranz darin entstehen kann. Jener Anhang hat das Verdienst, eine zwar gedrängte, aber vollständige Uebersicht über die Arbeiten Kepplers zu geben, wovon man selbst in den grösseren astronomischen Lehrbüchern kaum mehr als eine Notiz findet. Hierbei hat der Vf. Keppler mit Recht gegen Laplace und Delambre in Schutz genommen, die ihn wie einen Schüler Newton's beurtheilen und seine Spekulationen über die Kosmophysik und die Weltharmonie für blosse Träumereien halten, welche müssig neben seinen astronomischen Forschungen einhergehen und dieselben öfter beeinträchtigt haben; in der That sind sie aber die Quelle seiner grossen Entdeckungen, indem gerade die mystische Naturansicht die Erfindungskraft Kepplers leitete. Den eigenthümlichen Gedankengang desselben theilt uns der Verf. in der heutigen Sprache der Mathematik mit.

Diese Anzeige möge hinreichen, um die Mathematiker und Physiker auf ein Werk aufmerksam zu machen, das sie des bescheidenen Titels wegen leicht übersehen könnten. Der zweite Band, welcher u. A. die historische Entwickelung der Entscheidung jenes Streites zwischen dem Naturalismus der Physik und den religiösen Ideen enthalten wird, soll, wie es heisst, dem ersten rasch nachfolgen. Möge derselbe ein seinem Inhalte nach eben so gediegenes und seiner Form nach eben so ansprechendes Ganzes bilden, wie der erste.

Jena. Schlömilch.

XXI.

Auflösung des Keplerschen Problems nach Newton, verglichen mit der jetzt noch gebräuchlichen numerischen Auflösung.

Von dem

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischen Rechner an der K. Sternwarte zu Berlin.

Jeder, welcher sich auch nur mit den ersten Theilen der theorischen Astronomie beschäftigt hat, kennt das Problem, wovon hier die Rede sein soll. Die Gleichungen, welche zwischen den einzelnen Grössen stattfinden, werden in der neuern Zeit gewöhn-

Digitized by Google

lich auf dem kürzern analytischen Wege hergeleitet und auf demselben gelangt man zu den verschiedenen indirecten Auflösungen, da eine directe, der Natur der Sache nach, nicht möglich ist. Wenn so auch die analytische Darstellung vollkommen genügt, um die in der theorischen Astronomie vorkommenden Aufgaben zu lösen, so glaube ich doch, dass es für manchen Leser, welcher Newtons Principia mathematica philosophiae naturalis nicht kennt, interessant und vielleicht auch lehrreich sein wird, die synthetische Weise kennen zu lernen, auf welche Newton zu denselben Resultaten gelangt ist, die noch heute gelten. Ich werde daher hier einige Sätze aus Abschnitt VI. des ersten Buches jenes Werkes mittheilen und die Resultate mit den Ausdrücken von Gauss in der Theoria motus corporum coelestium vergleichen.

Zuerst zeigt Newton in einem Lehnsatze durch Raisonnement, dass keine elliptische Figur existire, deren, durch beliebige gerade Linien abgeschnittener Flächenraum allgemein mittelst Gleichungen dargestellt werden könne, welche in der Zahl ihrer Glieder und Dimensionen begrenzt sind. Er schneidet daher den, der Zeit proportionalen Theil der Fläche einer Ellipse mittelst einer geometrisch irrationalen Curve ab, und zwar folgendermassen.

§. 1.

Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse, man soll seinen, einer gegebenen Zeit entsprechenden Ort in derselben finden.

Auflösung. In der Ellipse APB (Taf. II. Fig. 3.) sei A der Hauptscheitelpunkt, S der Brennpunkt, O das Centrum und P der zu findende Ort des Körpers. Man verlängere OA über A hinaus bis G, so dass

$$OG : OA = OA : OS$$

wird, und errichte hierauf GH perpendikulär auf AG. Hierauf beschreibe man aus O als Mittelpunkt und mit dem Radius OG den Kreis EFG, lasse den letztern auf der geraden Linie GH als Basis fortrollen, so dass der Punkt A die gestreckte Cycloide ALJ beschreibt. Ist diess gescheben, so nehme man die Linie GK in dem Verhältniss zur Peripherie GFE des Kreises an, in welchem die Zeit, worin der Körper den elliptischen Bogen AP zurücklegt, zur ganzen Umlaufszeit in der Ellipse steht. Errichtet man nun auf GH das Perpendikel KL, welches die Cycloide in L schneidet, und zieht

$$LP \text{ parallel } GK;$$

so ist der Durchschnittspunkt P der erstern mit der Ellipse der verlangte Punkt.

Man beschreibe nämlich aus O als Mittelpunkt mit dem Radius OA den Kreis AQB, so dass dieser und LP sich in Q schneiden, und ziehe die Linien SQ und OQ, endlich fälle man von S auf die Richtung der letzteren das Perpendikel SR. Der elliptische Sector ASP ist alsdann proportional dem Kreissector ASQ. Ver-

Digitized by Google

längert man nämlich QP bis zum Durchschnittspunkt W mit AB und setzt die halbe grosse Axe der Ellipse $= a$, die halbe kleine $= b$; so ist

$$ASP + SPW : ASQ + SQW = b : a,$$
$$SPW : SQW = PW : QW = b : a,$$

also $ASP : ASQ = b : a$ oder $ASP = \frac{b}{a} . ASQ.$

Es ist aber

$$ASQ = OQA - OQS = \tfrac{1}{2} OQ . QA - \tfrac{1}{2} OQ . RS,$$

mithin, da $\frac{1}{2} OQ$ gegeben und constant $= \frac{1}{2} a$ ist, der Flächeninhalt von APS proportional dem Unterschiede

$$QA - RS.$$

Nun ist aber $RS : \sin AQ = OS : OQ$
$= OS : OA$
$= OA : OG$
$= AQ : GF;$

also

$$AQ - RS : GF - \sin AQ = AQ : GF = OS : OA$$

und

$$AQ - RS = \frac{OS}{OA} (GF - \sin AQ).$$

Der Flächeninhalt des Sectors ASP ist demnach proportional dem Unterschiede $GF - \sin AQ$, d. h., nach der Gleichung der Cycloide, der Linie GK.

§. 2.

Zusatz. In der Darstellung des vorigen Paragraphen kann man dieselbe Gleichung wiederfinden, welche in der Theoria motus zwischen der excentrischen und mittlern Anomalie aufgestellt ist. Setzt man nämlich wie dort $OA = a$ und ausserdem $OS = a . e$, W. $QOA = E$; so wird aus der Proportion $OG : OA = OA : OS$

$$OG = \frac{a}{e}.$$

Ferner wird

$$GF = OG . E = \frac{a}{e} . E, \sin AQ = a \sin E;$$

also der Sector ASP proportional

$$a(E - e \sin E).$$

Digitized by Google

Dieser Sector ist aber der Zeit proportional, welche der Körper gebraucht hat, um vom Perihel A bis zum Punkt P zu gelangen; folglich ist auch diese Zeit proportional

$$E - e \sin E.$$

Dass man aus der vorliegenden Figur auch alle die Relationen herleiten könne, welche in der Theoria motus. pag. 8. zusammengestellt sind, ersieht man leicht folgendermassen. Fügt man zu den bereits eingeführten Bezeichnungen noch hinzu:

$$e = \sin\varphi,\ a^2 . e^2 = a^2 - b^2 \text{ oder } b^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$\text{d. h. } b = a\cos\varphi,$$

$$SP = r \text{ und W. } ASP = v;$$

so wird

$$SW = -r\cos v = SO + OW = ae - a\cos E,$$

also

$$r\cos v = a(\cos E - e), \text{ wie Nr. IX. a. a. O.}$$

Ferner

$$PW = r\sin v = \frac{b}{a} QW = a\cos\varphi \sin E, \text{ wie Nr. VIII.}$$

$$SP^2 = r^2 = SW^2 + PW^2$$

$$= a^2(\cos E^2 + \sin\varphi^2 - 2e\cos E + \cos\varphi^2 \sin E^2)$$

$$\text{oder } r = a(1 - e\cos E), \text{ wie Nr. III. u. s. w.}$$

Wegen der Uebereinstimmung der vorstehenden Gleichungen mit denen in der Theoria motus, muss also auch die dortige Gleichung zwischen der mittlern und excentrischen Anomalie

$$M = E - e\sin E$$

hier stattfinden. Da ferner nach §. 1.

$$ASQ = \tfrac{1}{2} OQ.(QA - RS) = \tfrac{1}{2}a^2(E - e\sin E)$$

und

$$ASP = \frac{b}{a} ASQ = \tfrac{1}{2}a^2\cos\varphi(E - e\sin E);$$

so wird auch

$$ASP = \tfrac{1}{2}a^2\cos\varphi . \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(Theor. mot. pag. 6.)}$$

$$= \tfrac{1}{2}kt\sqrt{p} . \sqrt{1+\mu} = \tfrac{1}{2}\int r r dv.$$

ASP ist also der, in der Zeit t beschriebene Sector.

§. 3.

Anmerkung. Wegen der schwierigen Construction dieser Curve (der Cycloide) ist in der Praxis zweckmässiger eine

Digitized by Google

Construction anzuwenden, welche der Wahrheit sehr nahe kommt.

Man suche einen bestimmten Winkel B, welcher sich zu dem Winkel $57^{\circ},29578 = 206264'',808$, den ein dem Radius gleicher Bogen unterspannt, verhält, wie die Entfernung SH (Taf. II. Fig. 4.) beider Brennpunkte von einander zur grossen Axe AB. Ferner suche man eine Linie L, welche sich zum Radius verhält, wie AB zu SH. Hat man beide einmal gefunden, so löst man die Aufgabe durch folgende Analyse.

Nach irgend einer Methode oder Conjectur bestimme man den Ort P ziemlich nahe und fälle von ihm auf die grosse Axe das Perpendikel PR, so erhält man die entsprechende Ordinate QR des um die Ellipse beschriebenen Kreises AQB aus dem Verhältniss beider Axen der Ellipse, und es ist alsdann

$$QR = AC.\sin ACQ.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Winkel ACQ, welchen man nur nahebei durch Rechnung zu bestimmen braucht. Man kennt ferner auch den der Zeit proportionalen Winkel, welcher sich nämlich zu 360° verhält, wie die zur Beschreibung des Bogens AP erforderliche Zeit zur ganzen Umlaufszeit. Dieser Winkel sei $= N$. Hierauf bestimme man die Winkel D, E, F, G, H, J, etc. aus den Proportionen:

$D : B = \sin ACQ : \text{Radius}$;

$E : N - ACQ + D = L : L \mp \cos ACQ$, $\mp$ jenachdem $ACQ \gtrless 90^{\circ}$;

$F : B = \sin(ACQ + E) : \text{Radius}$;

$G : N - ACQ - E + F = L : L \mp \cos(ACQ + E)$,
$\mp$ jenachdem $ACQ + E \lessgtr 90^{\circ}$;

$H : B = \sin(ACQ + E + G) : \text{Radius}$;

$J : N - ACQ - E - G + H = L : L \mp \cos(ACQ + E + G)$,
$\mp$ jenachdem $ACQ + E + G \lessgtr 90^{\circ}$;

u. s. w. f.

Man kann auf diese Weise beliebig fortfahren, und nimmt man zuletzt den Winkel

$$ACq = ACQ + E + G + J + \text{etc.},$$

so ergibt sich aus seinem Cosinus $= Cr$ und der Ordinate pr, welche letztere aus der Proportion

$$pr : \sin ACq = b : a$$

bekannt wird, der verbesserte Ort p des Körpers.

Wird in einem einzelnen Falle der Winkel

$$N - ACQ + D$$

negativ, so muss bei E überall das Zeichen $+$ in $-$ und umgekehrt

Digitized by Google

$-$ in $+$ verwandelt werden. Dasselbe gilt von den Zeichen der Winkel G und J, wenn respective

$$N-ACQ-E+F \text{ und } N-ACQ-E-G+H$$

negativ werden.

Die unendliche Reihe

$$ACQ+E+G+J+\text{etc.}$$

convergirt übrigens sehr schnell, so dass man kaum jemals über das zweite Glied E hinaus zu gehen nöthig haben wird. Die Rechnung gründet sich auf den Satz, dass der Flächenraum ASP sich verhält, wie der Unterschied zwischen dem Bogen AQ und dem Perpendikel von S auf CQ.

§. 4.

Zusatz. In dem Verfahren, welches Newton nach dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellt hat, ist vollständig dasjenige enthalten, welches man in der Regel gegenwärtig bei numerischen Rechnungen anzuwenden pflegt. Dasselbe ist im Berliner astronomischen Jahrbuch von 1838. pag. 281. dargestellt und daselbst zugleich gezeigt worden, dass es mit dem in der Theoria motus. pag. 11. mitgetheilten identisch ist. Von der Uebereinstimmung des erstern Verfahrens mit dem im vorigen Paragraphen enthaltenen überzeugt man sich leicht folgendermassen Setzt man der früher eingeführten Bezeichnung gemäss:

$$B=\frac{SH}{AB}\omega=e\omega=e'', \text{ wo } \omega=206264'',8;$$

$$N=M,$$

$$ACQ=E',$$

$$L=\frac{AB}{SH}=\frac{1}{e},$$

$$E=\Delta E;$$

so wird

$$D=e''\sin E';$$

$$\Delta E=\frac{\frac{1}{e}(M-E'+e''\sin E')}{\frac{1}{e}\mp\cos E'}=\frac{M-E'+e''\sin E'}{1\mp e\cos E'},$$

$\mp$ jenachdem $E'\lesseqgtr 90^0$.

Wir haben bereits oben die Gleichung

$$\frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}=M=E-e\sin E$$

betrachtet. Da nun der Flächenraum ASP proportional der Zeit t, also nach dieser Gleichung

Digitized by Google

$$E - e \sin E$$

ist; so folgt, weil $AQ = a \cdot E$ und das Perpendikel von S auf CQ oder

$$SV = SC \cdot \sin SCQ = ae \sin E,$$

also

$$AQ - SV = a(E - e \sin E),$$

dass auch ASP proportional dem Unterschiede

$$AQ - SV$$

sein wird.

XX.

Welche Lage muss man einem Stahlstabe geben, damit er das Maximum der magnetisirenden Wirkung eines kreisförmigen electrischen Stromes erfahre?

Von dem

Herrn Doctor Dippe,

Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

---

§. 1.

Zu der Beantwortung dieser Frage wurde ich geführt, als ich das in Pogg. Ann. LXII. S. 249. beschriebene Verfahren zur Magnetisirung einiger Stahlstäbe anwandte. Es fiel mir dabei nämlich eine Stelle im Repert. der Physik von Dove und Moser ein (I. S. 263.), wo ein von Barlow beschriebener Versuch als fast fabelhaft klingend bezeichnet wird. Jene Stelle heisst: „So kräftig ist die Wirkung einer Spirale, dass, wenn eine kleine Magnetnadel (or bar) in sie so hineingelegt wird, dass sie auf dem untern Theile der Windungen ruht, diese Nadel im Momente der Verbindung der Spirale mit der galvanischen Kette aufspringt, und in der Axe der Spirale den Gesetzen der Schwere entgegen schwe-

Digitized by Google

bend bleibt. Diese Erscheinung zeigt sich selbst bei senkrechter Stellung der Spirale, und man sieht auf diese Weise einen schweren Körper ohne materiellen Zusammenhang mit andern Körpern gehalten durch eine unsichtbare Kraft wie die fabelhafte Statue des Dinochares."

Ich wiederholte nun diesen Versuch mit meinem Magnetisircylinder, einer Spirale aus 30 Fuss Kupferdraht, welcher auf einen hohlen hölzernen Cylinder von 1 Zoll Höhe, 1¼ Zoll innerem Durchmesser und geringer Wanddicke gewickelt war, und den Strom eines Platin-Zink-Elements leitete, und fand die Beschreibung allerdings mindestens ungenau. Eisenstäbchen wie Magnetnadeln blieben ruhig auf dem untersten Theile der Windungen liegen, wenn die Axe der Spirale horizontal lag. Hielt ich ein Eisenstäbchen mit dem einen Ende an die innere Wand des Cylinders, so wurde es im Momente der Schliessung der Kette lebhaft nach innen gezogen, so dass es zu beiden Seiten gleich weit aus dem Cylinder hervorragte, blieb aber wiederum auf dem untersten Theile der inneren Wand liegen. Als ich die Axe des Cylinders vertikal stellte, schwebte der Stab in dem Cylinder in vertikaler Lage, aber immer sich an die Seitenwand anlegend, und jeder Versuch, denselben in der Axe des Cylinders frei schwebend zu erhalten, war vergeblich, eben so vergeblich, als wenn Jemand versuchen wollte, einem Magneten seinen Anker gerade in der Entfernung darzubieten, in welcher die anziehende Kraft des Magneten und die Schwere des Ankers im Gleichgewicht sind, so dass der Anker frei in der Luft schwebte.

Diese Versuche nun, sowie der Umstand, dass die Dicke einiger von den zu magnetisirenden Stäben bedeutend geringer war als die innere Weite des Cylinders führten mich zu der obigen Frage, deren Beantwortung für die vortheilhafteste Benutzung solcher Spiralen zum Magnetisiren nicht unwichtig ist. Da ich weder in Poggendorffs Annalen, noch in Gehlers Wörterbuche, noch in den Lehrbüchern der Physik Auskunft fand, so versuchte ich selbst die Beantwortung, und theile diesen Versuch hier mit.

§. 2.

Es liegt in der Natur der Sache, dass wir uns auf den Fall beschränken, wo der Stab mit der Axe des Cylinders parallel ist, so wie dass wir statt des spiralförmigen Drahtes uns die Peripherie eines Kreises als Leiter des electrischen Stromes vorstellen.

Als bewiesen wird vorausgesetzt:

1) Ein geradlinigter electrischer Strom wirkt vertheilend auf ein ausserhalb liegendes magnetisches Theilchen in einer Richtung, welche auf der durch dies Theilchen und den Leitungsdraht gelegten Ebene senkrecht ist.
2) Denkt man sich mit dem Strome schwimmend und das magnetische Theilchen anblickend, so wird in der bezeichneten Richtung der Nordpol links, der Südpol rechts bewegt.
3) Die Wirkung eines jeden Elementes des Stromleiters ist der Länge dieses Elementes direct, und dem Quadrate des Abstandes dieses Elementes vom magnetischen Theilchen um-

Digitized by Google

Nun ist

$$\cos BDA = \frac{AD - AB.\cos DAB}{DB} = \frac{r - r'\cos\varphi}{DB},$$

und

$$DB = \{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$1)\quad dW = \frac{cr\,d\varphi\,(r - r'\cos\varphi)}{\{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird dieser Ausdruck integrirt und das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen, so erhält man die gesammte Wirkung des Kreisstromes auf den Punkt B, und kann nun die Veränderungen aufsuchen, welche mit diesem Werthe vorgehen, wenn man die Lage des Punktes B in der Ebene des Kreises, also r', sich verändern lässt.

Es ist gut, gleich von vorne herein auch den Fall ins Auge zu fassen, dass $r' > r$ wird, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreises, aber doch in seiner Ebene, etwa in B' (Taf. II. Fig. 6.), liegt. Man ziehe von B' die Tangenten $B'M$, $B'L$ an den Kreis, und verlängere $B'A$ bis zur Peripherie in P; dann wirken die Theile MCL und LPM in entgegengesetztem Sinne auf das magnetische Theilchen in B', und zwar ist die von LPM bewirkte Vertheilung des Magnetismus gleichartig mit der von dem Kreisstrome bei dem innerhalb des Kreises liegenden Punkte B bewirkten, die von dem Bogen MCL ausgeübte ist die entgegengesetzte. Ueberwiegt die letztere, so kehrt sich in dem Punkte B' der Südpol dem Beschauer zu, während in B der Nordpol der zugewandte Pol ist. Da in L und M die Tangenten mit den Verbindungslinien $B'L$, $B'M$ zusammenfallen, so ist die von diesen Punkten auf B' ausgeübte Wirkung Null.

Unser Differential (1) wird nun für alle Punkte auf MCL negativ, weil $r - r'\cos\varphi$ negativ wird, dagegen für alle Punkte auf LPM positiv, in L und M dagegen, wo $\varphi = \arccos\frac{r}{r'}$, wird dasselbe Null. Die Integration zwischen den Gränzen 0 und 2π liefert uns die algebraische Summe der Wirkungen, mithin die resultirende Wirkung der Grösse und Richtung nach. Es ist nämlich die Wirkung des ganzen Kreises offenbar das Doppelte der Wirkung des Halbkreises CLP, mithin

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dW = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} dW = 2\left\{\int_{\varphi=0}^{\varphi=\arccos\frac{r}{r'}} dW + \int_{\varphi=\arccos\frac{r}{r'}}^{\varphi=\pi} dW\right\}$$

§. 3.

Wenden wir uns nun zur Integration der Gleichung 1)

$$dW = \frac{cr\,(r - r'\cos\varphi)}{(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.d\varphi.$$

Digitized by Google

Dieselbe wird sich ausführen lassen, wenn man im Stande ist, den Werth

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$, oder noch besser in eine nach den Cosinus der Vielfachen von φ geordnete Reihe zu entwickeln. Denn, wenn man hat

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=A+B\cos\varphi+C\cos2\varphi+D\cos3\varphi+\ldots$$

so wird

$$\frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\left\{\begin{array}{l}Ar+Br\cos\varphi+Cr\cos2\varphi+Dr\cos3\varphi\ldots\\ -Ar'\cos\varphi-Br'\cos\varphi.\cos\varphi\\ -Cr'\cos2\varphi.\cos\varphi\ldots\end{array}\right.$$

und wenn man hier überall

$$\cos p\varphi.\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi$$

setzt, so erhält man

$$2)\quad\frac{r-r'\cos\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{array}{l}(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\\ +(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi\\ +(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos2\varphi\\ +(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos3\varphi\\ \text{u. s. w.}\end{array}$$

Mithin ist

$$dW=crd\varphi\{(Ar-\tfrac{1}{2}Br')+(Br-\frac{A+C}{2}r')\cos\varphi+(Cr-\frac{B+D}{2}r')\cos2\varphi+(Dr-\frac{C+E}{2}r')\cos3\varphi\ldots\ldots\}$$

also das Integral

$$\begin{array}{l}W=cr(Ar-\tfrac{1}{2}Br')\varphi+cr(Br-\frac{A+C}{2}r')\sin\varphi\\ +\tfrac{1}{2}cr(Cr-\frac{B+D}{2}r')\sin2\varphi\\ +\tfrac{1}{3}cr(Dr-\frac{C+E}{2}r')\sin3\varphi\\ +\text{u. s. w.}\end{array}$$

Digitized by Google

Da dies Integral zwischen den Gränzen

$$\varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\pi$$

zu nehmen ist, so reducirt sich dasselbe auf den äusserst einfachen Werth

$$3)\quad W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{2}Br'),$$

in welchem die Grössen A und B noch bestimmt werden müssen.

§. 4.

Die Bestimmung der Coefficienten A und B geschieht durch die Ausführung der Entwickelung

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \ldots,$$

welche am schnellsten nach dem binomischen Lehrsatze und den bekannten Reihen für die Potenzen der Cosinus sich ausführen liesse. Die Nothwendigkeit aber, zur Beantwortung unserer Frage rasch convergirende Reihen zu gewinnen, erheischt einige Umwege, in deren Windungen die Darstellung von Lacroix in seinem Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. S. 112. ff. mir als Wegweiser gedient hat.

Bezeichnet man $\sqrt{-1}$ durch i, so hat man

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

wo e die bekannte Bedeutung hat. Dann ist

$$\begin{aligned} 4)\quad r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 &= r^2 - rr'(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + r'^2 \\ &= (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}) \\ &= (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst

$$r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi}),$$

dann ist

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = (r - r'e^{i\varphi})^{-m} \cdot (r - r'e^{-i\varphi})^{-m},$$

und nun nach dem binomischen Lehrsatze

$$\begin{aligned} (r - r'e^{i\varphi})^{-m} = r^{-m}\Big\{1 + m\cdot\frac{r'}{r}\cdot e^{i\varphi} &+ \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 e^{2i\varphi} \\ &+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 e^{3i\varphi} \ldots\Big\}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$(r-r'e^{-i\varphi})^{-m} = r^{-m}\{1+m.\frac{r'}{r}.e^{-i\varphi}+\frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 e^{-2i\varphi} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 e^{-3i\varphi}....\}.$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, und setzt man in dem Resultate überall wieder $e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$ und $e^{pi\varphi}+e^{-pi\varphi}=2\cos p\varphi$, so erhält man

$$5)\ r^{-2m}\begin{cases}1+m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4+\left(\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^6...\\ +2(m.\frac{r'}{r}+m^2.\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5..)\cos\varphi\\ +P\cos 2\varphi+Q\cos 3\varphi+R\cos 4\varphi....\end{cases}$$

wo die Coefficienten P, Q, R..... nicht entwickelt sind, da wir ihrer zu unserer Aufgabe nicht bedürfen. Bezeichnet man

$$6)\begin{cases}\text{die Reihe } 1+m^2.\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^4.... \text{ mit } \alpha\\ \text{u. die Reihe } 2(m.\frac{r'}{r}+m^2.\frac{m+1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}\right)^2.\frac{m+2}{3}\left(\frac{r'}{r}\right)^5..) \text{ mit } \beta:\end{cases}$$

so hat man

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}=r^{-2m}\{\alpha+\beta\cos\varphi...\}.$$

und da

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}}=A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi....$$

sein sollte, so hat man

$$7)\ A=\frac{\alpha}{r^3}\text{ und }B=\frac{\beta}{r^3},$$

wenn man in den Reihen 6) statt m den Werth $\frac{3}{2}$ substituirt, und α und β dann berechnet. Sobald aber $\frac{r'}{r}$ nicht ein sehr kleiner Bruch ist, convergiren die Reihen in 6) nur langsam, wesshalb man so unmittelbar nicht zum Ziele kommen kann.

Jene Reihen convergiren nun viel schneller, wenn man in denselben

$$m=-\tfrac{1}{2}$$

setzt, mithin $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{1}{2}}=r(\alpha+\beta\cos\varphi....)$ gewinnt.

Könnte man aus den Coefficienten dieser Reihe die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}}$ herleiten, so würde die oben erwähnte Schwierigkeit vermindert sein.

Digitized by Google

§ 5.

Dies wird sich thun lassen, wenn man aus

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}=r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi....)$$

herzuleiten weiss:

8) $(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=r^{-2(m+1)}(\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi..)$,

so dass man α_1, β_1, γ_1.... als Functionen von α, β, γ.... erhält. Denn alsdann kann man auf dieselbe Weise von $-(m+1)$ zu $-(m+2)$ übergehen, mithin von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}-1$, von da zu $\frac{1}{2}-2$ oder $-\frac{3}{2}$. Nun ist aber

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)}=\frac{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-m}}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

mithin auch

$$r^{-2(m+1)}\{\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi...\}=\frac{r^{-2m}(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi...)}{r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2},$$

und wenn der Nenner weggeschafft wird:

$$\begin{aligned}r^{-2}\{&\alpha_1(r^2+r_1^2)+\beta_1(r^2+r_1^2)\cos\varphi+\gamma_1(r^2+r_1^2)\cos 2\varphi....\\&-2\alpha_1rr'\cos\varphi-2\beta_1rr'\cos\varphi\cos\varphi-2\gamma_1rr'\cos 2\varphi\cos\varphi....\}\\=&\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi+\delta\cos 3\varphi....\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Entwickelung statt $\cos p\varphi.\cos\varphi$ seinen Werth

$$\tfrac{1}{2}\cos(p+1)\varphi+\tfrac{1}{2}\cos(p-1)\varphi,$$

und bringt man dann alle Glieder auf eine Seite, so erhält man

$$\begin{aligned}&(\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha)\\&+(\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta)\cos\varphi\\&+(\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r^2\gamma)\cos 2\varphi\\&+\text{u. s. w.}=0.\end{aligned}$$

Dies giebt zur Bestimmung der Coefficienten α_1, β_1, γ_1.... die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\alpha_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-r^2\alpha=0,\\&\beta_1(r^2+r'^2)-2\alpha_1rr'-\gamma_1rr'-r^2\beta=0,\\&\gamma_1(r^2+r'^2)-\beta_1rr'-\delta_1rr'-r_2\gamma=0,\\&\qquad\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

durch deren Auflösung man erhält:

$$9)\quad \beta_1=\frac{\alpha_1(r^2+r'^2)-\omega^2}{rr'},$$

Digitized by Google

$$10)\quad \gamma_1 = \frac{\beta_1 (r^2 + r'^2) - 2\alpha_1 rr' - r^2\beta}{rr'},$$

$$11)\quad \delta_1 = \frac{\gamma_1 (r^2 + r'^2) - \beta_1 rr' - r^2\gamma}{rr'},$$

u. s. w.

Es können also die Coefficienten β_1, γ_1, δ_1.... der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-(m+1)}$ durch die Coefficienten der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m}$ ausgedrückt werden, wenn nur der erste der gesuchten Coefficienten, nämlich α_1, bekannt ist. Diesen zu ermitteln wird nun unsere nächste Aufgabe sein.

§. 6.

Könnten wir die Relation finden, welche zwischen den Coefficienten α, β, γ, δ.... der Entwickelung von $(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m}$ besteht, so muss dieselbe, nach Substituirung von $m+1$ statt m, auch gelten für die Coefficienten α_1, β_1, γ_1, δ_1.... der gesuchten Entwickelung. Liesse sich z. B. γ durch α und β ausdrücken, so hätten wir auch γ_1 durch α_1 und β_1 ausgedrückt, und da auch die Formel 10) uns γ_1 als Function von α_1 und β_1 liefert, so giebt uns die Gleichsetzung dieser beiden Werthe von γ_1 den Werth des Coefficienten α_1.

Nehmen wir nun, um jenen Zusammenhang zwischen den Coefficienten α, β, γ.... aufzufinden, von

$$(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-m} = r^{-2m}(\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos 2\varphi....)$$

die Logarithmen, und darauf das Differential nach φ, so kommt zunächst

$$\frac{2mrr'\sin\varphi}{r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2} = \frac{\beta\sin\varphi + 2\gamma\sin 2\varphi + 3\delta\sin 3\varphi...}{\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos 2\varphi + \delta\cos 3\varphi...}.$$

Wenn dann die Nenner weggeschafft, statt $\sin\varphi.\cos p\varphi$ und statt $\cos\varphi.\sin p\varphi$ ihre Werthe, nämlich $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$ und $\frac{1}{2}\sin(p+1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(p-1)\varphi$, gesetzt, und alle Glieder auf eine Seite geschafft werden, so erhält man

$$\begin{aligned}&\{2mrr'\alpha - (m-2)rr'\gamma - (r^2 + r'^2)\beta\}\sin\varphi\\ &+ \{mrr'\beta - (m-3)rr'\delta - 2(r^2 + r'^2)\gamma\}\sin 2\varphi\\ &+ P\sin 3\varphi + Q\sin 4\varphi + ... = 0.\end{aligned}$$

Der Coefficient von $\sin\varphi$, den wir, wie die übrigen, gleich Null setzen müssen, liefert uns

$$12)\quad \gamma = \frac{2mrr'\alpha - (r^2 + r'^2)\beta}{(m-2)rr'}.$$

Vertauscht man m mit $m+1$ und α, β, γ.... mit α_1, β_1, γ_1...., so hat man

Digitized by Google

$$13)\quad \gamma_1 = \frac{2(m+1)rr'\alpha_1 - (r^2+r'^2)\beta_1}{(m-1)rr'}.$$

Setzt man nun die beiden Werthe von γ_1 in 10) und 13) gleich, so erhält man eine Gleichung für α_1, β_1, und aus derselben

$$14)\quad \beta_1 = \frac{4mrr'\alpha_1 + (m-1)r^2\beta}{m(r^2+r_1^2)}.$$

Allein es war nach 9) auch

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1(r^2+r'^2) - \alpha r^2}{rr'},$$

folglich kann man beide gleich setzen, und erhält eine Gleichung, in der α_1 die einzige Unbekannte ist. Daraus ergiebt sich

$$15)\quad \alpha_1 = r^2 . \frac{(m-1)rr'\beta + m(r^2+r'^2)\alpha}{m(r^2-r'^2)^2},$$

und wenn dies berechnet ist, aus 9) oder 14) auch β_1.

§. 7.

Nun verfahre man, wie §. 5. schon angegeben ist, indem man auf dieselbe Weise von der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+1)} = r^{-2(m+1)}\{\alpha_1+\beta_1\cos\varphi+\gamma_1\cos 2\varphi\ldots\}$$

zu der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-(m+2)} = r^{-2(m+2)}\{\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi\ldots\}$$

übergeht. Man erhält nach Analogie von 15), 9) und 14)

$$16)\quad \alpha_2 = r^2 . \frac{mrr'\beta_1 + (m+1)(r^2+r'^2)\alpha_1}{(m+1)(r^2-r'^2)^2},$$

$$17)\quad \beta_2 = \frac{\alpha_2(r^2+r'^2) - \alpha_1 r^2}{rr'},$$

$$18)\quad \gamma_2 = \frac{4(m+1)rr'\alpha_2 + mr^2\beta_1}{(m+1)(r^2+r'^2)}.$$

In unserm Falle sollte nun $m=-\frac{1}{2}$ gesetzt werden, damit $m+2=\frac{3}{2}$ werde, und aus der Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{1}{2}} = r(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\cos 2\varphi\ldots)$$

die Entwickelung

$$(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}(\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi\ldots)$$

hervorgehe.

Führt man dies aus, so erhält man aus 15) u. 9), 16) u. 17)

$$19)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3rr'\beta + (r^2+r'^2)\alpha}{(r^2-r'^2)} \cdot r^2, \\ \beta_1 = \dfrac{(r^2+r_1{}^2)\alpha_1 - \alpha r^2}{rr'}, \\ \alpha_2 = \dfrac{(r^2+r'^2)\alpha_1 - rr'\beta_1}{(r^2-r'^2)^2} \cdot r^2, \\ \beta_2 = \dfrac{(r^2+r'^2)\alpha_2 - \alpha_1 r^2}{rr'}. \end{cases}$$

Jetzt braucht man nur in den beiden letzten Werthen überall statt α_1, β_1 die durch die beiden ersten Formeln gegebenen Werthe zu substituiren und die Reductionen auszuführen, um folgende, sehr einfache Werthe zu erhalten:

$$20)\quad \alpha_2 = \frac{\alpha r^4}{(r^2-r_1{}^2)^2},$$

$$21)\quad \beta_2 = \frac{-3\beta r^4}{(r^2-r'^2)^2}.$$

Es sind mithin von der Entwickelung

$$22)\quad (r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}\{\alpha_2+\beta_2\cos\varphi+\gamma_2\cos 2\varphi\ldots\}$$

die ersten Glieder gefunden.

§. 8.

Die Lösung unserer Aufgabe hatten wir davon abhängig gemacht (cf. §. 3.), dass für

$$\frac{1}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

die Reihe

$$A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi\ldots.$$

gefunden würde. Dies ist in §. 7. geschehen, wenn wir die Parenthese auf der rechten Seite von 22) auflösen; mithin ist

$$A = r^{-3}.\alpha_2,\quad B = r^{-3}.\beta_2,$$

oder mit Benutzung der Formeln 20) und 21)

$$23)\quad A = \frac{\alpha r}{(r^2-r_1{}^2)^2},$$

$$24)\quad B = \frac{-3\beta r}{(r^2-r_1{}^2)^2}.$$

Digitized by Google

Unser Integral, welches die Gesammtwirkung des kreisförmigen Stromes ausdrückt, war nach §. 3.

$$W=2cr\pi(Ar-\tfrac{1}{2}Br');$$

dieser Werth verwandelt sich jetzt in

$$25)\quad W=2cr^2\pi\frac{\alpha r+\frac{3}{2}\beta r'}{(r^2-r'^2)^2}.$$

Drückt man die Entfernung r' in Theilen des Halbmessers r aus, setzt man also

$$r'=pr,$$

so verwandelt sich 25) in

$$26)\quad W=\frac{2c\pi}{r}\cdot\frac{\alpha+\frac{3}{2}p\beta}{(1-p^2)^2}.$$

Die Reihen aber, welche wir der Kürze wegen mit α und β bezeichnet haben, sind

$$27)\quad \alpha=1+\frac{1}{2^2}p^2+\frac{1.1}{2^2.4^2}p^4+\frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}p^6+\frac{1.1.3^3.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}p^8\ldots.,$$

$$28)\quad \beta=2(-\tfrac{1}{2}p+\frac{1}{2^2}\cdot\tfrac{1}{4}p^3+\frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\tfrac{3}{6}p^5+\frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\tfrac{5}{8}p^7\ldots.),$$

indem man in §. 4. Nr. 6) nur $m=-\frac{1}{2}$ und $\frac{r'}{r}=p$ zu setzen hat

Für $p=0$, d. i. $r'=0$, also für den Mittelpunkt des kreisförmigen Stromes, ist $\alpha=1$ und $\beta=0$, mithin reducirt sich das Integral auf

$$\frac{2c\pi}{r},$$

was der bekannte Ausdruck für die Einwirkung des Kreisstromes auf ein in seinem Mittelpunkte befindliches magnetisches Theilchen ist. Diese Einwirkung ist nun ein Minimum im Vergleich mit derjenigen, welche alle andern Punkte innerhalb des Kreises erfahren. Denn die Berechnung des Integrals 26) giebt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für den Mittelpunkt des Kreises	1,000000
für $r'=\frac{1}{100}r$ dagegen	1,000075
„ $r'=\frac{1}{10}r$	1,007572
„ $r'=\frac{5}{10}r$	1,245620
„ $r'=\frac{9}{10}r$	3,9256
„ $r'=r$	unendlich gross.

Es wächst also die Wirkung vom Mittelpunkte, wo sie ein Minimum ist, bis zur Peripherie des Kreises

Digitized by Google

continuirlich, und würde bei gehöriger Annäherung an die Peripherie über alle Gränzen hinaus wachsen, wenn ein Leitungsdraht von unmerklicher Dicke einen starken electrischen Strom leiten könnte.

Für das Magnetisiren ergeben sich dann folgende Regeln:

1) Hat man nur Stahlstäbe von constanten Dimensionen zu magnetisiren, so gebe man dem Magnetisircylinder eine solche Weite, dass der Stab so eben in demselben sich hin und herziehen lässt.
2) Ist die Dicke des Stabes geringer als die innere Weite des Cylinders, so bewege man den Stab so in dem Cylinder hin und her, dass er die innere Seitenwand immer berührt, und lasse diese Berührung nach und nach jeder Seite des Stabes zu Theil werden.

Ferner ist aus dem Bisherigen offenbar, dass bei gewöhnlichen Electromagneten der Magnetismus in der Oberfläche des Eisens ohne Vergleich stärker entwickelt wird, als in dem Innern.

§. 9.

Es ist von Interesse, auch die Intensität der Einwirkung eines Kreisstromes auf einen ausserhalb des Kreises in seiner Ebene gelegenen Punkt zu untersuchen. Die bisher gefundenen Formeln scheinen diesen Fall nicht mit zu umfassen, weil die Reihen für α und β in §. 8. nicht convergent bleiben, wenn $p > 1$ gesetzt wird.

Nun sind wir aber bei der Entwickelung von

$$(r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von φ im §. 4. von der Betrachtung ausgegangen, dass

$$r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2 = (r - r'e^{i\varphi})(r - r'e^{-i\varphi})$$

gesetzt werden könne; es wurde aber dort schon bemerkt, dass mit demselben Recht

$$r^2 - 2rr' \cos\varphi + r'^2 = (r' - re^{i\varphi})(r' - re^{-i\varphi})$$

gesetzt werden kann. Man kann also in der ganzen Entwickelung r mit r' vertauschen und wird dies thun, wenn $r' > r$ ist, das magnetische Theilchen also ausserhalb des Kreisstromes liegt. Dann hat man zur Berechnung des Integrals

$$W = 2cr\pi(Ar - \tfrac{1}{2}Br'),$$

welches die Intensität der magnetisirenden Wirkung angiebt, die Formeln

$$29)\quad \alpha = 1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^4 + \frac{1.1.3^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^6 \ldots,$$

$$30)\quad \beta = 2\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{r'} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \frac{1.1}{2^2.4^2}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{r}{r'}\right)^5 \ldots\right\},$$

$$31)\quad A = \frac{\alpha r_1}{(r'^2 - r^2)^2},$$

Digitized by Google

$$32)\quad B=\frac{-3\beta r'}{(r'^2-r^2)^2},$$

und das Integral nimmt jetzt die Form an

$$33)\quad W=2cr\pi.\frac{\alpha r'+\frac{3}{2}\beta r'r'}{(r'^2-r^2)^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{r}{r'}=p$, also $r'=\frac{1}{p}.r$, mit p einen ächten Bruch bezeichnend, so ergeben sich für α und β aus 29) und 30) dieselben Reihen, welche wir im §. 8. Nr. 27) und 28) erhalten haben. Man kann also jeden der dort für α und β erhaltenen Werthe unmittelbar benutzen, um die Einwirkung des Stromes auf einen ausserhalb liegenden Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte

$$r'=\frac{1}{p}.r$$

ist, zu erfahren. Das Integral 33) nimmt durch die Substitution von $\frac{1}{p}r$ statt r' die Form an

$$34)\quad W=\frac{2c\pi}{r}.\frac{(\alpha p+\frac{3}{2}\beta)p^2}{(1-p^2)^2}.$$

Die Ausführung der Rechnung giebt, wenn wir wieder den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2c\pi}{r}$ weglassen:

für $p=0$, also $r'=\infty$ die Grösse der Vertheilung $=0$,
„ $p=\frac{1}{100}$, „ $r'=100r$ „ „ „ „ $=-0{,}0000005$
„ $p=\frac{1}{10}$, „ $r'=10r$ „ „ „ „ $=-0{,}0005056$
„ $p=\frac{2}{10}$, „ $r'=2r$ „ „ „ „ $=-0{,}08622$
„ $p=\frac{2}{10}$, „ $r'=1\frac{1}{2}r$ „ „ „ „ $=-2{,}227.$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass die Pole des magnetischen Theilchens ausserhalb des Kreises die entgegengesetzte Lage haben.

Besonders bemerkenswerth ist die Vergleichung der für $r'=0$ und $r'=2r$ gefundenen Werthe, wonach die Einwirkung eines Kreisstromes auf einen um den Radius von der Peripherie entfernten ausserhalb liegenden Punkt beinahe 9 Procent derjenigen Wirkung beträgt, welche der Mittelpunkt des Kreises erfährt.

§. 10.

Ich habe das Integral noch für einige andere Werthe von p berechnet, und lasse die Resultate in Verbindung mit den §. 8. und §. 9. gegebenen hier folgen, indem ich die Entfernung r' als Ab-

stand vom Mittelpunkte, den von dem Factor $\frac{2c\pi}{r}$ befreiten Werth des Integrals als magnetische Vertheilung bezeichne.

Abstand vom Mittelpunkte.	Magnetische Vertheilung.
0	1
$\frac{1}{10}r$	1,0076
$\frac{2}{10}r$	1,0288
$\frac{3}{10}r$	1,0731
$\frac{4}{10}r$	1,1413
$\frac{5}{10}r$	1,2456
$\frac{6}{10}r$	1,4105
$\frac{7}{10}r$	1,6922
$\frac{8}{10}r$	2,2569
$\frac{9}{10}r$	3,9256
r	unendlich gross
$1\frac{1}{9}r$	−2,227
$1\frac{1}{4}r$	−0,7896
$1\frac{1}{7}r$	−0,3621
$1\frac{2}{3}r$	−0,1776
$2r$	−0,08622
$2\frac{1}{2}r$	−0,03891
$3\frac{1}{3}r$	−0,01502
$5r$	−0,00419
$10r$	−0,00051

XXI.

Allgemeine Sätze für eine Theorie der höheren Differential-Quotienten.

Von dem
Herrn Doctor O. Schlömilch,
Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann von der Theorie der höheren Differenzial-Quotienten ohne Uebertreibung behaupten, dass sie den unvollständigsten Theil der Differenzialrechnung bildet, welcher einer Begründung

Digitized by Google

aus allgemeinen Principien noch gänzlich entbehrt. In der That ist für dieselbe bis jetzt weiter nichts geschehen, als dass man eine Partie ganz specieller Funktionen, wie z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},\quad \frac{x}{a^2+b^2x^2},\quad \frac{e^x}{e^x+a},\text{ etc.}$$

behandelt und bald durch diesen, bald durch jenen Kunstgriff, wie ihn eben die Natur der Funktion zuliess, die Form der höheren Differenzial-Quotienten bestimmt hat. Diese Betrachtungsweise bringt aber den Nachtheil, dass man zu keinen allgemeinen Gesetzen gelangt, die auf alle solche Funktionen, welche die Veränderliche auf die nämliche Weise enthalten (z. B. als Quadrat, als Exponent von e etc.) gleichförmig anwendbar wären. — Der hieraus entspringende Mangel an Zusammenhang lässt sich nun dadurch beseitigen, dass man die Differenzial-Quotienten sehr allgemeiner Funktionen, wie z. B.

$$f(x^\lambda),\ f(e^x),\text{ u. dgl.,}$$

welche die obengenannten Ausdrücke als spezielle Fälle enthalten, zu entwickeln versucht. Der Anfang eines solchen Calcüls sähe etwa so aus:

$$\frac{df(x^\lambda)}{dx}=\lambda x^{\lambda-1}f'(x^\lambda),$$

$$\frac{d^2f(x^\lambda)}{dx^2}=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}f'(x^\lambda)+\lambda^2x^{2\lambda-2}f''(x^\lambda),$$

$$\frac{d^3f(x^\lambda)}{dx^3}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}f'(x^\lambda)+3\lambda^2(\lambda-1)x^{2\lambda-3}f''(x^\lambda)+\lambda^3x^{3\lambda-3}f'''(x^\lambda),$$

u. s. f. *)

Ebenso leicht findet man

$$\frac{df(e^x)}{dx}=e^xf'(e^x),$$

$$\frac{d^2f(e^x)}{dx^2}=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x),$$

---

*) Die Symbole $f'(x^\lambda)$, $f''(x^\lambda)$ etc. bezeichnen hier, dass man erst der Funktion f eine Veränderliche, etwa y, leihen, nach dieser schlechthin (als wäre sie unabhängig) differenziren und nach geschehener Differenziation $y=x^\lambda$ setzen solle. So wäre z. B. für $f(y)=ly$, $f'(y)=\frac{1}{y}$, $f''(y)=-\frac{1}{y^2}$ und $f'(x^\lambda)=\frac{1}{x^\lambda}$, $f''(x^\lambda)=-\frac{1}{(x^\lambda)^2}$, etc., woraus der Sinn jener Bezeichnung völlig erhellt.

Digitized by Google

$$\frac{d^3f(e^x)}{dx^3} = e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x),$$

u. s. w.

Es ist nicht schwer, die allgemeine Form zu entdecken, unter welcher diese Gleichungen stehen. Bezeichnen wir nämlich mit

$$\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \overset{n}{A}_3, \ldots \overset{n}{A}_n$$

constante Coeffizienten, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n} f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n} f''(x^\lambda) + \ldots . \\ \ldots . + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda-n} f^{(n)}(x^\lambda)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + \ldots . \\ \ldots . + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei natürlich die Coeffizienten A in der zweiten Gleichung andere Werthe haben, als in der ersten. Aber eben diese Werthe zu finden, ist das Schwerste an der ganzen Betrachtung, da die Rekursionsskale, welche man leicht für die Coeffizienten verschiedener Ordnungen finden kann, zur independenten Bestimmung derselben nicht ausreicht. Durch eine eigenthümliche Methode indessen ist es dem Verfasser geglückt, diese Schwierigkeiten zu heben und die Resultate seiner Untersuchungen sind die folgenden Sätze, denen ihre synthetischen Beweise folgen mögen.

I. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\} \quad (3)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots \pm \lambda_n p_{p-1}\right\} \quad (4)$$

wobei p_1, p_2, etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten p und $(p\lambda)_n$, $(\overline{p-1}\lambda)_n$, etc. den jedesmaligen $n$ten Coeffizienten der Exponenten $p\lambda$, $\overline{p-1}\lambda$, etc. bezeichnen.

Beweis.

Da die Formel 4) für $n=1$ ein Resultat liefert, welches mit der früheren direkten Formel für $\frac{df(x^\lambda)}{dx}$ übereinstimmt, so haben

Digitized by Google

wir bloss zu zeigen, dass dieselbe für die $(n+1)$te Ordnung gilt, wenn sie für die $n$te richtig ist. Differenziren wir zu diesem Zwecke die Gleichung (3), indem wir sie in der Form von Nr. (1) benutzen, so kommt

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}} = (\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^{\lambda-n-1} f'(x^\lambda) + (2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda-n-1} f''(x^\lambda)$$

$$+ (3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda-n-1} f'''(x^\lambda) + \ldots.$$

$$+ \lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda-n-1} f''(x^\lambda) + \lambda\overset{n}{A}_2 x^{\lambda-n-1} f'''(x^\lambda) + \ldots.$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}}\{(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + (2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda)$$

$$+ (3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots + \lambda\overset{n}{A}_1 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \lambda\overset{n}{A}_2 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots.\}$$

und wenn wir

$$(\lambda-n)\overset{n}{A}_1 = \overset{n+1}{A}_1,$$

$$(2\lambda-n)\overset{n}{A}_2 + \lambda\overset{n}{A}_1 = \overset{n+1}{A}_2,$$

$$(3\lambda-n)\overset{n}{A}_3 + \lambda\overset{n}{A}_2 = \overset{n+1}{A}_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

überhaupt

$$(p\lambda-n)\overset{n}{A}_p + \lambda\overset{n}{A}_{p-1} = \overset{n+1}{A}_p \quad (5)$$

setzen,

$$\frac{d^{n+1}f(x^\lambda)}{dx^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1}}\{\overset{n+1}{A}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \overset{n+1}{A}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots\} \quad (6)$$

Vermöge der Gleichung (5) ist hier, wenn die Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$ nach Nr. (4) entwickelt werden,

$$\overset{n+1}{A}_p = (p\lambda-n)\frac{1.2..n}{1.2..p}\{(p\lambda)_n - \overline{(p-1\lambda)}_n p_1 + \overline{(p-2\lambda)}_n p_2 - \ldots\}$$

$$+ \lambda\frac{1.2...n}{1.2...(p-1)}\{\overline{(p-1\lambda)}_n - \overline{(p-2\lambda)}_n (p-1)_1 + \overline{(p-3\lambda)}_n (p-1)_2 - \ldots\}$$

oder

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1.2...n}{1.2...(p-1)}\left\{\frac{p\lambda-n}{p}(p\lambda)_n - \frac{p\lambda-n}{p}\overline{(p-1\lambda)}_n p_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{p\lambda-n}{p}\overline{(p-2\lambda)}_n p_2 - \ldots. + \lambda\overline{(p-1\lambda)}_n - \lambda\overline{(p-2\lambda)}_n (p-1)_1 + \ldots\right\} \quad (7)$$

Digitized by Google

Nun ist überhaupt

$$\frac{p\lambda-n}{p}(\overline{p-r\lambda})_n p_r - \lambda(\overline{p-r\lambda})_n (p-1)_{r-1}$$

$$= (\overline{p-r\lambda})_n \left\{\frac{p\lambda-n}{p} p_r - \lambda(p-1)_{r-1}\right\}$$

$$= (\overline{p-r\lambda})_n p_r \left\{\frac{p\lambda-n}{p} - \lambda\frac{r}{p}\right\} = (\overline{p-r\lambda})_n p_r \frac{p\lambda-n-\lambda r}{p}$$

$$= \frac{n+1}{p}(\overline{p-r\lambda})_n \frac{\overline{p-r\lambda-n}}{n+1} p_r$$

$$= \frac{n+1}{p}(\overline{p-r\lambda})_{n+1} p_r$$

Nimmt man nun in der Gleichung (7) je zwei untereinander stehende Glieder nach dieser Formel für $r=0, 1, 2, \ldots$ zusammen, so ergiebt sich

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1.2\ldots(n+1)}{1.2\ldots p}\{(p\lambda)_{n+1} - (\overline{p-1\lambda})_{n+1} p_1 + (\overline{p-2\lambda})_{n+1} p_2 - \ldots\}.$$

Setzt man aber in der Gleichung (4) $n+1$ für n, so erhält man das Nämliche; es gilt also das Bildungsgesetz der Coeffizienten für die $(n+1)$te Ordnung, wenn es für die $n$te richtig ist, w. z. b. w.

Anwendungen.

Setzt man

$$\overset{n}{E}_p = 1.2\ldots n\{(p\lambda)_n - (\overline{p-1\lambda})_n p_1 + (\overline{p-2\lambda})_n p_2 - \ldots\} \quad (8)$$

so wird nach (4)

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p,$$

folglich nach (3)

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{1}{1}\overset{n}{E}_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \frac{1}{1.2}\overset{n}{E}_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.2.3}\overset{n}{E}_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\overset{n}{E}_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\},$$

unter welcher Form das Theorem zu den elegantesten Anwendungen führt.

1) Es sei

$$f(y) = (a+y)^\mu,$$

so wird

Digitized by Google

$$f^{(p)}(y) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)\frac{(a+y)^\mu}{(a+y)^p};$$

folglich

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}$$

$$= \mu_p\overset{n}{E}_p\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{(a+x^\lambda)^p}.$$

Bringen wir diess in der Gleichung (9) für $p=1, 2, 3, \ldots n$ in Anwendung, so ergiebt sich:

$$\frac{d^n(a+x^\lambda)^\mu}{dx^n} = \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left\{\mu_1\overset{n}{E}_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + \mu_2\overset{n}{E}_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2\right.$$

$$\left. + \mu_3\overset{n}{E}_3\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^3 + \ldots + \mu_n\overset{n}{E}_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right\} \quad (10)$$

ein durch seine Allgemeinheit und Eleganz bemerkenswerthes Theorem.

2) Es sei

$$f(y) = e^{ay},$$

also

$$f^{(p)}(y) = a^p e^{ay}$$

und

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\overset{n}{E}_p f^{(p)}(x^\lambda) = \frac{a^p}{1.2.3\ldots p}\overset{n}{E}_p e^{ax^\lambda},$$

so wird

$$\frac{d^n e^{ax^\lambda}}{dx^n} = \frac{e^{x^\lambda}}{x^n}\left\{\overset{n}{E}_1\frac{ax^\lambda}{1} + \overset{n}{E}_2\frac{(ax^\lambda)^2}{1.2} + \ldots + \overset{n}{E}_n\frac{(ax^\lambda)^n}{1.2\ldots.n}\right\} \quad (11)$$

Zu bemerken ist noch, dass es zwei spezielle Fälle giebt, in welchen sich die Reihe

$$(p\lambda)_n - \overline{(p-1\lambda)}_n p_1 + \overline{(p-2\lambda)}_n p_2 - \ldots,$$

welche zur Bestimmung von $\overset{n}{A}_p$ oder $\overset{n}{E}_p$ dient, summiren lässt. Man findet nämlich für $\lambda=-1$:

$$\overset{n}{A}_p = (-1)^n\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p}(n-1)_{p-1} = (-1)^n\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}n_p$$

und daher nach Nr. (3)

Digitized by Google

$$\frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2...(n-1)}{x^n}\left\{\frac{n_1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n_2}{1.x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n_3}{1.2.x^3} f'''\left(\frac{1}{x}\right) + ... + \frac{n_n}{1.2....(n-1)x^n} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$(-1)^n \frac{d^n f(\frac{1}{x})}{dx^n} = \frac{1}{x^{2n}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)n_1}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)n_2}{x^{2n-2}} f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + ... \quad (12)$$

Ferner findet man für $\lambda = +2$:

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...p} p_{n-p} 2^{2p-n},$$

und daraus für $p = 1, 2, ... n$:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = \frac{1.2...n}{(2x)^n}\left\{\frac{1_{n-1}}{1}(2x)^2 f'(x^2) + \frac{2_{n-2}}{1.2}(2x)^4 f''(x^2) + ...\right.$$
$$\left. ... + \frac{(n-1)_1}{1.2...(n-1)}(2x)^{2n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n_0}{1.2...n}(2x)^{2n} f^{(n)}(x^2)\right\}$$

oder bei umgekehrter Anordnung

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n \{f^{(n)}(x^2) + \frac{n.(n-1)_1}{(2x)^2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1).(n-2)_2}{(2x)^4} f^{(n-2)}(x^2) + ...\}.$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2.n_2 (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ 3.4.n_4 (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + 4.5.6.n_6 (2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + ... \quad (13)$$

wovon die in Archiv. Thl. IV. S. 364. etc. gegebenen Formeln nur spezielle Fälle sind.

II. *Lehrsatz.*

Für die Bestimmung irgend eines in der Gleichung

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + ... + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}(e^x) \quad (14)$$

vorkommenden Coeffizienten $\overset{n}{A}_p$ gilt die Formel:

Digitized by Google

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2...p}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - .... \pm 1^n p_{p-1}\}... \quad (15)$$

Beweis.

Differenzirt man zu Behuf des Beweises von n auf $n+1$ die Gleichung (14), so wird

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = 1\overset{n}{A}_1 e^x f'(e^x) + 2\overset{n}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + 3\overset{n}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

$$+ \overset{n}{A}_1 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n}{A}_2 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

Setzen wir dagegen

$$\frac{d^{n+1} f(e^x)}{dx^{n+1}} = \overset{n+1}{A}_1 e^x f'(e^x) + \overset{n+1}{A}_2 e^{2x} f''(e^x) + \overset{n+1}{A}_3 e^{3x} f'''(e^x) + ...$$

und vergleichen diese Coeffizienten mit den vorigen, so ist

$$\overset{n+1}{A}_1 = 1\overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_2 = 2\overset{n}{A}_2 + \overset{n}{A}_1,$$
$$\overset{n+1}{A}_3 = 3\overset{n}{A}_3 + \overset{n}{A}_2,$$
etc.

überhaupt für ein ganzes positives p:

$$\overset{n+1}{A}_p = p\overset{n}{A}_p + \overset{n}{A}_{p-1},$$

d. h. vermöge der Werthe von $\overset{n}{A}_p$ und $\overset{n}{A}_{p-1}$:

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - (p-3)^n p_3 + ...$$
$$+ (p-1)^n - (p-2)^n (p-1)_1 + (p-3)^n (p-1)_2 - .... \}.$$

Nimmt man je zwei unter einander stehende Glieder mit Hülfe des Satzes

$$p_r - (p-1)_{r-1} = (p-1)_r$$

zusammen, so wird

$$\overset{n+1}{A}_p = \frac{1}{1.2...(p-1)}\{p^n - (p-1)^n (p-1)_1 + (p-2)^n (p-1)_2 - ...\} \quad (16)$$

Man hat aber bekanntlich

$$(p-1)_r = \frac{p-r}{p} p_r,$$

folglich

Digitized by Google

$$(p-r)^n\,(p-1)_r=\frac{1}{p}(p-r)^{n+1}\,p_r,$$

und mithin durch Anwendung dieses Satzes für $p=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots$

$$^{n+1}A_p=\frac{1}{1\,.\,2\ldots\ldots p}\{p^{n+1}-(p-1)^{n+1}\,p_1+(p-2)^{n+1}\,p_2-\ldots\}\ldots\quad(17)$$

was das Nämliche ist, als wenn man in der Formel (15) $n+1$ für n gesetzt hätte. Das dort ausgesprochene Bildungsgesetz ist demnach richtig.

Anwendungen.

Setzt man

$$\overset{n}{K}_p=p^n-(p-1)^n\,p_1+(p-2)^n\,p_2-\ldots\ldots\quad(18)$$

so wird

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n}=\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1\,e^x f'(e^x)+\frac{1}{1\,.\,2}\overset{n}{K}_2\,e^{2x}f''(e^x)+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\overset{n}{K}_3\,e^{3x}f'''(e^x)+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\overset{n}{K}_n\,e^{nx}f^{(n)}(e^x)\ldots\ldots\quad(19)$$

was für die Anwendung bequemer ist.

1) Für $f(y)=l(a+y)$, also $f^{(p)}(y)=\dfrac{1\,.\,2\ldots(p-1)}{(a+y)^p}(-1)^p$

und

$$\frac{1}{1\,.\,2\ldots p}\overset{n}{K}_p\,e^{px}f^{(p)}(e^x)=\frac{(-1)^p}{p}\overset{n}{K}_p\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^p$$

erhalten wir

$$\frac{d^n\,l(a+e^x)}{dx^n}=\frac{1}{1}\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\frac{1}{2}\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{1}{n}\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\quad(20)$$

2) Für $f(y)=(a+y)^\mu$ findet sich eben so leicht

$$\frac{d^n\,(a+e^x)^\mu}{dx^n}=(a+e^x)^\mu\{\mu_1\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)+\mu_2\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots$$

$$\ldots+\mu_n\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\}\quad(21)$$

also z. B. für $\mu=-1$:

$$\frac{d^n\,(a+e^x)^{-1}}{dx^n}=\frac{-1}{a+e^x}\left\{\overset{n}{K}_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\overset{n}{K}_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\ldots.\right.$$

$$\left.\pm\overset{n}{K}_n\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right\}\quad(22)$$

Digitized by Google

Man kann leicht noch einen anderen etwas symmetrischeren Ausdruck finden, wenn man in (20) $n+1$ für n setzt und bemerkt, dass

$$\frac{d^{n+1}\,l(a+e^x)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\}$$

ist. Man hat dann

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\} = \frac{1}{1}{}^{n+1}K_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - \frac{1}{2}{}^{n+1}K_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \frac{1}{3}{}^{n+1}K_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3 - \ldots.$$
$$\ldots. \pm \frac{1}{n+1}{}^{n+1}K_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (23).$$

Aus der Vergleichung von (16) und (17) folgt aber

$$\frac{1}{p}\{p^{n+1} - (p-1)^{n+1}p_1 + (p-2)^{n+1}p_2 - \ldots.\}$$
$$= p^n - (p-1)^n(p-1)_1 + (p-2)^n(p-1)_2 - \ldots.,$$

d. i.

$$\frac{1}{p}{}^{n+1}K_p = p^n - (p-1)^n(p-1)_1 + (p-2)^n(p-1)_2 - \ldots.$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{p}{}^{n+1}K_p = {}^{n}J_p$$

setzen:

$${}^{n}J_p = p^n - (p-1)^n(p-1)_1 + (p-2)^n(p-1)_2 - \ldots. \quad (24)$$

Nach Nr. (23) ist nun für die hierdurch bestimmten Werthe der Coeffizienten J:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^x}{a+e^x}\right\} = {}^{n}J_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - {}^{n}J_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + {}^{n}J_3\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3 - \ldots.$$
$$\ldots. \pm {}^{n}J_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}. \quad (25)$$

Nimmt man x negativ, $a=-1$ und bemerkt, dass

$$\frac{e^{-x}}{-1+e^{-x}} = \frac{1}{-e^x+1} = -\frac{1}{e^x-1}$$

ist, so erhält man

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\} = {}^{n}J_1\left(\frac{1}{e^x-1}\right) + {}^{n}J_2\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^2 + \ldots.$$
$$\ldots. + {}^{n}J_{n+1}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)^{n+1}. \quad (26)$$

Digitized by Google

Die Gleichungen (25) und (26) stimmen mit den Resultaten des Herrn Malmsten *) überein, wenn man statt

$$n,\ p,\ \overset{n}{J}_p$$

setzt:

$$i,\ k,\ \overset{(i,k)}{a},$$

erscheinen hier aber nur als spezielle Fälle der allgemeineren Formel (14). Man kann ebenso leicht die von Laplace und Euler entwickelten Formeln aus denselben ableiten. Für die weitere Ausführung dieses Gegenstandes verweise ich auf mein bald erscheinendes Handbuch der Differenzial- und Integral-Rechnung.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn ein Kreis und eine Ellipse, deren Gleichungen

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

sind, sich in vier Punkten schneiden, so ist das Product der Entfernungen der vier Durchschnittspunkte von der Hauptaxe der Ellipse jederzeit eine constante Grösse, nämlich der Grösse

$$\frac{b^4\{(a^2+\alpha^2+\beta^2-r^2)^2-4a^2\alpha^2\}}{(a^2-b^2)^2}$$

gleich.

Die Gleichung einer Parabel zu finden, wenn zwei berührende Linien derselben als Coordinatenaxen angenommen werden.

Wenn von einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte P zwei Tangenten PA, PB an den Kreis, und eine dritte, den gegen den Punkt P concaven Bogen AB in C schneidende gerade

*) Archiv. Theil VI. S. 45. und Theil III. S. 41.

Digitized by Google

Linie PC gezogen sind, so schneiden sich jederzeit die durch C an den Kreis gezogene Tangente, das auf die Linie PC durch ihre Mitte errichtete Perpendikel und die durch die Mittelpunkte der beiden Tangenten PA, PB gezogene gerade Linie in einem und demselben Punkte.

Wenn man eine Reihe Gleichungen von folgender Form hat:

$$a = a,$$
$$a + x = aa_1,$$
$$a + 2x = aa_1^2 a_2,$$
$$a + 3x = aa_1^3 a_2^2 a_3,$$
$$a + 4x = aa_1^4 a_2^3 a_3^2 a_4,$$
u. s. w.

einen allgemeinen independenten Ausdruck der Grösse a_{n+1} zu finden, und überhaupt eine weitere Untersuchung der Reihe

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots . a_{n+1}, \ldots .$$

anzustellen.

Die Summe der Quadrate der Cosecanten der drei von den Spitzen eines sphärischen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten desselben gefällten Perpendikel ist der Summe der Quadrate der Cosecanten der Halbmesser der vier Kreise gleich, welche die drei Seiten des Dreiecks (oder deren Verlängerungen) berühren.

Man soll durch gewöhnliche Buchstabenrechnung beweisen, dass

$$\begin{aligned}(p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2)(p_1^2 + Aq_1^2 + Br_1^2 + ABs_1^2) \\ = (pp_1 \mp Aqq_1 \mp Brr_1 \pm ABss_1)^2 \\ + A(pq_1 + qp_1 \mp Brs_1 \mp Bsr_1)^2 \\ + B(pr_1 + Aqs_1 \pm rp_1 \pm Asq_1)^2 \\ + AB(ps_1 - qr_1 \pm rq_1 \mp sp_1)^2\end{aligned}$$

ist, dass also das Product zweier Grössen von der Form

$$p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2,$$

wo A und B constante Grössen bezeichnen, immer wieder eine Grösse von derselben Form ist. Für $A = 1$ und $B = 1$ ist

Digitized by Google

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)(p_1{}^2+q_1{}^2+r_1{}^2+s_1{}^2)$$
$$=(pp_1-qq_1\mp rr_1\pm ss_1)^2$$
$$+(pq_1+qp_1\mp rs_1\mp sr_1)^2$$
$$+(pr_1+qs_1\pm rp_1\pm sq_1)^2$$
$$+(ps_1-qr_1\pm rq_1\mp sp_1)^2$$

d. h. das Product zweier Summen von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten. Bloss zur Uebung erster Anfänger in der Buchstabenrechnung werden diese längst bekannten aber wichtigen Sätze hier wieder aufgenommen.

Arithmetischer Satz.

Es ist immer:

$$1=\frac{a}{a},$$

$$1=\frac{ab}{a(a+b)}+\frac{ba}{b(b+a)},$$

$$1=\frac{abc}{a(a+b)(a+b+c)}+\frac{acb}{a(a+c)(a+c+b)}$$
$$+\frac{bac}{b(b+a)(b+a+c)}+\frac{bca}{b(b+c)(b+c+a)}$$
$$+\frac{cab}{c(c+a)(c+a+b)}+\frac{cba}{c(c+b)(c+b+a)},$$

$$1=\frac{abcd}{a(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)}+\frac{bacd}{b(b+a)(b+a+c)(b+a+c+d)}$$
$$+\frac{abdc}{a(a+b)(a+b+d)(a+b+d+c)}+\frac{badc}{b(b+a)(b+a+d)(b+a+d+c)}$$
$$+\frac{acbd}{a(a+c)(a+c+b)(a+c+b+d)}+\frac{bcad}{b(b+c)(b+c+a)(b+c+a+d)}$$
$$+\frac{acdb}{a(a+c)(a+c+d)(a+c+d+b)}+\frac{bcda}{b(b+c)(b+c+d)(b+c+d+a)}$$
$$+\frac{adbc}{a(a+d)(a+d+b)(a+d+b+c)}+\frac{bdac}{b(b+d)(b+d+a)(b+d+a+c)}$$
$$+\frac{adcb}{a(a+d)(a+d+c)(a+d+c+b)}+\frac{bdca}{b(b+d)(b+d+c)(b+d+c+a)}$$
$$+\frac{cabd}{c(c+a)(c+a+b)(c+a+b+d)}+\frac{dabc}{d(d+a)(d+a+b)(d+a+b+c)}$$
$$+\frac{cadb}{c(c+a)(c+a+d)(c+a+d+b)}+\frac{dacb}{d(d+a)(d+a+c)(d+a+c+b)}$$

Digitized by Google

$$+\frac{cbad}{c(c+b)(c+b+a)(c+b+a+d)}+\frac{dbac}{d(d+b)(d+b+a)(d+b+a+c)}$$
$$+\frac{cbda}{c(c+b)(c+b+d)(c+b+d+a)}+\frac{dbca}{d(d+b)(d+b+c)(d+b+c+a)}$$
$$+\frac{cdab}{c(c+d)(c+d+a)(c+d+a+b)}+\frac{dcab}{d(d+c)(d+c+a)(d+c+a+b)}$$
$$+\frac{cdba}{c(c+d)(c+d+b)(c+d+b+a)}+\frac{dcba}{d(d+c)(d+c+b)(d+c+b+a)},$$

u. s. w.

Man soll das sich hieraus ergebende allgemeine Gesetz allgemein beweisen.

XXIII.

Miscellen.

Der Akademiker Chasles hat bei einem Buchhändler in Paris ein handschriftliches Werk von Desargues, einem der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, aufgefunden: Brouillon-projet des coniques.

Académie des sciences de Paris.

(Séance du 21 juillet 1845.)

Géométrie. — M. Chasles lit une note sur quelques propriétés des arcs égaux de la lemniscate.

La lemniscate est, comme on sait, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une hyperbole équilatère sur les tangentes à cette courbe. En outre, les rayons vecteurs de la lemniscate et de l'hyperbole issus du centre commun des deux courbes et de même direction ont leur produit constant. Ces deux propriétés de la lemniscate sont connues ainsi que la suivante qu'il est nécessaire de rappeler: Le rayon vecteur ou sa normale, menés par un point de la lemniscate, déterminent sur l'hyperbole deux points qui sont situés sur une même ordonnée, c'est-à-dire que

Digitized by Google

le point où la normale touche l'hyperbole est sur la même ordonnée que le point où le rayon vecteur rencontre l'hyperbole. — Cela posé, les rayons vecteurs menés aux extrémités d'un arc de la lemniscate étant prolongés comprennent un arc de l'hyperbole, et les normales aux deux rayons vecteurs touchent l'hyperbole en deux points qui déterminent un deuxième arc égal au premier. Chacun de ces deux arcs peut être considéré comme le correspondant de l'arc de la lemniscate. Il y a entre les arcs de la lemniscate et leurs correspondants sur l'hyperbole cette relation que donne un calcul très simple: à deux arcs égaux de la lemniscate correspondent sur l'hyperbole deux arcs dont la différence est rectifiable.

C'est par suite de ce théorème que les propriétés des arcs de l'hyperbole dont la différence est rectifiable donnent lieu à des propriétés des arcs égaux de la lemniscate. Voici ces propriétés.

Quand deux arcs d'une lemniscate sont égaux, les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de ces arcs forment un quadrilatère circonscriptible au cercle. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux entre eux, si par les extrémités de chacun de ces arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent à ces points, et qu'on prenne le point de concours de ces normales, tous ces points de concours seront sur une hyperbole décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère qui a servi à former la lemniscate.

Ce théorème fournit une construction très simple pour déterminer sur la lemniscate des arcs égaux à un arc donné, et par conséquent des arcs multiples.

Si à partir d'un point de la lemniscate, on prend, de part et d'autre, deux arcs égaux entre eux, mais d'une largeur quelconque, et que par les extrémités de ces deux arcs on mène les normales aux rayons vecteurs qui aboutissent en ces points, le lieu géométrique du point de concours de ces deux normales sera une ellipse décrite des mêmes foyers que l'hyperbole équilatère correspondante à la lemniscate.

Par chaque point d'une lemniscate on peut mener un cercle tangent à la courbe en ce point et passant par le centre de la courbe. Ces cercles donnent lieu à quelques propriétés. — Étant pris sur une lemniscate plusieurs arcs égaux, si par les extrémités de chacun d'eux on mène les deux cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant par le centre, le point d'intersection de ces deux cercles aura pour lieu géométrique une espèce de lemniscate qui sera le lieu des pieds des normales abaissées du centre de la courbe sur une hyperbole non équilatère. — Étant pris sur une lemniscate deux arcs égaux, si par leurs extrémités on mène quatre cercles tangents à la courbe en ces points respectivement et passant tous quatre par le centre de la courbe, ces quatres cercles seront tangents à un même cercle.

In dem Journal des savants. Mars 1845. befindet sich ein Aufsatz von V. Cousin über Roberval, bekanntlich einen der ausgezeichnetsten Mathematiker des 17ten Jahrhunderts, aus welchem ich folgende Stelle entlehne, die wohl in einer vorzüg-

Digitized by Google

lich der Beförderung des mathematischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift zweckmässig einen Platz finden dürfte. Ausserdem enthält der Aufsatz noch manches andere Interessante, jedoch mehr in philosophischer, als in mathematischer Rücksicht.

Roberval, qui avait toute sa vie professé les mathématiques, avait employé ses dernières années de rédiger ses cours sous le noms d'Éléments de géométrie. Nous n'avons point à nous occuper de cet ouvrage, qui n'a jamais été publié et dont le manuscript subsiste. Après la mort de Roberval, en 1675, Lahire, dépositaire de ses papiers et de ses dernières volontés, revit le travail de son ami, et y mit une préface où il nous apprend quel avait été le dessein de Roberval dans la composition de ces Éléments. Cette préface de Lahire, ainsi que l'avant-propos, écrit tout entier de la main de Roberval, sont vraiment deux pièces intéressantes et qui ne sont point étrangères à la philosophie. Le but de Roberval avait été de ramener la géométrie au plus petit nombre possible de principes ou de définitions, de donner des démonstrations de tout ce qui peut être démontré, même des propositions qu'on a coutume de considérer comme indémonstrables. Leibnitz aussi s'est plaint souvent qu'on n'ait pas été assez loin dans l'analyse des principes, et il n'a cessé d'appeler l'attention des géomètres philosophes sur la nécessité de laisser le moins d'hypothèses possible dans les fondements des sciences mathématiques. Roberval, avant Leibnitz, eut la même pensée et se proposa de donner à ses Éléments de géométrie un caractère particulier de rigueur et d'évidence philosophique. Il s'attacha plus à la solidité qu'a l'élégance, et travailla surtout pour les esprits difficiles. „M. de Roberval, dit Lahire, ayant fait profession dès sa jeunesse, d'enseigner les mathématiques en public et en particulier, et ayant continué ces exercices pendant plusieurs années et jusqu'au temps d'une vieillesse fort avancée, l'on peut dire que jamais homme n'a eu plus de moyens de connoitre et la différence des génies qui s'appliquent à cette science, et quelles sont les méthodes les plus universelles et les plus assurées dont on peut se servir avec succès. C'est à ce propos qu'il nous a dit que, parmi cette infinité de différents esprits qu'il avoit enseignés, il en avoit remarqué particulièrement de deux sortes qui lui avoient donné beaucoup de peine; dont la première étoit de ceux qui admettent les propositions avec trop de facilité, et qui, sans beaucoup s'arrêter à examiner si les démonstrations que l'on leur en fait sont légitimes en toutes leurs parties, passent outre, et prétendent par ce moyen de s'avancer; l'autre, au contraire, étoit de certains esprits pointilleux et opiniâtres, qui s'arretent partout et trouvent des difficultés sur l'explication des théorèmes que l'on démontre, et même sur celle des premiers principes qui ne se démontrent pas; et qu'ensuite, après une observation de plusieurs années, faite avec beaucoup d'application sur les succès de ces deux espèces d'esprits, il disoit que les premiers réussissoient rarement dans l'étude de la mathématique, la plus-part s'en dégoûtant aisément avant que d'arriver à la méditation des connoissances plus élevées, et que ceux même qui continuoient de s'y appliquer devenoient le plus souvent chimériques et visionnaires dans leurs inventions, faisant à touts coups des paralogismes dans leurs raisonnements, et ne pouvant discerner la fausseté

Digitized by Google

de ceux qu'ils trouvoient dans les ouvrages des auteurs. Il ajoutoit que la plus grande partie de ceux qui ont prétendu avoir trouvé la quadrature du cercle, le mouvement perpétuel et la résolution des autres problèmes de cette nature, étoient des esprits de cette première espèce. Il mettoit, au contraire, dans la seconde la pluspart de ces grands génies qui ont produit de si belles choses dans les mathématiques, parce, disoit-il, que cette humeur, qui parôit dans les commencements trop scrupuleuse et importune, venant à se meurir avec le temps et avec le jugement, se change pour l'ordinaire en ce soin et cette application studieuse qu'il faut avoir pour bien examiner les raisonnements, pour bien connôitre la nécessité de la conclusion dans les prémisses, et pour ne se point laisser éblouir au brillant de l'apparence spécieuse d'un paralogisme. C'est donc pour cette sorte d'esprits qu'il a prétendu composer cet ouvrage, dans lequel il a tasché de s'expliquer d'une manière à ne laisser aucun doute, à applanir tout ce qui peut faire naître des scrupules dans l'esprit de ceux qui commencent, à fuir les expressions qui, pouvant avoir divers sens, deviennent obscures et équivoques, à faire le moins de suppositions qu'il luy a été possible, et à démontrer universellement tout ce qui peut être démontré, posant pour un principe inébranlable en mathématiques que rien n'y doit passer pour vrai qui ne soit démontré, s'il le peut être."

In den Blättern für literarische Unterhaltung. 1845. Nr. 71, Nr. 72 und Nr. 73 finden sich in einem interessanten Aufsatze über Claudine von Tencin *) folgende d'Alembert betreffende Stellen:

„Viele Biographen der berühmten Frau haben dem Gedächtnisse derselben einen unvertilgbaren Makel durch die Behauptung anzuhängen gesucht, dass dieselbe den schuldlosen Zeugen ihres Verhältnisses mit Destouches" (Chevalier und Provinzial-Commissair der Artillerie) „auf der Treppe der Kirche St. Jean le Rond seinem Schicksale preisgegeben; mit allen Zeichen der

---

*) War im Jahre 1681 zu Grenoble geboren, ward Nonne im Kloster Montfleuri bei Grenoble, in welchem jetzt die Congregation der Damen von St. Pierre einer Erziehung junger Mädchen vom Stande vorsteht, später Chanoinesse der Abtei Neuville bei Lyon, ward später mit Bewilligung des Pabstes ihres Gelübdes entbunden, lebte dann unter dem ihr von den Parisern beigelegten Namen: „la jolie chanoinesse" in Paris und starb als Marquise v. Tencin am 4ten December 1749 an der Brustwassersucht, nachdem sie an den, nicht auf ihren Wunsch, sondern von ihrer Familie entsendet, mit den Tröstungen der Religion an ihrem Bette erschienenen Priester die folgenden Worte als ihre letzten gerichtet hatte: „Mein Vater, ich bin jung und hübsch gewesen; es ist mir oft gesagt worden, und ich habe die Schwäche gehabt, es stets zu glauben; nun richten Sie und versagen Sie mir Ihren Segen nicht! — Dies war die Mutter d'Alemberts.

Digitized by Google

Wahrheit ausgestattete Documente rechtfertigen aber Claudine von Tencin gegen den Vorwurf einer so vollständigen Verleugnung alles natürlichen Gefühls, und der historisch erwiesene Umstand, dass wenige Tage nach der Geburt des Kindes von unbekannter Hand eine jährliche Pension von 1200 Fr. für dasselbe ausgesetzt ward, kann, sollte man meinen, allein als eine vollgültige Widerlegung der obigen Anschuldigung betrachtet werden. Es scheint, dass das Kind einem Polizeicommissair mit dem Auftrage übergeben ward, eine Amme für dasselbe zu suchen, und dass dieser es bei der Frau eines armen Glasers unterbrachte, welche es erwiesenermaassen mit der Zärtlichkeit einer Mutter aufzog. Das Kind aber, das, so von seinen Aeltern verleugnet, in der Hütte eines armen Handwerkers ein dürftiges Asyl fand, war bestimmt, durch den Glanz seines Genies das Dunkel seiner Geburt zu überstrahlen; der Sohn Claudinens von Tencin und des Chevalier Destouches war d'Alembert."

Claudine war reich und öffnete ihr Haus jetzt *) allen literarisch und artistisch berühmten Personen des 18ten Jahrhunderts, ein Hofstaat, welcher den unvergänglichern Eigenschaften dieser an Weihrauch gewöhnten Gottheit neue Huldigungen darbringen konnte. In den Zusammenkünften der gelehrten Welt bei der Marquise v. Tencin, in welchen Montesquieu, Marivaux, Piron, Duclos und viele Andere gewöhnliche Gäste waren, führte der ehrwürdige Fontenelle den Vorsitz. Nur Eine Zierde fehlte später diesen Cirkeln, d'Alembert, welcher sich durch seine Vorrede zu der „Encyclopädie" als einen der grössten Geister des Jahrhunderts angekündigt hatte, d'Alembert, den seine Mutter jetzt aus demselben Gefühle des Stolzes zu sich rief, aus dem sie früher ihn als hülfloses Kind von sich gestossen. Der Philosoph aber soll auf die Anträge einer Annäherung, welche Frau von Tencin ihm machte, geantwortet haben: Madame, je n'ai pas d'autre mère que la vitrière qui m'a nourri". Und d'Alembert bewies durch die That, dass diese Worte seine Ueberzeugung waren, indem er die ihm von verschiedenen Höfen und Akademien gemachten glänzenden Anträge von der Hand wies und 30 Jahre seines Lebens an der Seite seiner Adoptivmutter hinbrachte.

Einige Bemerkungen über die Wörter „Variation, variabel" u. s. w.

Von Herrn Doctor G. Strauch,
Lehrer der Mathematik zu Muri im Kanton Aargau.

Erstens. In jedem Lehrbuche über Algebra kommt ein Kapitel vor mit der Ueberschrift „Permutationen, Combina-

---

*) Dies bezieht sich natürlich auf eine spätere Zeit des Lebens Claudinens in Paris.

tionen und Variationen". Was man unter diesen Variationen zu verstehen habe, ist jedem Leser dieses Aufsatzes bekannt. Der Name Variation kommt aber auch in der höheren Analysis vor. Die beiderlei Variationen haben aber nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich. Zuweilen findet man, dass man den in die Algebra gehörigen Variationen noch ein Eigenschaftswort beifügt, und sie kombinatorische Variationen nennt; dagegen die in die höhere Analysis gehörigen Variationen hat man ganz ohne Eigenschaftswort gelassen.

Zweitens. Die Aenderungen, welche eine Funktion erleiden kann, sind von zweierlei Art; denn entweder kann man den in der Funktion enthaltenen veränderlichen Grössen Werthänderungen beilegen, das ursprüngliche Wesen der Funktion selbst aber ungestört lassen, oder man kann irgend eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergehen lassen.

A) Aenderungen der ersten Art. Es sei

$$\text{I)} \quad y = \varphi x$$

gegeben, wo x jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x gehe über in $(x+h)$; so bekommt man

$$\text{II)} \quad y + Dy = \varphi(x+h),$$

und man sagt hier: y ist eine Funktion mit einer variabeln (veränderlichen) Grösse. Man sagt noch ferner:

a) Die Grösse x, welcher man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ beilegen kann, ist die unabhängige Variable oder auch die absolut unabhängige Variable.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{III)} \quad y = \varphi(x, w)$$

gegeben, wo sowohl x als auch w jeden beliebigen Werth annehmen kann, und x und w gehen bezüglich über in $(x+h)$ und $(w+k)$; so bekommt man

$$\text{IV)} \quad y + Dy = \varphi[(x+h), (w+k)],$$

und hier sagt man: y ist eine Funktion mit zwei variabeln (veränderlichen) Grössen. Man sagt noch ferner:

a) Die beiden Grössen x und w, welchen man jede beliebige Werthänderung $(x+h)$ und $(w+k)$ beilegen kann, sind die unabhängigen Variabeln oder auch die absolut unabhängigen Variabeln.

b) Die Grösse y, deren Werthänderung abhängig ist von den Werthänderungen $(x+h)$ und $(w+k)$, ist die abhängige Variable.

Es sei ferner

$$\text{V)} \quad y = \varphi(x, w)$$

gegeben, während noch gleichzeitig

$$\text{VI)} \quad w = fx$$

Digitized by Google

bestehen soll; so kann hier nur x jeden beliebigen Werth annehmen, dagegen der Werth des w ist abhängig vom Werthe des x, weil Gleichung VI) stattfindet. Wenn nun x in $(x+h)$ übergeht, so geht Gleichung VI) über in

$$\text{VII)} \quad w+k=f(x+h),$$

durch welche Gleichung vorgeschrieben ist, wie die Werthänderung $(w+k)$ abhängig ist von der Werthänderung $(x+h)$. Gleichung V) geht über in

$$\text{VIII)} \quad y+Dy=\varphi[(x+h),\ (w+k)]$$

und hier sagt man:

a) Die Grösse y ist die abhängige Variable.
b) Die Grösse x ist die absolut unabhängige Variable.
c) Die Grösse w ist die relativ unabhängige Variable, eben weil sie wohl von y unabhängig ist, während sie von x abhängt.

Es ist unnöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Diejenigen Zweige der höheren Analysis, welche, wenn die in einer Funktion befindlichen Variablen eine Werthänderung erleiden, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersuchen und anwenden lehren, sind der Differenzenkalkul und der Differentialkalkul.

B) Aenderungen der zweiten Art. Es sei

$$\text{IX)} \quad y=\varphi x,$$

und diese Funktion gehe über in

$$\text{X)} \quad y+\Delta y=\psi x.$$

Hier ist

$$\text{XI)} \quad \Delta y=\psi x-\varphi x$$

und den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $(\psi x-\varphi x)$ pflegt man Variation (besser aber Gesammtvariation) zu nennen.

Es sei ferner

$$\text{XII)} \quad y=\varphi(x,w)$$

und zugleich sei

$$\text{XIII)} \quad w=fx,$$

so dass Gleichung XII) gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XIV)} \quad y=\varphi(x,fx).$$

Wenn nun $w=fx$ übergeht in

$$\text{XV)} \quad w+\Delta w=Fx,$$

so geht dabei die Gleichung XII) oder XIV) über in

$$\text{XVI)} \quad y+\Delta y=\varphi(x,Fx).$$

Den Ausdruck Δy oder den gleichbedeutenden $[\varphi(x,Fx)-\varphi(x,fx)]$ nennt man auch hier Variation (besser aber Gesammtvariation).

Es ist nicht nöthig, diese Betrachtung auf noch zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Derjenige Zweig der höheren Analy-

Digitized by Google

sis, welcher, wenn eine Funktion in eine ganz andere Funktion übergeht, die daraus folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt, wird Variationskalkul genannt.

Drittens. Ist es nun gleichgiltig, dass das Wort „Variation“ schon in der Algebra und dann wieder im höchsten Zweige der Analysis vorkommt, und so zur Benennung von zweierlei Dingen gebraucht wird, die nicht das Allergeringste mit einander gemeinschaftlich haben?

Wenn man das in Gleichung III) vorkommende w, welchem man die ganz willkürliche Werthänderung $(w+k)$ beilegen kann, eine variable Grösse nennt; ist es dann gut, dass man auch das in Gleichung XII) vorkommende $w=fx$, welches in Fx übergeht, ebenfalls eine variable Grösse nennt?

So gewiss es höchst fatal ist, wenn in einer und derselben Wissenschaft durch ein einziges Wort zwei ganz verschiedene Begriffe bezeichnet werden; so gewiss ist es nöthig, dass hier abgeholfen werde. Wo aber abzuhelfen sei, darüber kann kein Bedenken stattfinden.

Ein Begriff, welcher schon einem früheren Zweige einer Wissenschaft angehört, kommt auch in den späteren Zweigen vor; dagegen ein Begriff, welcher erst einem späteren Zweige angehört, kommt in den früheren Zweigen nicht vor. Der terminus technicus, wodurch ein einem früheren Zweige der Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt also auch in den späteren Zweigen vor; dagegen der terminus technicus, wodurch ein einem späteren Zweige einer Wissenschaft angehörender Begriff ausgedrückt wird, kommt in den früheren Zweigen nicht vor.

Ausserdem ist es Thatsache, dass es viele Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul giebt, in denen keine Spur des sogenannten Variations-Kalkuls vorkommt.

Man thut also am besten, dem höheren Zweige der Analysis, dem sogenannten Variationskalkul, einen anderen Namen zu geben, der so gewählt ist, dass sich für die daselbst vorkommenden Wörter „Variation“ und „variabel“ die entsprechenden Namen von selbst ergeben; denn

1) Dadurch wird in die früheren Zweige der Mathematik nicht die geringste Störung gebracht; und auch

2) Diejenigen Lehrbücher über Differential- und Integral-Kalkul, welche nichts von dem sogenannten Variations-Kalkul enthalten, werden von dieser Namensänderung nicht im Geringsten berührt.

Nachdem nun die Zweckmässigkeit und beziehungsweise die Nothwendigkeit, dem sogenannten Variationskalkul einen anderen Namen zu geben, dargethan ist, fragt sich: welches Wort soll man wählen?

Es wäre dringend nöthig, ein Wort vorzuschlagen. Dieses müsste aus der Lateinischen Sprache entnommen sein, damit, wenn dessen Zweckmässigkeit von anderen Nationen anerkannt wird, sie es bequem auch in ihre Sprache aufnehmen können. Ich habe zwar schon selbst ein Wort gewählt, bin aber bereit, ein zweckmässigeres, wenn eins vorgeschlagen wird, sogleich anzunehmen.

Digitized by Google

XXIV.

Zur sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Dr. Anton Müller hat in seinem Buche „Die allgemeinsten Gesetze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinsten Gleichungen der gauchen Polygone. Heidelberg bei Groos. 1836“ zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks 19 Gleichungen aufgestellt. Wir wollen im Folgenden diese Gleichungen auf einem dem dort betretenen ähnlichen Wege ableiten und dann zeigen, dass eigentlich nur sieben Gleichungen bestehen und die übrigen 12 aus ihnen abgeleitet sind.

Wir suchen im Folgenden die Relationen, die zwischen den ebenen und den Flächenwinkeln einer dreiseitigen körperlichen Ecke bestehen, da von einer solchen aus leicht auf ein sphärisches Dreieck geschlossen werden kann.

§. 1.

Es sei $PA_1A_2A_3$ (Taf. III. Fig. 1.) eine dreiseitige körperliche Ecke; man nenne die Winkel $A_1PA_2 = a_1$, $A_2PA_3 = a_2$, $A_3PA_1 = a_3$; bezeichne ferner den Neigungswinkel von A_1PA_2 und A_2PA_3 durch $\widehat{a_1a_2}$, den von A_2PA_3 und A_3PA_1 durch $\widehat{a_2a_3}$, und den der Ebenen A_3PA_1 und A_1PA_2 durch $\widehat{a_3a_1}$. Man nehme im Innern der Ecke willkührlich einen Punkt O an und fälle von ihm aus Senkrechte auf die Ebenen der Ecke; OO_1 senkrecht auf A_1PA_2; OO_2 senkrecht auf A_2PA_3; OO_3 senkrecht auf

Digitized by Google

A_3PA_1. Man lege durch OO_1 und OO_2 eine Ebene, welche die Kante PA_2 in A_2 schneidet, so steht PA_2 senkrecht auf dieser Ebene; dessgleichen steht PA_1 senkrecht auf der durch OO_1 und OO_3; PA_3 auf der durch OO_2 und OO_3 gelegten Ebene. Diese drei Ebenen bilden abermals eine Pyramide. Ihre Linienwinkel sind $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$, $O_2OO_3 = 180 - \widehat{a_2a_3}$, $O_3OO_1 = 180 - \widehat{a_3a_1}$; ihre Neigungswinkel sind $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, $A_2O_2A_3 = 180 - a_2$, $A_3O_3A_1 = 180 - a_3$.

§. 2.

Da in dem Vierecke $PA_1O_1A_2$: $O_1A_1P = 90$, $O_1A_2P = 90$, $A_2PA_1 = a_1$, $A_1O_1A_2 = 180 - a_1$, so findet man:

$$\begin{aligned} PA_1 &= PA_2 \cos a_1 + A_2O_1 \sin a_1, \\ A_1O_1 &= PA_2 \sin a_1 - A_2O_1 \cos a_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} PA_2 &= PA_3 \cos a_2 + A_3O_2 \sin a_2, \\ A_2O_2 &= PA_3 \sin a_2 - A_3O_2 \cos a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} PA_3 &= PA_1 \cos a_3 + A_1O_3 \sin a_3, \\ A_3O_3 &= PA_1 \sin a_3 - A_1O_3 \cos a_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln auch gelten, wenn die Winkel a_1, a_2, a_3 stumpf sind; nur muss man die Linien PA_1, PA_2, PA_3, im Falle sie auf die andere Seite von P fallen, als hier angenommen ist, als negativ betrachten.

Eben so findet man aus dem Vierecke $A_2O_1OO_2$, da $OO_1A_2 = OO_2A_2 = 90$, $O_1A_2O_2 = \widehat{a_1a_2}$, $O_1OO_2 = 180 - \widehat{a_1a_2}$:

$$\begin{aligned} A_2O_1 &= A_2O_2 \cos \widehat{a_1a_2} + OO_2 \sin \widehat{a_1a_2}, \\ OO_1 &= A_2O_2 \sin \widehat{a_1a_2} - OO_2 \cos \widehat{a_1a_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dessgleichen

$$\begin{aligned} A_3O_2 &= A_3O_3 \cos \widehat{a_2a_3} + OO_3 \sin \widehat{a_2a_3}, \\ OO_2 &= A_3O_3 \sin \widehat{a_2a_3} - OO_3 \cos \widehat{a_2a_3} \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} A_1O_3 &= A_1O_1 \cos \widehat{a_3a_1} + OO_1 \sin \widehat{a_3a_1}, \\ OO_3 &= A_1O_1 \sin \widehat{a_3a_1} - OO_1 \cos \widehat{a_3a_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Auch diese Formeln gelten allgemein; nur müssten Linien, die auf entgegengesetzte Weise fallen, als hier angenommen, als negativ betrachtet werden.

Digitized by Google

Diese sechs Formeln sollen nun zur Herleitung der gesuchten Sätze dienen.

§ 3.

Man setze in (1) den Werth von A_2O_1 aus (4), so findet man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_2\cos a_1 + A_2O_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1 + OO_2\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_1\,, \\ A_1O_1 &= PA_2\sin a_1 - A_2O_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_1 - OO_2\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

In (7) setze man die Werthe von PA_2 und A_2O_2 aus (2), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_3[\cos a_1\cos a_2 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2] \\ &\quad + A_3O_2[\cos a_1\sin a_2 - \cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1] + OO_2\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_1, \\ A_1O_1 &= PA_3[\sin a_1\cos a_2 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2] \\ &\quad + A_3O_2[\sin a_1\sin a_2 + \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_1\cos a_2] - OO_2\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Man setze in (8) für A_3O_2 und OO_2 ihre Werthe aus (5):

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_3[\cos a_1\cos a_2 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2] \\ &\quad + A_3O_3[\cos a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3} - \cos a_2\sin a_1\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} + \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2\widehat{a_3}] \\ &\quad + OO_3[\cos a_1\sin a_2\sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}], \\ A_1O_1 &= PA_3[\sin a_1\cos a_2 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2] \\ &\quad + A_3O_3[\sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}] \\ &\quad + OO_3[\sin a_1\sin a_2\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Hierin setze man für PA_3 und A_3O_3 ihre Werthe aus (3), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_1[\cos a_1\cos a_2\cos a_3 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2\cos a_3 + \cos a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3 \\ &\qquad - \cos a_2\sin a_1\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3 + \sin a_1\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3] \\ &\quad + A_1O_3[\cos a_1\cos a_2\sin a_3 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2\sin a_3 - \cos a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 \\ &\qquad + \cos a_2\sin a_1\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 - \sin a_1\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3] \\ &\quad + OO_3[\cos a_1\sin a_2\sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1O_1 &= PA_1[\sin a_1\cos a_2\cos a_3 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\cos a_3 + \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3 \\ &\qquad + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3 - \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3]. \\ &\quad + A_1O_3[\sin a_1\cos a_2\sin a_3 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\sin a_3 - \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 \\ &\qquad - \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 + \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3]. \\ &\quad + OO_3[\sin a_1\sin a_2\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}]. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Digitized by Google

In die Gleichung (11′) setze man für A_1O_3, OO_3 ihre Werthe aus (6), so erhält man:

$$\begin{aligned}A_1O_1 = PA_1[&\sin a_1\cos a_2\cos a_3 - \cos a_1\sin a_2\cos a_3\cos\widehat{a_1a_2} + \sin a_1\sin a_2\sin a_3\cos\widehat{a_2a_3}\\ &+\cos a_1\cos a_2\sin a_3\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3} - \sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\sin a_3]\\ +A_1O_1[&\sin a_1\cos a_2\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1} - \cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}\\ &-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1} - \cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}\\ &+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_3a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1} + \sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}\\ &+\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1} + \cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}]\\ +OO_1[&\sin a_1\cos a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1} - \cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}\\ &-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1} - \cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}\\ &+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1} - \sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}\\ &-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1} - \cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}].\end{aligned}$$

§. 4.

Eine Reihe Gleichungen erhält man, wenn man in entgegengesetzter Ordnung in der Figur vorschreitet. Diese Gleichungen leiten sich leicht aus den aufgeführten ab, wenn man statt

$$PA_1, PA_2, PA_3, A_2O_1, A_3O_2, A_1O_3, OO_1, OO_2, OO_3, A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3$$

respective setzt:

$$PA_1, PA_3, PA_2, A_3O_3, A_2O_2, A_1O_1, OO_3, OO_2, OO_1, A_1O_3, A_3O_2, A_2O_1;$$

und statt

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_3a_1}$$

setzt:

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_2a_1},\ \widehat{a_1a_3}.$$

Setzt man diess, so wird man folgende, den frühern analoge Gleichungen erhalten:

Aus (1):

$$PA_1 = PA_3\cos a_3 + A_3O_3\sin a_3. \qquad (12)$$

Aus (7):

$$PA_1 = PA_3\cos a_3 + A_3O_3\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3 + OO_2\sin\widehat{a_2a_3}\sin a_3. \qquad (13)$$

Aus (8):

$$\begin{aligned}PA_1 = PA_2[&\cos a_3\cos a_2 + \cos\widehat{a_3a_2}\sin a_3\sin a_2]\\ &+A_2O_2[\cos a_3\sin a_2 - \cos a_2\cos\widehat{a_3a_2}\sin a_3] + OO_2\sin\widehat{a_3a_2}\sin a_3.\end{aligned} \qquad (14)$$

Digitized by Google

Aus (9):

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_2[\cos a_3 \cos a_2 + \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_3 \sin a_2] \\ &+ A_2O_1[\cos a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} - \cos a_2 \sin a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} + \sin a_2\widehat{a_3} \sin a_3 \sin a_1\widehat{a_2}] \\ &+ OO_1[\cos a_3 \sin a_2 \sin a_1\widehat{a_2} - \sin a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} - \sin a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2}] \end{aligned}\right\} (15)$$

Aus (10):

$$\left.\begin{aligned} PA_1 &= PA_1[\cos a_3 \cos a_2 \cos a_1 + \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1 + \cos a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 \\ &\quad - \cos a_2 \sin a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 + \sin a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_1] \\ &+ A_1O_1[\cos a_3 \cos a_2 \sin a_1 + \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_3 \sin a_2 \sin a_1 - \cos a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \\ &\quad + \cos a_2 \sin a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 - \sin a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_1] \\ &+ OO_1[\cos a_3 \sin a_2 \sin a_1\widehat{a_2} - \sin a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} - \sin a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2}]. \end{aligned}\right\} (16)$$

§. 5.

Aus den bis jetzt erhaltenen Gleichungen kann man nun schon das Folgende entnehmen.

Bezeichnet man, zur Abkürzung, in der Gleichung (10) den Koeffizienten von PA_1 mit h, den von A_1O_3 mit k, den von OO_3 mit n, so ist

$$PA_1 = PA_1h + A_1O_3k + OO_3n. \quad (10)$$

Nun haben wir aber über die Lage des Punktes O gar keine bestimmte Voraussetzung gemacht, sondern ihn lediglich im Innern der Pyramide vorausgesetzt. Nehmen wir nun an, er liege in der Fläche PA_1A_3, so ändert diess an den Winkeln, die in (10) vorkommen, nichts, sowie, wenn O in O_3 vorausgesetzt wird, nichts an der Länge von PA_1 und A_1O_3. Aber alsdann ist $OO_3=0$ und folglich

$$PA_1 = PA_1h + A_1O_3k. \quad (17)$$

Diese Gleichung, da sie in einem einzelnen Falle besteht, wird allgemein bestehen müssen, da die in (17) und (10) vorkommenden Grössen durchaus die gleichen sind. Setzt man also (17) in (10), so wird man haben:

$$\cos a_1 \sin a_2 \sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1 \cos a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_2\widehat{a_3} - \sin a_1 \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_2\widehat{a_3} = 0. \quad (I)$$

Verlegt man nun den Punkt O_3 in A_1, so wird an den in (17) vorkommenden Winkeln nichts geändert, nur wird $A_1O_3=0$, also

$$PA_1 = PA_1h, \quad (18)$$

woraus $h=1$ und aus (17) $k=0$ folgt. Also hat man noch:

Digitized by Google

$$1=\cos a_1\cos a_2\cos a_3+\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2\cos a_3+\cos a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3$$
$$-\cos a_2\sin a_1\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3+\sin a_1\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin a_3. \quad \text{(II)}$$

$$0=\cos a_1\cos a_2\sin a_3+\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_1\sin a_2\sin a_3-\cos a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3$$
$$+\sin a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3-\sin a_1\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3. \quad \text{(III)}$$

Diese drei Gleichungen drücken nun bestimmte Beziehungen zwischen Linienwinkeln und Flächenwinkeln der dreiseitigen Ecke aus. Sie sind als allgemeiner Ausdruck einer Reihe von Beziehungen zu betrachten. So drückt (III) Relationen aus zwischen a_1, a_2, a_3 und den zwei dem ersten und letzten (a_1 und a_3) gegenüberliegenden Flächenwinkeln; sie wird also auch noch bestehen, wenn man

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3}$$

vertauscht mit

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2}.$$

Aehnliches gilt von den andern zwei Gleichungen.

Untersucht man die Gleichung (11), so sieht man zuerst, dass der Koeffizient von PA_1 Null ist, indem er aus (III) entsteht, wenn man die eben erwähnte Vertauschung vornimmt.

Man findet dann wie oben:

$$1=\sin a_1\cos a_2\sin a_3\cos\widehat{a_1a_3}-\cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\sin a_3$$
$$-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_1a_3}-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1} \quad \text{(I}$$
$$+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1}+\sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}$$
$$+\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}+\cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1}.$$

$$0=\sin a_1\cos a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\cos\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}$$
$$-\sin a_1\sin a_2\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1} \quad \text{(V}$$
$$+\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_1\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1}-\sin a_1\sin a_2\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\widehat{a_3a_1}$$
$$-\cos a_1\cos a_2\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}-\cos a_1\sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1}.$$

Untersucht man die Gleichung (16), so sieht man, dass sie identisch ist nach (II), (III) und (I), wenn man vertauscht

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3}$$

mit

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2}.$$

Diese Gleichung giebt also nichts Neues.

Aus (12) folgt ein Werth von PA_1, der dem in (9) gleich gesetzt werden kann. Beachtet man die Gleichung (I), so ergiebt sich daraus auf die oben angeführte Weise:

Digitized by Google

$$\cos a_3 = \cos a_1 \cos a_2 + \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 \sin a_2. \qquad \text{(VI)}$$

$$\sin a_3 = \cos a_1 \sin a_2 \cos a_2\widehat{a_3} - \cos a_2 \sin a_1 \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_2\widehat{a_3} + \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_1 \sin a_2\widehat{a_3}. \qquad \text{(VII)}$$

Eben so findet man, wenn man die Werthe von PA_1 aus (13) und (8) gleich setzt und (VI) beachtet:

$$\cos a_2\widehat{a_3} \sin a_3 = \cos a_1 \sin a_2 - \cos a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1. \qquad \text{(VIII)}$$

$$\sin a_2\widehat{a_3} \sin a_3 = \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_1. \qquad \text{(IX)}$$

Vergleicht man die Werthe von PA_1 aus (14) und (7), so erhält man (VI), (V), (IX); durch (15) und (1) aber: (I), (VII), (VI).

§. 6.

Setzt man ferner in die Gleichungen (1), (7), (8), (9), (11′), (11) die Werthe, wie sie für die andere Folge in §. 4. bezeichnet wurden, so erhält man:

$$A_1O_3 = PA_3 \sin a_3 - A_3O_3 \cos a_3. \qquad (18)$$

$$A_1O_3 = PA_3 \sin a_3 - A_3O_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_3 - OO_2 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3. \qquad (19)$$

$$A_1O_3 = PA_2[\sin a_3 \cos a_2 - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2] + A_2O_2[\sin a_3 \sin a_2 + \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \cos a_2] - OO_2 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3. \qquad (20)$$

$$A_1O_3 = PA_2[\sin a_3 \cos a_2 - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2] + A_2O_1[\sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} + \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} - \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2}] + OO_1[\sin a_3 \sin a_2 \sin a_2\widehat{a_1} + \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_1} \sin a_1\widehat{a_2} + \cos a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2}]. \qquad (21)$$

$$A_1O_3 = PA_1[\sin a_3 \cos a_2 \cos a_1 - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2 \cos a_1 + \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 + \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 - \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_1] + A_1O_1[\sin a_3 \cos a_2 \sin a_1 - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2 \sin a_1 - \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 - \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 + \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_1] + OO_1[\sin a_3 \sin a_2 \sin a_1\widehat{a_2} + \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} + \cos a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2}]. \qquad (22)$$

$$A_1O_3 = PA_1[\sin a_3 \cos a_2 \cos a_1 - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2 \cos a_1 + \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 + \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1 - \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_1] + A_1O_3[\sin a_3 \cos a_2 \sin a_1 \cos a_1\widehat{a_3} - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2 \sin a_1 \cos a_1\widehat{a_3} - \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \cos a_1\widehat{a_3} + \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \cos a_1\widehat{a_3} + \sin a_3 \sin a_2 \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_3\widehat{a_1} + \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} \sin a_3\widehat{a_1} + \cos a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \sin a_1\widehat{a_3}] + OO_3[\sin a_3 \cos a_2 \sin a_1\widehat{a_3} - \cos a_3 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_2 \sin a_1 \sin a_1\widehat{a_3} - \sin a_3 \sin a_2 \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \sin a_1\widehat{a_3} - \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \sin a_1\widehat{a_3} + \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_3 \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_1 \sin a_1\widehat{a_3} - \sin a_1 \sin a_2 \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_3\widehat{a_1} - \cos a_3 \cos a_2 \cos a_2\widehat{a_3} \sin a_1\widehat{a_2} \cos a_3\widehat{a_1} - \cos a_3 \sin a_2\widehat{a_3} \cos a_1\widehat{a_2} \cos a_1\widehat{a_3}]. \qquad (23)$$

Digitized by Google

Diese letztere Gleichung ist nach (IV), (V), (III) identisch, giebt also nichts Neues.

§. 7.

Da die Flächen im Punkte O ebenfalls eine Pyramide bilden, in deren Innerm der Punkt P liegt, so gelten alle Sätze, die wir im Vorstehenden für die erste Pyramide abgeleitet haben, auch für diese zweite. Man wird die neuen Sätze finden, wenn man statt

$$PA_1, PA_2, PA_3, A_2O_1, A_3O_2, A_1O_3, OO_1, OO_2, OO_3, A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3$$

setzt:

$$OO_1, OO_2, OO_3, A_2O_2, A_3O_3, A_1O_1, PA_2, PA_3, PA_1, A_2O_1, O_2A_3, O_3A_1;$$

und statt

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \widehat{a_1a_2}, \quad \widehat{a_2a_3}, \quad \widehat{a_3a_1}$$

setzt:

$$180-\widehat{a_1a_2},\ 180-\widehat{a_2a_3},\ 180-\widehat{a_3a_1},\ 180-a_2,\ 180-a_3,\ 180-a_1.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (I) bis (IX), so erhält man aus (I), (IV), (IX) Gleichungen, die durch einfache Vertauschungen zusammenfallen mit denen, aus welchen sie abgeleitet sind; indem man vertauscht

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_3a_1}$$

mit (resp.)

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2},$$

$$a_1,\ a_3,\ a_2,\ \widehat{a_1a_3},\ \widehat{a_2a_3},\ \widehat{a_1a_2},$$

$$a_2,\ a_1,\ a_3,\ \widehat{a_1a_2},\ \widehat{a_3a_1},$$

was man offenbar darf.

Die 6 andern Gleichungen geben folgende neue Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 = &-\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1} + \cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos\widehat{a_3a_1} \\ &+\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1} + \cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_1a_2}\cos a_2\cos a_3\sin\widehat{a_3a_1} \\ &+\sin\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\sin\widehat{a_3a_1}. \end{aligned}\right\} \text{(X)}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\cos\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1} - \cos a_2\sin\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\sin\widehat{a_3a_1} \\ &+\cos\widehat{a_1a_2}\sin\widehat{a_2a_3}\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1} + \sin\widehat{a_1a_2}\cos\widehat{a_2a_3}\cos a_2\cos a_3\cos\widehat{a_3a_1} \\ &+\sin\widehat{a_1a_2}\sin a_2\sin a_3\cos\widehat{a_3a_1}. \end{aligned}\right\} \text{(XI)}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}1 = &-\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_1 - \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_1\\ &-\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1 + \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1\\ &+\sin a_2\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_1 + \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\sin a_3\cos a_1\\ &-\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\sin a_3\cos a_1 + \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\cos a_3\cos a_1.\end{aligned}\right\}\quad (XII)$$

$$-\cos a_3\widehat{a_1} = \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} - \cos a_2\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}. \quad (XIII)$$

$$\sin a_1\widehat{a_1} = \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3 + \cos a_2\widehat{a_3}\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\cos a_3 + \sin a_2\sin a_1\widehat{a_2}\sin a_3. \quad (XIV)$$

$$\cos a_3\sin a_3\widehat{a_1} = \cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3} + \cos a_2\widehat{a_3}\cos a_2\sin a_1\widehat{a_2}. \quad (XV)$$

§. 8.

Setzt man in die Gleichungen des §. 6. die Werthe, wie sie zu Eingang des §. 7. angegeben wurden, so findet man:

Aus (18):

$$A_1O_1 = OO_3\sin a_3\widehat{a_1} + A_1O_3\cos a_3\widehat{a_1}.$$

Setzt man diesen Werth von A_1O_1 dem in (11′) gleich, so findet man die Gleichungen (III) und (XIV) und

$$\left.\begin{aligned}\cos a_3\widehat{a_1} = &\sin a_1\cos a_2\sin a_3 - \cos a_1\cos a_1\widehat{a_2}\sin a_2\sin a_3 - \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3\\ &-\cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\cos a_3 + \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3.\end{aligned}\right\}\quad (XVI)$$

Aus (19):

$$A_1O_1 = OO_3\sin a_3\widehat{a_1} - A_3O_3\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1} + PA_3\sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}.$$

Diess dem Werthe von A_1O_1 in (9) gleich gesetzt, giebt (VIII), (XIV) und

$$-\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1} = \sin a_1\sin a_2\cos a_2\widehat{a_3} + \cos a_1\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3} - \sin a_1\widehat{a_2}\cos a_1\sin a_2\widehat{a_3}. \quad (XVII)$$

Aus (20) folgt ein Werth von A_1O_1, der, dem in (8) gleichgesetzt, führt zu den Gleichungen (VIII), (XV) und

$$\sin a_3\widehat{a_1}\sin a_2\widehat{a_3} - \cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\cos a_2\widehat{a_3} = \sin a_1\sin a_2 + \cos a_1\widehat{a_2}\cos a_1\cos a_2. \quad (XVIII)$$

Aus (21) folgt ebenfalls ein Werth von A_1O_1, der, verglichen mit dem in (7), zu den Gleichungen (VII), (XVII), (XV) führt.

Endlich ergiebt sich aus (22) ein Werth von A_1O_1, der verglichen mit dem in (1) zu (VII), (XI) führt und zu

$$\left.\begin{aligned}\cos a_1 = &\sin a_1\widehat{a_2}\cos a_2\widehat{a_3}\sin a_3\widehat{a_1} + \sin a_1\widehat{a_2}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_3\widehat{a_1}\\ &+\sin a_1\widehat{a_3}\sin a_2\widehat{a_3}\cos a_2\cos a_1\widehat{a_2} - \cos a_3\widehat{a_1}\cos a_3\widehat{a_3}\cos a_3\cos a_3\cos a_1\widehat{a_2}\\ &-\sin a_3\cos a_3\widehat{a_1}\sin a_2\cos a_1\widehat{a_2}.\end{aligned}\right\}\quad (XIX)$$

Digitized by Google

Hiermit ist die Reihe der Untersuchungen geschlossen und als Resultat haben wir 19 Beziehungen erhalten; diese gelten eben so gut für ein sphärisches Dreieck, als für die körperliche Ecke.

§. 9.

Bezeichnet man die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks (in Graden) mit a, b, c; die drei gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, so hat man statt

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \widehat{a_1 a_2},\ \widehat{a_2 a_3},\ \widehat{a_3 a_1}$$

zu setzen

$$a,\ b,\ c,\ C,\ A,\ B;$$

und man erhält somit folgende 19 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 = &\sin a\cos b\sin c\cos B - \cos a\cos C\sin b\cos B\sin c \\ &- \sin a\sin b\cos A\cos c\cos B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\cos B \\ &+ \sin C\cos a\sin A\cos c\cos B + \sin a\sin b\sin A\sin B \\ &+ \cos a\cos b\cos C\sin A\sin B + \cos a\sin C\cos A\sin B. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &-\sin C\cos A\sin B\sin a - \cos C\cos b\sin A\sin B\sin a \\ &- \sin C\sin A\cos c\cos B\sin a + \cos C\cos A\cos b\cos c\cos B\sin a \\ &+ \sin b\cos C\sin c\cos B\sin a + \sin C\sin A\sin c\cos a \\ &- \cos C\cos A\cos b\sin c\cos a + \cos C\sin b\cos c\cos a. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\sin a\cos b\sin c\sin B - \cos a\cos C\sin b\sin c\sin B \\ &- \sin a\sin b\cos A\cos c\sin B - \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c\sin B \\ &+ \sin C\cos a\sin A\cos c\sin B - \sin a\sin b\sin A\cos B \\ &- \cos a\cos b\cos C\sin A\cos B - \cos a\sin C\cos A\cos B. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \cos a = &\sin C\cos A\sin B + \sin C\sin A\cos c\cos B + \sin B\sin A\cos b\cos C \\ &- \cos B\cos A\cos c\cos b\cos C - \sin c\cos B\sin b\cos C. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos B = &\sin a\cos b\sin c - \cos a\cos C\sin b\sin c - \sin a\sin b\cos A\cos c \\ &- \cos a\cos b\cos C\cos A\cos c + \sin A\cos a\cos c\sin C. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 0 = &\cos a\cos b\sin c + \cos C\sin a\sin b\sin c - \cos a\sin b\cos A\cos c \\ &+ \sin a\cos b\cos C\cos A\cos c - \sin a\sin C\sin A\cos c. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 0 = &\cos C\cos A\sin B - \cos b\sin C\sin A\sin B + \cos C\sin A\cos c\cos B \\ &+ \sin C\cos A\cos b\cos c\cos B + \sin C\sin b\sin c\cos B. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 1 = &\cos a\cos b\cos c + \cos C\sin a\sin b\cos c + \cos a\sin b\cos A\sin c \\ &- \cos b\sin a\cos C\cos A\sin c + \sin a\sin C\sin A\sin c. \end{aligned} \quad (8$$

Digitized by Google

$$1 = -\cos C\cos A\cos B + \cos b\sin C\sin A\cos B + \cos C\sin A\cos c\sin B + \cos A\sin C\cos b\cos c\sin B + \sin C\sin b\sin c\sin B. \quad (9)$$

$$-\cos c\cos B = \sin a\sin b\cos A + \cos a\cos b\cos A\cos C - \cos a\sin A\sin C. \quad (10)$$

$$\sin B\sin A - \cos c\cos B\cos A = \sin a\sin b + \cos C\cos a\cos b. \quad (11)$$

$$\sin c = \cos a\sin b\cos A - \cos b\sin a\cos A\cos C + \sin a\sin A\sin C. \quad (12)$$

$$\sin B = \cos C\sin A\cos c + \cos A\sin C\cos b\cos c + \sin b\sin c\sin C. \quad (13)$$

$$0 = \cos a\sin b\sin A - \sin a\cos b\cos C\sin A - \sin a\sin C\cos A. \quad (14)$$

$$\cos A\sin c = \cos a\sin b - \cos b\cos C\sin a. \quad (15)$$

$$-\cos B = \cos A\cos C - \cos b\sin A\sin C. \quad (16)$$

$$\cos c\sin B = \cos C\sin A + \cos A\sin C\cos b. \quad (17)$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C. \quad (18)$$

$$\sin A\sin c = \sin a\sin C. \quad (19)$$

Diese (19) merkwürdigen Relationen finden in jedem sphärischen Dreiecke statt. Da aus drei gegebenen Stücken die drei andern müssen gesucht werden können und von diesen dreien immer Sin. und Cos. gesucht werden muss, so sind 6 Gleichungen zur Auflösung nöthig. Da aber diese Gleichungen nicht vom ersten Grade sind, so ist eine weitere siebente nöthig, um die Bestimmungen unzweideutig zu machen. Im Allgemeinen werden also für ein sphärisches Dreieck sieben, alle Winkel umfassende, wesentlich verschiedene Relationen Statt haben müssen. Dies wollen wir im folgenden Paragraphen betrachten. Wir bemerken hier nur, dass die vorstehenden 19 Sätze alle wahr sind, wenn man vertauscht

	a, b, c, A, B, C
mit	b, c, a, B, C, A
oder	c, a, b, C, A, B
oder	a, c, b, A, C, B
oder	c, b, a, C, B, A
oder	$b, a, c, B, A, C.$

§. 10.

Die sieben Grundgleichungen, von denen wir im §. 9. gesprochen, sind offenbar (1), (2), (3), (4), (5), (10, (11). Aus ihnen leiten sich alle anderen ab. Auf folgende Art kann man alle 12 anderen erhalten.

Man multiplizire (5) mit $\cos c$ und addire (10), so erhält man eine Gleichung, die aus (6) entsteht, wenn man a und c vertauscht; (6) folgt also aus (5) und (10).

Digitized by Google

Multiplizirt man (4) mit $\cos B$, wechselt in (10) a und c und addirt, so erhält man eine Gleichung, die (7) giebt, wenn man B und C vertauscht; (7) folgt aus (4) und (10).

Multiplizirt man (4) mit $\sin a$ und addirt (2), so erhält man (12).

Multiplizirt man (5) mit $\sin B$ und subtrahirt (3), so erhält man (13).

Multiplizirt man (10) mit $\cos c$ und addirt (5), so erhält man (15).

Multiplizirt man (10) mit $\cos B$ und addirt (4), nachdem a und c gewechselt wurden, so erhält man (17).

Multiplizirt man (13) mit $\cos c$ und subtrahirt (17), so erhält man (14).

Setzt man den Werth von $\cos a \sin b \cos A - \sin a \sin A \sin C + \sin a \cos b \cos A \cos C$ aus (12) in (6), so erhält man (18).

Zieht man die Werthe von $\sin a$ und $\cos a$ aus (12) und (18) und setzt sie in (1), so erhält man (9).

Multiplizirt man (7) mit $\sin B$ und (9) mit $\cos B$ und subtrahirt, so findet man (16).

Setzt man in (1) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ aus (13) und (16), so erhält man (8).

Setzt man aus (13) und (16) die Werthe von $\sin B$ und $\cos B$ in (11) und beachtet (18), so erhält man (19).

Die Ordnung, in der also die Gleichungen des §. 9. zu folgen haben, ist:

(1), (2), (3), (4), (5), (10), (11) — Grundgleichungen.
(6) abgeleitet aus (5) und (10);
(7) „ „ (4) „ (10);
(12) „ „ (2) „ (4);
(13) „ „ (3) „ (5);
(15) „ „ (5) „ (10);
(17) „ „ (4) „ (10);
(14) „ „ (13) „ (17);
(18) „ „ (6) „ (12);
(9) „ „ (1) „ (12) und (18);
(16) „ „ (7) „ (9);
(8) „ „ (1) „ (13) und (16);
(19) „ „ (11) „ (13) und (16) und (18).

Dadurch ist nun thatsächlich nachgewiesen, dass jene 19 Gleichungen nicht lauter Grundgleichungen sind. Aber es hat Doctor A. Müller neue, sehr schöne und symmetrische Relationen aufgestellt. Wir übergehen hier die Anwendungen, da sie nicht im Zwecke des gegenwärtigen Aufsatzes liegen. Nur wollen wir noch zeigen, wie die Gaussischen Formeln unmittelbar abgeleitet werden können, nicht zu gedenken der Schaar neuer Sätze, die durch Kombination der 19 Gleichungen gewonnen werden könnten.

Digitized by Google

§. 11.

Die Gleichung (16) giebt

$$-\cos C = \cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B.$$

Addirt man nun die Gleichungen (18), (11) und diese Gleichung, so erhält man

$$\cos c + \sin A \sin B - \cos c \cos A \cos B + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c =$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C - \cos C$$

oder

$$\cos c + \cos(A-B) - \cos c \cos(A-B) = \cos(a-b) + \cos C \cos(a-b) - \cos C$$

also auch

$$1 - \cos c - \cos(A-B) + \cos c \cos(A-B) = 1 - \cos(a-b) - \cos C \cos(a-b) + \cos C$$

oder

$$(1-\cos(A-B))(1-\cos c) = (1-\cos(a-b))(1+\cos C),$$

d. i.

$$\sin^2 \frac{A-B}{2} \cdot \sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \frac{a-b}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$$

oder

$$\sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}. \quad (A)$$

Aus den drei Gleichungen (18), (11), (16) ergiebt sich:

$$1 + \cos C + \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C$$
$$= 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c + \cos c + \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c,$$

d. i.

$$1 + \cos C + \cos(a-b) + \cos(a-b)\cos C = 1 + \cos c - \cos(A+B) - \cos c \cos(A+B)$$

oder

$$(1+\cos(a-b))(1+\cos C) = (1-\cos(A+B))(1+\cos c),$$

woraus

$$\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}. \quad (B).$$

Digitized by Google

Aus denselben drei Gleichungen zieht man ferner:

$$1-\cos C-\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos C+\sin a\sin b+\cos a\cos b\cos C$$
$$=1+\cos A\cos B-\sin A\sin B\cos c-\cos c+\sin A\sin B-\cos A\cos B\cos c$$

oder

$$(1-\cos(a+b))(1-\cos C)=(1+\cos(A+B))(1-\cos c),$$

woraus

$$\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{c}{2}. \quad (C)$$

Endlich aus den nämlichen drei Gleichungen:

$$1-\cos C+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C-\sin a\sin b-\cos a\cos b\cos C$$
$$=1+\cos A\cos B-\sin A\sin B\cos c+\cos c-\sin A\sin B+\cos A\cos B\cos c,$$

woraus

$$(1-\cos C)(1+\cos(a+b))=(1+\cos c)(1+\cos(A+B)),$$

d. i. endlich

$$\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{c}{2}, \quad (D)$$

welches die vier Gaussischen Formeln sind.

XXV.

Ueber die in dem Aufsatze Theil III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Die in dem Aufsatze Thl. III. Nr. VII. aufgelöste geodätische Aufgabe, für welche, wenn man sie aus einem rein geometrischen Gesichtspunkte auffasst, auch Herr Oberlehrer Seydewitz an

Digitized by Google

dem Gymnasium zu Heiligenstadt in dem Aufsatze Theil III. Nr. XLI. eine Auflösung durch Construction gegeben hat, scheint mir für die Praxis nicht unwichtig zu sein und zuweilen eine vortheilhafte Anwendung in derselben zu gestatten. Und wenn mir nun auch jetzt noch die a. a. O. gegebene, eine doppelte Anwendung des gewöhnlich nach Pothenot benannten Problems in Anspruch nehmende Auflösung gerade für die Praxis die zweckmässigste zu sein scheint, so will ich doch jetzt im Folgenden noch eine analytische, die Anwendung des Pothenotschen Problems nicht voraussetzende Auflösung dieser Aufgabe geben, welche mir nicht ohne Interesse zu sein scheint.

Es seien also, indem wir uns jetzt theilweise einer anderen Bezeichnung, als in dem Aufsatze Thl. III. Nr. VII. bedienen, M und M_1 zwei Punkte, deren Lage aus einer früheren Messung bekannt ist. Man kann aber keinen dieser beiden Punkte von dem andern aus sehen. Dagegen sieht man sowohl von M, als auch von M_1 aus drei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte M', M_1', M_2', und misst in M die 180^0 nicht übersteigenden Winkel $M'MM_1'$, $M'MM_2'$, $M_1'MM_2'$; in M_1 die 180^0 nicht übersteigenden Winkel $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ $M_1'M_1M_2'$. Ist es dann möglich, noch die drei Winkel $M_1'M'M_2'$, $M_2'M_1'M'$, $M'M_2'M_1'$ des durch die Punkte M', M_1', M_2' bestimmten Dreiecks $M'M_1'M_2'$ zu messen, so kann man die Lage der drei Punkte M', M_1', M_2' bestimmen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wir legen ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem zum Grunde und bezeichnen in Bezug auf dasselbe die bekannten Coordinaten der Punkte M und M_1 respective durch x, y und x_1, y_1; die unbekannten Coordinaten der Punkte M', M_1', M_2' respective durch x', y'; x_1', y_1'; x_2' y_2'.

Durch den Punkt M denken wir uns ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem der $\xi\eta$ gelegt, und bezeichnen in Bezug auf dieses neue System die Coordinaten der Punkte M', M_1', M_2' respective durch ξ', η'; ξ_1', η_1'; ξ_2', η_2'; so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x'=x+\xi', & y'=y+\eta'; \\ x_1'=x+\xi_1', & y_1'=y+\eta_1'; \\ x_2'=x+\xi_2', & y_2'=y+\eta_2'. \end{cases}$$

Die von den Linien MM', MM_1', MM_2', welche durch ϱ, ϱ_1, ϱ_2 bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der ξ an durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch von 0 bis 360^0 gezählten Winkel wollen wir durch φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ bezeichnen, wo α und β sich immer aus den gemessenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkeln $M'MM_1'$, $M'MM_2'$ leicht werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$2)\quad \begin{cases} \xi'=\varrho\cos\varphi, & \eta'=\varrho\sin\varphi; \\ \xi_1'=\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & \eta_1'=\varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ \xi_2'=\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & \eta_2'=\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

Digitized by Google

also nach 1)

$$3)\quad \begin{cases} x'=x+\varrho\cos\varphi, & y'=y+\varrho\sin\varphi; \\ x_1'=x+\varrho_1\cos(\varphi+\alpha), & y_1'=y+\varrho_1\sin(\varphi+\alpha); \\ x_2'=x+\varrho_2\cos(\varphi+\beta), & y_2'=y+\varrho_2\sin(\varphi+\beta); \end{cases}$$

und folglich durch Elimination von ϱ, ϱ_1, ϱ_2:

$$4)\quad \begin{cases} x\sin\varphi-y\cos\varphi = x'\sin\varphi-y'\cos\varphi; \\ x\sin(\varphi+\alpha)-y\cos(\varphi+\alpha) = x'\sin(\varphi+\alpha)-y'\cos(\varphi+\alpha); \\ x\sin(\varphi+\beta)-y\cos(\varphi+\beta) = x'\sin(\varphi+\beta)-y'\cos(\varphi+\beta). \end{cases}$$

Die von den Linien M_1M', M_1M_1', M_1M_2', welche durch ϱ', ϱ_1', ϱ_2' bezeichnet werden sollen, mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M_1 gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Art wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ genommenen Winkel wollen wir durch φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ bezeichnen, wo α_1 und β_1 sich immer leicht aus den gemessenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkeln $M'M_1M_1'$, $M'M_1M_2'$ werden finden lassen und daher jederzeit als bekannt zu betrachten sind. Dies vorausgesetzt, erhält man ganz auf ähnliche Art wie vorher die Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} x'=x_1+\varrho'\cos\varphi_1, & y'=y_1+\varrho'\sin\varphi_1; \\ x_1'=x_1+\varrho_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), & y_1'=y_1+\varrho_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_2'=x_1+\varrho_2'\cos(\varphi_1+\beta_1), & y_2'=y_1+\varrho_2'\sin(\varphi_1+\beta_1); \end{cases}$$

aus denen sich ferner durch Elimination von ϱ', ϱ_1', ϱ_2' die Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1 = x'\sin\varphi_1-y'\cos\varphi_1; \\ x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1) = x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1)-y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1); \\ x_1\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_1\cos(\varphi_1+\beta_1) = x_2\sin(\varphi_1+\beta_1)-y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1) \end{cases}$$

ergeben.

Bezeichnet man nun die Seiten $M'M_1'$, $M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ respective durch r, r_1 und die von diesen beiden Seiten mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt M' gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems eingeschlossenen, ganz wie vorher die Winkel φ, $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$ und φ_1, $\varphi_1+\alpha_1$, $\varphi_1+\beta_1$ genommenen Winkel durch ψ, $\psi+\gamma$, wo γ offenbar immer aus dem gemessenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel $M_1'M'M_2'$ des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ leicht gefunden werden kann; so hat man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} x_1'=x'+r\cos\psi, \\ y_1'=y'+r\sin\psi \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$8)\quad \begin{cases} x_2' = x' + r_1\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + r_1\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$r : r_1 = \sin M'M_2'M_1' : \sin M'M_1'M_2'$$

ist, und die Winkel des Dreiecks $M'M_1'M_2'$ gemessen worden sind, so ist das Verhältniss

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin M'M_1'M_2'}{\sin M'M_2'M_1'}$$

bekannt, und wir können folglich

$$9)\quad r_1 = \mu r,$$

wo μ eine bekannte Grösse bezeichnet, setzen, wodurch die Gleichungen (8) in die folgenden übergehen:

$$10)\quad \begin{cases} x_2' = x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\ y_2' = y' + \mu r\sin(\psi+\gamma). \end{cases}$$

Nach 4), 6), 7), 10) haben wir also die zehn folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x\sin\varphi - y\cos\varphi &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi, \\
x\sin(\varphi+\alpha) - y\cos(\varphi+\alpha) &= x_1'\sin(\varphi+\alpha) - y_1'\cos(\varphi+\alpha), \\
x\sin(\varphi+\beta) - y\cos(\varphi+\beta) &= x_2'\sin(\varphi+\beta) - y_2'\cos(\varphi+\beta); \\
x_1\sin\varphi_1 - y_1\cos\varphi_1 &= x'\sin\varphi_1 - y'\cos\varphi_1, \\
x_1\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1\cos(\varphi_1+\alpha_1) &= x_1'\sin(\varphi_1+\alpha_1) - y_1'\cos(\varphi_1+\alpha_1), \\
x_1\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_1\cos(\varphi_1+\beta_1) &= x_2'\sin(\varphi_1+\beta_1) - y_2'\cos(\varphi_1+\beta_1):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' &= x' + r\cos\psi, \\
y_1' &= y' + r\sin\psi; \\
x_2' &= x' + \mu r\cos(\psi+\gamma), \\
y_2' &= y' + \mu r\sin(\psi+\gamma)
\end{aligned}$$

zwischen den zehn unbekannten Grössen x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; r, φ, φ_1, ψ; aus denen diese zehn unbekannten Grössen bestimmt werden müssen.

Eliminirt man aus diesen zehn Gleichungen die vier unbekannten Grössen x_1', y_1'; x_2', y_2'; so erhält man:

$$11)\quad \begin{cases}
(x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\
(x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha) + r\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\
(x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta) + \mu r\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma); \\
(x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1) + r\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\
(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1) + \mu r\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma);
\end{cases}$$

welche sechs Gleichungen bloss noch die sechs unbekannten Grössen x', y', r, φ, φ_1, ψ enthalten.

Aus der ersten und zweiten Gleichung des ersten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen, folgt leicht:

$$12)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha = r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha), \\ (y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha); \end{cases}$$

und eben so folgt aus der ersten und dritten Gleichung desselben Systems:

$$13)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\beta = \mu r\cos\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma), \\ (y-y')\sin\beta = \mu r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma). \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus dem zweiten der beiden Systeme, aus denen die Gleichungen 11) bestehen:

$$14)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\alpha_1 = r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1), \\ (y_1-y')\sin\alpha_1 = r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1); \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} (x_1-x')\sin\beta_1 = \mu r\cos\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma), \\ (y_1-y')\sin\beta_1 = \mu r\sin\varphi_1\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\mu\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)}, \\ \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\mu\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\varphi-\psi+\alpha)}{\sin(\varphi-\psi+\beta-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ \dfrac{\sin(\varphi_1-\psi+\alpha_1)}{\sin(\varphi_1-\psi+\beta_1-\gamma)} = \mu\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$18)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω, ω' und ω_1, ω_1' mittelst der Formeln:

$$19)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{\mu\sin(\beta-\gamma)}{\cot\alpha\sin\beta}, \ \operatorname{tang}\omega' = -\dfrac{\mu\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta}; \\ \operatorname{tang}\omega_1 = \dfrac{\mu\sin(\beta_1-\gamma)}{\cot\alpha_1\sin\beta_1}, \ \operatorname{tang}\omega_1' = -\dfrac{\mu\cos(\beta_1-\gamma)}{\sin\beta_1}; \end{cases}$$

Digitized by Google

so ist

$$20)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \operatorname{tang}(\varphi_1-\psi) = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$21)\quad \varphi-\psi=\Theta,\ \varphi_1-\psi=\Theta_1;$$

also

$$22)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = -\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\cos\alpha\sin\beta-\mu\sin\alpha\cos(\beta-\gamma}, \\ \operatorname{tang}\Theta_1 = -\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\sin(\beta_1-\gamma)}{\cos\alpha_1\sin\beta_1-\mu\sin\alpha_1\cos(\beta_1-\gamma)}; \end{cases}$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = -\dfrac{\sin(\alpha-\omega)\cos\omega'}{\cos(\alpha-\omega')\cos\omega}, \\ \operatorname{tang}\Theta_1 = -\dfrac{\sin(\alpha_1-\omega_1)\cos\omega_1'}{\cos(\alpha_1-\omega_1')\cos\omega_1}; \end{cases}$$

so erhalten die Gleichungen 11) folgende Form:

$$24)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\varphi = (y-y')\cos\varphi, \\ (x-x')\sin(\varphi+\alpha) = (y-y')\cos(\varphi+\alpha)+r\sin(\alpha+\Theta), \\ (x-x')\sin(\varphi+\beta) = (y-y')\cos(\varphi+\beta)+\mu r\sin(\beta-\gamma+\Theta); \\ (x_1-x')\sin\varphi_1 = (y_1-y')\cos\varphi_1, \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)+r\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ (x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1) = (y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)+\mu r\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$25)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\alpha)-(y-y')\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\alpha_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\alpha_1)}{\sin(\alpha_1+\Theta_1)} \end{cases}$$

und

$$26)\quad \begin{cases} r = \dfrac{(x-x')\sin(\varphi+\beta)-(y-y')\cos(\varphi+\beta)}{\mu\sin(\beta-\gamma+\Theta)}, \\ r = \dfrac{(x_1-x')\sin(\varphi_1+\beta_1)-(y_1-y')\cos(\varphi_1+\beta_1)}{\mu\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)}. \end{cases}$$

Setzt man sowohl die beiden Werthe von r in 25), als auch die beiden Werthe von r in 26) einander gleich und verbindet mit

den hieraus sich ergebenden Gleichungen die erste und vierte der Gleichungen 24); so erhält man die vier folgenden, die unbekannten Grössen x', y', φ, φ_1 enthaltenden Gleichungen:

$$27)\begin{cases}(x-x')\sin\varphi=(y-y')\cos\varphi,\\(x_1-x')\sin\varphi_1=(y_1-y')\cos\varphi_1,\\(x-x')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin(\varphi+\alpha)-(x_1-x')\sin(\alpha+\Theta)\sin(\varphi_1+\alpha_1)\\=(y-y')\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos(\varphi+\alpha)-(y_1-y')\sin(\alpha+\Theta)\cos(\varphi_1+\alpha_1),\\(x-x')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin(\varphi+\beta)-(x_1-x')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin(\varphi_1+\beta_1)\\=(y-y')\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos(\varphi+\beta)-(y_1-y')\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos(\varphi_1+\beta_1).\end{cases}$$

Bestimmt man aus der ersten und zweiten Gleichung x' und y', so erhält man, weil nach 21)

$$28)\quad \varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1$$

ist:

$$29)\begin{cases}x'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\cos\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\cos\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\sin\varphi_1-(x_1\sin\varphi_1-y_1\cos\varphi_1)\sin\varphi}{\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Bekanntlich ist aber

$$\begin{aligned}2\sin\varphi\cos\varphi_1&=\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\sin\varphi_1&=-\sin(\varphi-\varphi_1)+\sin(\varphi+\varphi_1)\\&=-\sin(\Theta-\Theta_1)+\sin(\varphi+\varphi_1),\\2\sin\varphi\sin\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)-\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)-\cos(\varphi+\varphi_1),\\2\cos\varphi\cos\varphi_1&=\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_1)\\&=\cos(\Theta-\Theta_1)+\cos(\varphi+\varphi_1);\end{aligned}$$

folglich nach 29):

$$30)\begin{cases}x'=\dfrac{(x+x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)},\\y'=\dfrac{(x-x_1)\cos(\Theta-\Theta_1)+(y+y_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(x-x_1)\cos(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\sin(\varphi+\varphi_1)}{2\sin(\Theta-\Theta_1)}.\end{cases}$$

Aus der ersten, zweiten und dritten der Gleichungen 27) erhält man, wenn man zuerst $y-y'$ und y_1-y', dann $x-x'$ und x_1-x' eliminirt, ohne Schwierigkeit die beiden Gleichungen:

Digitized by Google

$$31)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1 \\ =(x_1-x')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi\,, \\ (y-y')\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1 \\ =(y_1-y')\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi\,; \end{cases}$$

und eben so leicht erhält man aus der ersten, zweiten und vierten der Gleichungen 27) die beiden Gleichungen:

$$32)\quad \begin{cases} (x-x')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1 \\ =(x_1-x')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi\,, \\ (y-y')\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1 \\ =(y_1-y')\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi. \end{cases}$$

Aus 31) folgt.

$$33)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{x\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\cos\varphi}, \\ y'=\dfrac{y\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\sin\varphi}; \end{cases}$$

und aus 32) erhält man:

$$34)\quad \begin{cases} x'=\dfrac{x\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-x_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\cos\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\cos\varphi}, \\ y'=\dfrac{y\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-y_1\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\beta_1-\gamma+\Theta_1)\sin\varphi_1-\sin\beta_1\sin(\beta-\gamma+\Theta)\sin\varphi}. \end{cases}$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von x' aus 30) und 33) einander gleich, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn der Kürze wegen

$$35)\quad \begin{cases} A=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\}, \\ B=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos(\Theta-\Theta_1)\}. \\ C=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1), \\ D=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta) \end{cases}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$36)\quad \frac{A\cos\varphi_1+B\cos\varphi}{C\cos\varphi_1-D\cos\varphi}=(x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1).$$

Weil aber

$$\varphi-\varphi_1=\Theta-\Theta_1,$$

und folglich offenbar

$$37)\quad \begin{cases} \varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1), \\ \varphi_1=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) \end{cases}$$

ist, so ist nach 36)

$$38)\quad (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}$$

oder

$$39)\quad (x-x_1)\sin(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}.$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin(\varphi+\varphi_1)=\frac{2\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2},$$
$$\cos(\varphi+\varphi_1)=\frac{1-\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$

ist, so wird die vorstehende Gleichung:

$$40)\quad \frac{2(x-x_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)-(y-y_1)\{1-\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\}}{1+\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2}$$
$$=\frac{(A+B)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(A-B)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{(C-D)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)},$$

und enthält unter dieser Form bloss noch die eine unbekannte Grösse $\tang\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$.

Ordnet man diese Gleichung gehörig, so erhält sie folgende Gestalt:

$$41)\quad 0=\{A+B+(C-D)(y-y_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+\{(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$$
$$+\{(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$-(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2$$
$$+\{A-B-(C+D)(y-y_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\tang\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^3.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$A+B+(C-D)(y-y_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1).$$

und auf ähnliche Weise:

Digitized by Google

$$A-B-(C+D)(y-y)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\}$$
$$=2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1).$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$(A-B)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\+(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\cos^2\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1+\cos(\Theta-\Theta_1))\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$+2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$

und auf ähnliche Art

$$(A+B)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin^2\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\-(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\left\{\begin{matrix}(x-x_1)(\sin(\Theta-\Theta_1)\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2\sin\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1))\\+(y-y_1)(1-\cos(\Theta-\Theta_1))\cos\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\end{matrix}\right\}$$
$$=-2\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2$$
$$-2\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2.$$

Setzen wir der Kürze wegen

42) $$K=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$
$$+\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$

und

43) $$L=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\Theta_1)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\}$$
$$-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\Theta)\{(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\};$$

so ist

$$A+B+(C-D)(y-y_1)=2K\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1,$$
$$A-B-(C+D)(y-y_1)=2L\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$
$$(A-B)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C-D)(x-x_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C+D)(y-y_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-2L\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2,$$
$$(A+B)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-2(C+D)(x-x_1)\sin^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C-D)(y-y_1)\cos^2\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-2K\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2.$$

Digitized by Google

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 41) ein, so wird dieselbe:

$$44)\quad 0 = K\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2 - L\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) - K\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2 + L\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^3,$$

oder

$$45)\quad 0 = K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\},$$

oder

$$46)\quad 0 = \{1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)^2\}\{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\},$$

oder

$$47)\quad 0 = \{1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\} \times \{1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\} \times \{K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\}.$$

Diese Gleichung des dritten Grades zerfällt also in die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0,$$
$$1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0,$$
$$K - L\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = 0;$$

aus denen sich die drei folgenden Werthe von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ ergeben:

$$48)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \begin{cases} \cot\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) \\ -\cot\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) \\ \frac{K}{L} \end{cases}$$

Wir wollen nun die, absolut genommen, kleinsten Werthe, welche Θ und Θ_1 in Folge der Gleichungen 22) oder 23) haben können, respective durch δ und δ_1 bezeichnen. Dann ist, wenn n und n_1 zwei beliebige positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, nach den genannten Gleichungen allgemein

$$49)\quad \Theta = \delta + n\pi,\ \Theta_1 = \delta_1 + n_1\pi$$

und folglich

$$50)\quad \Theta - \Theta_1 = \delta - \delta_1 + (n - n_1)\pi.$$

Also ist nach 35), wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

Digitized by Google

51) $$\begin{cases} A'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)+(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ B'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta)\{(x-x_1)\sin(\delta-\delta_1)-(y-y_1)\cos(\delta-\delta_1)\}, \\ C'=\sin\alpha\sin(\alpha_1+\delta_1), \\ D'=\sin\alpha_1\sin(\alpha+\delta) \end{cases}$$

gesetzt wird:

52) $A=A'(-1)^n$, $B=B'(-1)^{n_1}$, $C=C'(-1)^{n_1}$, $D=D'(-1)^n$.

Setzen wir nun zuerst

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\cot\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$

oder

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\{\pi-(\theta-\theta_1)\},$$

so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=(k+\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1)$$

ist, so ist

53) $$\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi,\quad \varphi_1=(k+\tfrac{1}{2})\pi-(\theta-\theta_1),$$

also nach 50)

54) $$\varphi=(k+\tfrac{1}{2})\pi,\quad \varphi_1=(k-n+n_1+\tfrac{1}{2})\pi-(\delta-\delta_1),$$

und folglich

55) $$\begin{cases} \sin\varphi=(-1)^k,\ \cos\varphi=0; \\ \sin\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\cos(\delta-\delta_1),\cos\varphi_1=(-1)^{k-n+n_1}.\sin(\delta-\delta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die folgenden Gleichungen:

$$C(x-x')\cos\varphi_1=D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1=D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

56) $$\begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1=(-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 55) ein, so erhält man:

Digitized by Google

$$(-1)^{k-n+n_1} \cdot C'(x-x')\sin(\delta-\delta_1)=0,$$
$$(-1)^{k-n+n_1} \cdot C'(y-y')\cos(\delta-\delta_1)=(-1)^{k+n-n_1} \cdot D'(y_1-y');$$

d. i.

$$57)\quad \begin{cases} C'(x-x')\sin(\delta-\delta_1)=0, \\ C'(y-y')\cos(\delta-\delta_1)=D'(y_1-y'); \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen x' und y' bestimmt werden müssen, was keine Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r würden sich aus dem Obigen verschiedene Ausdrücke ableiten lassen. Nach der zweiten der Gleichungen 12) ist aber z. B.

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha);$$

und weil nun nach 21), 49) und 54)

$$58)\quad \psi=(k-n+\tfrac{1}{2})\pi-\delta,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$59)\quad (y-y')\sin\alpha=(-1)^{k+n} \cdot r\sin(\alpha+\delta),$$

mittelst welcher Gleichung r bestimmt werden muss. Da r stets eine positive Grösse ist, so lässt sich mittelst dieser Gleichung auch beurtheilen, ob $k+n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Hat man r, so ergiebt sich r_1 mittelst der aus 9) bekannten Formel:

$$60)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man endlich nach 7), 8), 58) die folgenden Gleichungen:

$$61)\quad \begin{cases} x_1'=x'+(-1)^{k-n} \cdot r\sin\delta, \\ y_1'=y'+(-1)^{k-n} \cdot r\cos\delta; \end{cases}$$

und

$$62)\quad \begin{cases} x_2'=x'+(-1)^{k-n} \cdot r_1\sin(\delta-\gamma), \\ y_2'=y'+(-1)^{k-n} \cdot r_1\cos(\delta-\gamma). \end{cases}$$

Weil aber

$$\frac{(-1)^{k-n}}{(-1)^{k+n}}=(-1)^{-2n}=1$$

ist, so ist

$$(-1)^{k-n}=(-1)^{k+n};$$

Digitized by Google

und folglich

$$63)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{k+n} . r \sin\delta, \\ y_1' = y' + (-1)^{k+n} . r \cos\delta; \end{cases}$$

und

$$64)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{k+n} . r_1 \sin(\delta - \gamma), \\ y_2' = y' + (-1)^{k+n} . r_1 \cos(\delta - \gamma); \end{cases}$$

welche Formeln keine Zweideutigkeit zulassen, weil man nach dem Obigen weiss, ob $k+n$ gerade oder ungerade ist.

Setzen wir ferner

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = -\cot\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{(\Theta-\Theta_1)-\pi\},$$

so ist, wenn wieder k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = (k-\tfrac{1}{2})\pi + \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1);$$

und weil nun nach 28)

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$

ist, so ist

$$65)\quad \varphi = (k-\tfrac{1}{2})\pi + (\Theta-\Theta_1),\ \varphi_1 = (k-\tfrac{1}{2})\pi;$$

also nach 50)

$$66)\quad \varphi = (k+n-n_1-\tfrac{1}{2})\pi + (\delta-\delta_1),\ \varphi_1 = (k-\tfrac{1}{2})\pi;$$

und folglich

$$67)\quad \begin{cases} \sin\varphi = -(-1)^{k+n-n_1} . \cos(\delta-\delta_1),\ \cos\varphi = (-1)^{k+n-n_1} . \sin(\delta-\delta_1); \\ \sin\varphi_1 = -(-1)^k,\ \cos\varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von x' und y' hat man nun nach 31) und 35) die Gleichungen

$$C(x-x')\cos\varphi_1 = D(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C(y-y')\sin\varphi_1 = D(y_1-y')\sin\varphi;$$

also nach 52)

$$68)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1} . D'(x_1-x')\cos\varphi, \\ C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1} . D'(y_1-y')\sin\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 67) ein, so erhält man

$$0=(-1)^k . D'(x_1-x')\sin(\delta-\delta_1),$$
$$-(-1)^k . C'(y-y')=-(-1)^k . D'(y_1-y')\cos(\delta-\delta_1);$$

d. i.

$$69)\quad \begin{cases} D'(x_1-x')\sin(\delta-\delta_1)=0, \\ D'(y_1-y')\cos(\delta-\delta_1)=C'(y-y'); \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen x' und y' bestimmt werden müssen, was keine Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r kann man wieder die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha=r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha)$$

benutzen. Weil aber nach 21), 49) und 66)

$$70)\quad \psi=(k-n_1-\tfrac{1}{2})\pi-\delta_1,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha=\alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$71)\quad (y-y')\sin\alpha=-(-1)^{k-n_1} . r\cos(\delta-\delta_1)\sin(\alpha+\delta),$$

mittelst welcher Gleichung r bestimmt werden muss. Weil r stets positiv ist, so weiss man auch, ob $k-n_1$ gerade oder ungerade ist.

Hat man r, so ergiebt sich r_1 mittelst der aus 9) bekannten Formel:

$$72)\quad r_1=\mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man endlich nach 7), 8), 70) die Gleichungen:

$$73)\quad \begin{cases} x_1'=x'+(-1)^{k-n_1} . r\sin\delta_1, \\ y_1'=y'-(-1)^{k-n_1} . r\cos\delta_1; \end{cases}$$

und

$$74)\quad \begin{cases} x_2'=x'+(-1)^{k-n_1} . r_1\sin(\delta_1-\gamma), \\ y_2'=y'-(-1)^{k-n_1} . r_1\cos(\delta_1-\gamma); \end{cases}$$

wo keine Zweideutigkeit bleibt, da man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $k-n_1$ gerade oder ungerade ist.

Setzen wir endlich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{K}{L},$$

so ist nach 35), 42), 43), wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}{(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}$$

und nach 50) ist

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi.$$

Ist nun $n-n_1$ eine gerade Zahl, so ist

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\ =\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\ +\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\ =\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}\\ -\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1)}.\end{aligned}$$

Weil aber in diesem Falle

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n_1}}=(-1)^{n-n_1}=1,$$

also

$$(-1)^n=(-1)^{n_1}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\ =(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\ +(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\ =(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)}\\ -(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1)};\end{aligned}$$

also

$$75)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}.$$

Wenn $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, so kann man

$$\Theta-\Theta_1=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1-\pi)+\tfrac{1}{2}(n-n_1+1)\pi$$

setzen, und es ist dann

$$\begin{aligned}(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\\ =-\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\\ +\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}\end{aligned}$$

und

Digitized by Google

$$(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=\{C'(-1)^{n_1}-D'(-1)^n\}(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}$$
$$+\{C'(-1)^{n_1}+D'(-1)^n\}(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n-n_1+1)}$$

Weil aber in diesem Falle

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^{n_1}}=(-1)^{n-n_1}=-1,$$

also

$$(-1)^n=-(-1)^{n_1}$$

ist, so ist

$$(C+D)(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)+(C-D)(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=-(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$
$$+(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$

und

$$(C-D)(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)-(C+D)(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)$$
$$=(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)}$$
$$+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1).(-1)^{\frac{1}{2}(n+n_1+1)};$$

also

$$76)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=-\frac{(C'-D')(x-x_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'+D')(x-x_1)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)}.$$

Bezeichnet man den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 75) für $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ liefert, durch i; so ist, wenn λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$77)\quad \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=i+\lambda\pi;$$

und weil nun bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)=\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi$$

ist, so ist

$$78)\quad \begin{cases} \varphi=i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)\}\pi, \\ \varphi_1=i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+\{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)\}\pi; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n-n_1$ eine gerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n-n_1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

$$79)\quad \begin{cases} \sin\varphi=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi=(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \\ \sin\varphi_1=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)}.\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi_1=(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n-n_1)}.\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Bekanntlich hat man aber nach dem Obigen zur Bestimmung von x' und y' die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle:

$$(-1)^{n-n_1} = 1$$

ist:

$$C'(x-x_1)\cos\varphi_1 = D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir nun in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 79) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$80)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

aus denen x' und y' bestimmt werden müssen, was nicht die geringste Schwierigkeit hat.

Zur Bestimmung von r benutzen wir wieder die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 78)

$$81)\quad \psi = i-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)+\{\lambda-\tfrac{1}{2}(n+n_1)\}\pi,$$

also

$$\varphi-\psi+\alpha = \alpha+\delta+n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha = (-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)+n} = (-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^n$$
$$= (-1)^{\lambda+\frac{1}{2}(n-n_1)}.(-1)^{-n} = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)},$$

und folglich

$$82)\quad (y-y')\sin\alpha = (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}.$$

Da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung, aus welcher r bestimmt werden muss, zugleich, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

$$83)\quad r_1 = \mu r;$$

Digitized by Google

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' erhält man die folgenden Gleichungen:

$$84)\quad \begin{cases} x_1' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_1' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

und

$$85)\quad \begin{cases} x_2' = x' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_2' = y' + (-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} . r_1\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo eine Zweideutigkeit nicht vorhanden ist, weil man nach dem Vorhergehenden weiss, ob $\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)$ gerade oder ungerade ist.

Bezeichnen wir den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen die Formel 76) für $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)$ liefert, durch i_1; so ist nach 75) und 76)

$$\cot i_1 = -\operatorname{tang} i.$$

Jenachdem nun i positiv oder negativ ist, ist der absolute Werth von $i-\frac{1}{2}\pi$ oder $i+\frac{1}{2}\pi$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$; und weil nun

$$\cot(i \mp \tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{tang} i$$

ist, so ist offenbar

$$86)\quad i_1 = i \mp \tfrac{1}{2}\pi,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Ueberhaupt ist nun wieder, wenn λ_1 eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$87)\quad \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = i_1 + \lambda_1\pi,$$

und weil bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1) + \tfrac{1}{2}(n-n_1)\pi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \tfrac{1}{2}(n-n_1-1)\pi$$

ist, so ist

$$88)\quad \begin{cases} \varphi = i_1 + \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 + \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi, \\ \varphi_1 = i_1 - \frac{1}{2}(\delta-\delta_1+\pi) + \{\lambda_1 - \frac{1}{2}(n-n_1-1)\}\pi; \end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in diesem Falle, wo $n-n_1$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{1}{2}(n-n_1-1)$ eine ganze Zahl ist.

Also ist

Digitized by Google

$$89)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \quad (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi = -(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i_1+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \\ \sin\varphi_1 = -(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi_1 = \quad (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i_1-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

oder nach 86):

$$90)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \\ \sin\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ \cos\varphi_1 = \mp(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Zur Bestimmung von x' und y' haben wir bekanntlich die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = (-1)^{n-n_1}.D'(y_1-y')\sin\varphi;$$

oder, weil in diesem Falle

$$(-1)^{n-n_1} = -1$$

ist, die Gleichungen:

$$C'(x-x')\cos\varphi_1 = -D'(x_1-x')\cos\varphi,$$
$$C'(y-y')\sin\varphi_1 = -D'(y_1-y')\sin\varphi.$$

Führen wir in diese Gleichungen die Werthe von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ aus 90) ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$91)\quad \begin{cases} C'(x-x')\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(x_1-x')\cos\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}, \\ C'(y-y')\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\} = D'(y_1-y')\sin\{i+\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)\}; \end{cases}$$

welche von den Gleichungen 80) nicht verschieden sind. Die Bestimmung von x' und y' mittelst dieser Gleichungen unterliegt keiner Schwierigkeit.

Zur Bestimmung von r benutzen wir auch jetzt die Gleichung

$$(y-y')\sin\alpha = r\sin\varphi\sin(\varphi-\psi+\alpha).$$

Weil aber nach 21), 49) und 88)

$$92)\quad \psi = i_1 - \tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1-\pi) + \{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}(n+n_1+1)\}\pi,$$

also

Digitized by Google

$$\varphi - \psi + \alpha = \alpha + \delta + n\pi$$

ist, so ist

$$(y-y')\sin\alpha = \pm(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist. Es ist aber

$$(-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)+n} = (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^n$$
$$= (-1)^{\lambda_1+\frac{1}{2}(n-n_1-1)}.(-1)^{-n} = (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

und folglich

93) $$(y-y')\sin\alpha = \pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin(\alpha+\delta)\sin\{i+\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\},$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Mittelst dieser Gleichung ist r zu bestimmen, und da r immer positiv ist, so ergiebt sich aus derselben zugleich, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist.

Wenn man r hat, so findet man r_1 mittelst der Formel

94) $$r_1 = \mu r;$$

und zur Bestimmung von x_1', y_1' und x_2', y_2' hat man die Formeln:

$$x_1' = x' - (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_1' = y' + (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

und

$$x_2' = x' - (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\},$$
$$y_2' = y' + (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i_1+\gamma-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta_1)\};$$

oder nach 86):

95) $$\begin{cases} x_1' = x' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_1' = y' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

und

96) $$\begin{cases} x_2' = x' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\cos\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}, \\ y_2' = y' \pm (-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)}.r\sin\{i+\gamma-\frac{1}{2}(\delta+\delta_1)\}; \end{cases}$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem i positiv oder negativ ist.

Eine Zweideutigkeit kann nicht Statt finden, weil man nach dem Obigen weiss, ob $\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)$ gerade oder ungerade ist

Digitized by Google

Aus den Gleichungen 82) und 93), welche für r offenbar ganz denselben Werth liefern, erhellet, dass

$$(-1)^{\lambda-\frac{1}{2}(n+n_1)} \text{ und } \pm(-1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}(n+n_1+1)},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem i positiv oder negativ ist, stets gleiche Vorzeichen haben. Und da nun auch die Gleichungen 83) und 94) für r_1 ganz denselben Werth liefern, so erhält man offenbar auch für x_1', y_1' und x_2', y_2' aus den Gleichungen 84), 85) und 95), 96) ganz dieselben Werthe.

Daher führen überhaupt die Formeln 75) und 76) ganz zu denselben Werthen von x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2'; und man braucht also in allen Fällen bloss die erste dieser beiden Formeln anzuwenden, d. h. bloss

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

oder, wenn der absolute Werth von i nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, bloss

$$97)\quad \text{tang}\, i=\frac{(C'+D')(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)+(C'-D')(y-y_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{(C'-D')(x-x_1)\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)-(C'+D')(y-y_1)\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

zu setzen.

Diese Gleichung kann man auch auf die Form

$$98)\quad \text{tang}\, i=\frac{\frac{y-y_1}{x-x_1}+\frac{C'+D'}{C'-D'}\text{tang}\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}{1-\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{C'+D'}{C'-D'}\text{tang}\frac{1}{2}(\delta-\delta_1)}$$

bringen; und berechnet man nun die Hülfswinkel Ω und Ω_1 mittelst der Formeln

$$99)\quad \text{tang}\,\Omega=\frac{y-y_1}{x-x_1},\quad \text{tang}\,\Omega_1=\frac{C'+D'}{C'-D'}\text{tang}\frac{1}{2}(\delta-\delta_1);$$

so erhält man nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$100)\quad \text{tang}\, i=\text{tang}(\Omega+\Omega_1).$$

Mittelst dieser Formeln kann i ohne Schwierigkeit gefunden werden. Hat man aber i, so werden mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln auch die gesuchten Coordinaten x', y'; x_1', y_1'; x_2', y_2' leicht gefunden, was nun keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Digitized by Google

XXVI.

Schreiben des Herrn Professor Steichen an der École militaire Belgique zu Brüssel an den Herausgeber.

Je viens maintenant compléter ce que j'ai déjà eu l'honneur de vous communiquer sur un cas particulier de l'attraction des points matériels par un centre fixe, à l'occasion de quelques passages de l'ouvrage de Mr. de Pontécoulant. La discussion roulera principalement sur la proposition 32. Nr. 264. page 103. T. I. de la mécanique d'Euler, intitulée: Mechanica sive motus scientia analytice exposita. Petropoli. 1736; et surtout il s'agira de redresser quelques inexactitudes, qui se trouvent exprimées aux Nr. 269, 270, 271, 272, 273, relatifs à la proposition citée.

Dans ce qui suit je supposerai le texte latin de l'auteur devant les yeux des lecteurs, et au besoin je pourrais le transcrire et le communiquer. Mais comme cela ne nous semble pas nécessaire, je me bornerai à traduire l'énoncé latin du problème qui forme le point de départ d'Euler, et de notre discussion:

Soit C un centre de forces qui attire d'après la loi d'une puissance quelconque des distances; si un corps, d'abord au repos en un point A, vient à être attiré par ce point C, on demande quelle sera sa vitesse en un point quelconque de l'espace $\overline{AC}$?

Pour nous conformer le plus que possible aux notations mêmes du texte, supposons le mobile déjà arrivé de A en P et faisons: $\overline{AP}=x$, $\overline{AC}=a$, $\overline{CP}=y$, partant $a-x=y$.

L'énergie attractive sera censée en raison de la n^{ieme} puissance des distances, et l'on désignera par f la distance à laquelle le corps tendrait vers le centre C avec une force égale au poids p qu'il aurait, s'il était placé à la surface terrestre; v dénotera la vitesse du mobile en P entre A et C, et u sa vitesse variable, quand il est arrivé en Q, au dessous du centre C, si toutefois ce cas est possible. On aura d'après ces notations:

Digitized by Google

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(a-x)^n}{f^n} \text{ ou } vdv=g\,.\,\frac{(a-x)^n}{f}.dx \text{ entre } A,C;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{(x-a)^n}{f^n} \text{ ou } udu=-g\,.\,\frac{(x-a)^n}{f^n}.dx;$$

x désignant dans ces deux dernières équations la distance du mobile à son point de départ, c'est-à-dire la ligne $\overline{AQ}$, tandis que dans le 1^r cas $x=\overline{AP}$.

Si l'on intègre la valeur de vdv et que l'on détermine la constante d'après la condition de $v=0$, pour $x=0$, on obtiendra.

$$v^2=2g.\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n} \text{ on } 2g.\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1).f^n},$$

équation, qui devient identique au résultat d'Euler, si l'on convient avec lui de mesurer la vitesse par la racine-quarrée de la hauteur dûe, ce qui revient à prendre pour unité de vitesses la quantité $2g$ ou le double de l'accélération de la pesanteur terrestre. Mais remarquons en passant que plus tard dans sa mécanique des corps rigides l'auteur a renoncé à cette manière de mesurer les vitesses pour établir des conventions aujourd'hui plus généralement adoptées et plus commodes, quoiqu'un peu plus longues.

En intégrant la valeur de udu établie plus haut, on a

$$u^2=\text{Const.}-2g.\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

équation dans laquelle la constante amenée par l'intégration exprime évidemment la vitesse du mobile, parvenu au centre d'attraction même. Mais cette vitesse doit se déduire aussi de la valeur de v, en y prenant $y=0$, ce qui donnera parconséquent:

$$\text{Constante}=2g.\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

$$\text{et partant: } u^2=2g.\frac{a^{n+1}-(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la plus grande valeur de $x>a$ est $x=2a$, de sorte que le mobile se meut d'un mouvement rectiligne alternatif de A en C de C en B pour $\overline{CB}=\overline{CA}$, et puis de B en A, et qu'il a des vitesses égales de part et d'autre du centre d'attraction C; c'est ce que démontre la comparaison des valeurs de v, u. Mais si le mobile, arrivé une 1re fois en C, se trouvait repoussé de C en Q, c'est-à-dire si la force centripète continuait à agir sur lui dans le même sens, les accroissements élémentaires du, dx seraient de même signe au dessous de C, et l'on aurait dès lors:

$$u^2=2g.\frac{a^{n+1}+(x-a)^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Ainsi la vitesse du mobile irait constamment en croissant de C vers Q, depuis sa valeur en C jusqu'à l'infini; et un tel

Digitized by Google

résultat était évident d'avance. Mais dans ce qui précède nous avons supposé $n+1$ positif; voyons ce qui a lieu pour le cas contraire de $n+1$ négatif. En posant alors $n+1=-m$, m étant un nombre positif, on aura:

$$u^2 = \text{Const.} + 2g.\frac{f^{m+1}}{m(x-a)^m}.$$

Rémarquons d'abord que conformément aux notations la plus faible valeur de x est ici $x=a$; or en prenant $x=a$, il faut qu'on retrouve la vitesse qui anime le mobile en C, et qui devient infinie d'après la valeur de v, établie pour $n+1$ positif ou négatif. On aura donc: $\infty=\infty+$ const. et cette égalité se trouve vraie pour une valeur finie quelconque de la constante qui semble ainsi rester inconnue et indéterminée. Mais si l'on considère que la vraie valeur de la vitesse acquise en C n'est pas seulement $\frac{1}{0}$ ou ∞, mais bien $2g.\frac{f^{m+1}}{m}\times\frac{1}{0}-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$, et que c'est cette valeur totale qu'il faut égaler à ce que devient u^2 pour $x=a$, on obtient réellement, en ne négligeant plus le fini par rapport à l'infini: $\text{Const.}=-\frac{2g.f^{m+1}}{m.a^m}$; et cette valeur donne pour u^2:

$$u^2 = 2g.\frac{f^{m+1}}{m}\left(\frac{1}{(x-a)^m}-\frac{1}{a^m}\right),$$

équation qui exprime le véritable mouvement du point matériel et annonce qu'il y a réellement un mouvement rectiligne alternatif comme pour le cas de $n+1$ positif. Du reste la nécessité du mouvement alternatif se conçoit directement et sans aucun calcul, soit que l'attraction se fusse d'après la raison directe soit qu'elle ait lieu d'après la raison inverse d'une certaine puissance de l'éloignement; en effet dans le 1^r cas le mobile se précipite sur le centre C avec une vitesse finie de C vers Q, et la force alors nulle de ce point C ne saurait lui enlever cette vitesse instantanément. Dans le second cas le mobile se précipite avec une vitesse infinie, et la force du centre quoiqu'infinie alors, ne saurait détruire cette vitesse de C vers Q d'une manière brusque et instantanée et encore moins saurait-il la reproduire en sens contraire de C vers A; cela est aussi évident par la loi de continuité, qu'il est evident qu'une force finie ne saurait imprimer instantanément une vitesse finie à une masse finie. Remarquons encore que dans le cas qui nous occupe les formules générales $dx=vdt$, $vdv=gdx$, etc. ne sont plus applicables au passage du mobile par le centre ni pour ses positions infiniment voisines en deca et au de là de ce point; puisque dans cette étendue de positions la force infiniment grande de C imprime et enlève ensuite au mobile des degrés de vitesse finis à chaque coup.

L'hypothèse sur laquelle nous avons basé l'existence de la vitesse u et de la formule $udu=\ldots$ n'est donc pas même sujette à la moindre difficulté.

Digitized by Google

Il nous reste encore à examiner le cas spécial où la force du centre est simplement en raison inverse de la distance; ce qui donne $n+1=0$. Mais ici encore nous ferons une opération analogue à celle des autres cas déjà examinés, c'est-à-dire que nous ne devons pas nous en tenir aux équations entre quantités finies, obtenues d'une manière générale, mais qu'il faut remonter à l'équation différentielle même qui exprime le mouvement pour un instant. Or on obtient ici immédiatement:

$$udu=-g.f.\left(\frac{dx}{x-a}\right);$$

partant: $u^2=\text{Const.}-2g.f.\log(x-a)=C-2gf\log(x-a)$. Soit u_0 la vitesse avec laquelle le mobile quitte le centre C pour descendre de C vers Q. On aura donc:

$$u^2{}_0=C-2g.f.\log(x-a),$$

pourvu que l'on fasse dans cette dernière équation $x=a$. Mais on trouvera de même:

$$u^2{}_0=2g.f.\log.\left(\frac{a}{y}\right),$$

pourvu que l'on fasse dans celle-ci $y=0$. En substituant cette valeur ou plutot cette forme de $u^2{}_0$ dans l'autre, on a

$$2gf.\log\left(\frac{a}{y}\right)=-2gf.\log(x-a)+\text{Const.},$$

équation qui donne: $\text{Const.}=2g.f.\log.\left(\frac{a(x-a)}{y}\right)$.

D'ailleurs la distance nulle ou infiniment petite $x-a$ est mesurée de C vers Q, et la distance nulle ou infiniment petite y est mesurée de C vers A en sens contraire. Mais comme ce sont des quantités absolûes, attendu que les signes $(+-)$ ont été pris d'abord en considération, le rapport $\left(\frac{x-a}{y}\right)$, si toutefois il est déterminé, sera nécessairement positif. Je dis de plus qu'il est égal à l'unité. En effet si l'attraction cessait à une distance entre A, C, $y=\delta$, pour recommencer quelques instants plus tard après que le mobile, qui alors descendrait evidemment vers le centre et en dessous, serait à une distance au dessous de se point égale à $\delta'=x-a$, la constante de ce nouveau mouvement serait: $2gf.\log\left(\frac{a\delta'}{\delta}\right)$; et comme rien n'empêche de prendre l'arbitraire $\delta'=\delta$, quelque petite que soit cette dernière, on aura pour le cas où l'action du centre C n'est pas suspendue, $\text{Const.}=2gf.\log a$; de là on conclut:

$$u^2=2g.f.\log\left(\frac{a}{x-a}\right),$$

tandisque pour le mouvement entre A, C on trouve aisément:

Digitized by Google

$$v^2 = 2gf.\log\left(\frac{a}{y}\right).$$

Or comme cette valeur de $u=0$, pour $x=2a$, il y aura encore ici un mouvement oscillatoire de part et d'autre du centre d'attraction.

Si le mobile, parvenu en C, continue a être poussé par la force du centre, suivant $\overline{AC}$ prolongé vers $\overline{QB}$, on aura:

$$udu = g.f.\left(\frac{dx}{x-a}\right);\ u^2 = 2gf.\log(x-a) + \text{Const.}$$

En déterminant la constante comme précédemment on trouve qu'elle est infinie, de sorte qu'au dessous du centre la vitesse se compose de deux parties, d'une vitesse infinie et d'une vitesse finie qui augmente de plus en plus, mais dont les accroissements vont sans cesse en diminuant. Or c'est là ce que l'on conçoit encore immédiatement et sans faire intervenir le calcul.

Montucla s'est également trompé au sujet de l'attraction des points matériels. Il prétend d'après Newton (histoire des math. t. II. p. 447. et 448.) que dans le cas d'une attraction en raison inverse du quarré de la distance le mobile ne descende pas au dessous du centre, tandisque pour celui de la raison inverse simple il lui attribue un mouvement alternatif.

Profitons de la présente occasion pour expliquer un prétendu paradoxe, remarqué par D'Alembert et qui se rapporte en entier à la matière précédente. Voici en resumé ce qu'expose l'auteur (opuscules math. t. 4. p. 62): „un point matériel A est attiré par un centre C en raison inverse du quarré de la distance: on aura d'après l'auteur et dans les notations admises:

$$v^2 = 2gf^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right)\ldots(A)$$

Or si on suppose avec lui qu'au dessous de ce centre la force centripète ne change pas de signe, il s'ensuit que comme x est alors plus grand que a, la valeur de v ou u devient imaginaire, ce qui est dit-il assez paradoxe, puisque la vitesse, qui est infinie au centre, doit ensuite augmenter encore, car lorsque le mobile a passé ce point, il reçoit de nouveaux coups dans le même sens qu'auparavant.“

D'abord nous remarquerons que l'équation en vdv qui a été établie ci-dessus donne en général:

$$v^2 = 2gf^2.\frac{1}{a-x} + \text{Const.}$$

Si l'on veut avoir la vitesse v, entre A, C, on peut déterminer la constante par la condition de $v=0$, $x=0$ à la fois; ce qui donne en effet la valeur de v^2 de la formule (A). Mais si l'on veut avoir la vitesse du mobile pour une position Q inférieure à C, la précédente détermination de la constante devient vicieuse; car dans l'équation $u^2 = \text{Const.} - 2gf^2.\frac{1}{x-a}$ il n'est plus permis de la

Digitized by Google

déterminer d'après la condition de $u=0$ ou $v=0$ et $x=0$ à la fois; puisque nous savons qu'au centre C, où $x=a$, cette vitesse est infinie. Nommant donc u_1 cette valeur infinie de u, on doit avoir:

$$u_1^2 = C - 2gf^2 \cdot \frac{1}{x-a=0}.$$

Nommant de même v_1 la vitesse acquise par le mobile arrivé de A en C, on aura encore:

$$v_1^2 = 2gf^2 \frac{1}{a-x=0} - 2g \cdot f^2 \cdot \frac{1}{a}.$$

Mais les quantités u_1, v_1 sont identiquement les mêmes; ce qui donnera:

$$C - 2gf^2 \frac{1}{x-a=0} = 2gf^2 \frac{1}{a-x=0} - 2gf^2 \frac{1}{a}.$$

On voit donc par là que C a une valeur infinie $4gf^2 \cdot \frac{1}{0}$, laquelle est équivalente à $2v_1^2$. Si l'on substitue cette valeur, on trouvera: $u^2 = 2v_1^2 - \frac{2gf^2}{x-a}$. Ainsi au dessous du centre la vitesse du mobile déjà infinie augmente de plus en plus; mais elle n'atteindra jamais la limite infinie $v_1\sqrt{2}$. Le calcul n'est donc pas nécessairement en défaut, comme le déclare D'Alembert, et au contraire il donne tout ce quil doit donner; dèsque l'on n'admet plus gratuitement que la vitesse du mobile puisse être exprimée par une seule et même formule avant et après le centre d'attraction, et que la constante arbitraire doive avoir une valeur qui resulte de $v=0$, $x=0$ à la fois.

XXVII.

In quaestionem a Celeb. A. Göpel in T. VI. pag. 33. propositam complete solvendam.

Auct. Dr. E. G. Björling,
ad Academ. Upsal. Docens Mathes.

1. Cel. Göpel l. c. ambas has formulas *)

$$(1)\ldots. 1-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\text{etc.}$$

$$\text{(usque ad primum terminum evanescentem)} = \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$(2)\ldots. 1.(n+1)_1-2.n_2+3.(n-1)_3+4.(n-2)_4-\text{etc. (usque ad....)}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{(n+1)_1\cos(n-1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right\}$$

probandas sistit. Quae autem cum nonnisi speciales sint casus, profecto abs re haud erit universale hoc edere demonstrandum

Theorema. **)

Denotantibus $\overset{m}{F}_0(=1)$, $\overset{m}{F}_1$, $\overset{m}{F}_2$, etc. numeros m^i ordinis figuratos, nempe

*) Loco citato hae formulae aliter paullulum descriptae sunt at facillimo usque negotio in hanc formam simpliciorem aeque ac generali nostrae (I) majis consentaneam reducuntur.

**) Nos quidem, quaestione ipsâ Cel^i Göpel adducti, nuper admodum Theorema isthuc demonstravimus nec profecto hac uti occasione demonstrationis nostrae in medium heic proferendae supersedissemus, nisi forte res alii cuidam operi nostro in Novis Actis Reg. Societ. Scient.

Digitized by Google

m_0, $(m+1)_1$, $(m+2)_2$, $(m+3)_3$, etc.

atque n numerum integrum quemlibet, habetur dum m par est aut 0:

$$(1)\ldots 1.(n+m)_m - \overset{m}{F}_1 (n+m-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (n+m-2)_{m+2} - \text{etc.}$$

(usque ad primum terminum evanescentem) =

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin (n-\frac{m}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1} (n+m-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos (n-\frac{m}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1} (n+m-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin (n-\frac{m-1}{2}+i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (n+m-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos (n-\frac{m-1}{2}+i-1)\frac{\pi}{3} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m=0, 1, 2, 3$ formulae illae (1) et (2) ac praeterea

$$(3)\ldots 1.(n+2)_2 - 3(n+1)_3 + 6n_4 - 10(n-1)_5 + \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left\{ (n+2)_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} + 2(n+1)_1 \cos (n-1)\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sin (n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}$$

$$(4)\ldots 1.(n+3)_3 - 4(n+2)_4 - 10(n+1)_5 + 20n_6 - \text{etc.} =$$

$$= \tfrac{1}{9} \left\{ (n+3)_3 \cos (n-2)\frac{\pi}{3} + 2(n+2)_2 \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right.$$

$$\left. + \tfrac{10}{3}(n+1)_1 \cos (n-1)\frac{\pi}{3} + \tfrac{10}{3} \cdot \frac{\sin (n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right\}.$$

2. Quod cum Theorema (uti licet probari) etiamsi $n=0$ fuerit, saltem nisi eodem tempore $m=0$, valet; corollarii instar ex eo consequitur haberi, p denotante num. integrum $=$ aut $> m$,

dum m par est aut 0:

Upsal. (T. XII.) dudum perscripto connexa esset quodammodo. Typis igitur tandem in To. sequenti impressam Theorematis, de quo quaeritur demonstrationem in hoc „Archivo“ condendam offeremus.

Digitized by Google

(II)....$p_m - \overset{m}{F}_1 (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 (p-2)_{m+2} - \text{etc.}$ (usque ad primum term. evanesc.) =

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ \qquad + 2 \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i-1} (p-2i+1)_{m-2i+1}}{3^i} \cos (p-1+i)\frac{\pi}{3} \end{array} \right\},$$

dum vero m impar:

$$= (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i} (p-2i)_{m-2i}}{3^i} \cos (p+1+i)\frac{\pi}{3} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{\overset{m}{F}_{2i+1} (p-2i-1)_{m-2i-1}}{3^i} \cdot \frac{\sin (p+i)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\}.$$

Sic habentur ex. gr. posito success. $m = 0, 1, 2, 3$, loco formularum (1) — (4), istae:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - (p-1)_1 + (p-2)_2 - (p-3)_3 + \text{etc.} = \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \\ \\ p_1 - 2(p-1)_2 + 3(p-2)_3 + 4(p-3)_4 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{2}{3} \cdot \lfloor p_1 \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 - 3(p-1)_3 + 6(p-2)_4 - 10(p-3)_5 + \text{etc.} \\ \qquad = -\tfrac{1}{3} \cdot \lfloor p_2 \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} + 2(p-1)_1 \cos \frac{p\pi}{3} + 2 \cdot \dfrac{\sin (p+2)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 - 4(p-1)_4 + 10(p-2)_5 - 20(p-3)_6 + \text{etc.} \\ = \tfrac{3}{9} \cdot \lfloor p_3 \cdot \cos (p+1)\frac{\pi}{3} - 2(p-1)_2 \dfrac{\sin \frac{p\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ \qquad + \tfrac{10}{3} (p-2)_1 \cos (p+2)\frac{\pi}{3} - \tfrac{10}{3} \cdot \dfrac{\sin (p+1)\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{array} \right\}.$$

Digitized by Google

3. Ex hac tandem formulâ (II) habentur, posito $p=m$, notandae hae numerorum figuratorum relationes:

1°) dum m num. est integer par:

$$\text{(III)}\quad \left\{ 1=(-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} \frac{m}{3^i} F_{2i} \cdot \frac{\sin(m+1+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{m}{2}} \frac{m}{3^i} F_{2i-1} \cos(m-1+i)\frac{\pi}{3} \right\} \right.$$

2°) dum m impar est:

$$\left. 1=(-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \left\{ 2\sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{m}{3^i} F_{2i} \cos(m+1+i)\frac{\pi}{3} - \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} \frac{m}{3^i} F_{2i+1} \cdot \frac{\sin(m+i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \right\} \right.$$

Nota.

Meminisse juvabit, numeros m^t ordinis figuratos (m num. int. aut 0)

$$m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ \text{etc.}$$

coëfficientes esse potentiarum ipsius x in evoluta functione

$$(1-x)^{-(m+1)};$$

coëfficientem vero ipsius x^n in evoluta functione

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)}$$

ipsum conficere membrum prius aequationis nostrae (I).

XXVIII.

Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx$ und $\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx$.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Man kann die Werthe der beiden obigen Integrale leicht mittelst des von Laplace vorzüglich angewendeten Kunstgriffes entwickeln, welcher darin besteht, dass man dieselben in irgend eine Relation zu bringen sucht, die sich durch die Bemerkung, dass das zweite aus dem ersten durch eine Differenziation abgeleitet werden kann, in eine Differenzialgleichung verwandelt, durch deren Integration man dann die Werthe der Integrale bekommt. Diese Methode lässt sich hier in folgender sehr einfacher Weise anwenden.

Sei zuvörderst

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx, \tag{1}$$

so folgt durch beiderseitige Differenziation nach t, welches als unabhängig veränderlich angesehen wird,

$$\frac{du}{dt}=-\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx. \tag{2}$$

Um nun noch eine zweite Beziehung zwischen den beiden fraglichen Integralen zu entdecken, wenden wir uns an die identische Gleichung

$$2\cos at\frac{x\sin tx}{x^2-a^2}-2a\sin at\frac{\cos tx}{x^2-a^2}=\frac{\sin t(x-a)}{x-a}+\frac{\sin t(x+a)}{x+a},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht dadurch überzeugt, dass man auf der rechten Seite Alles auf den gleichen Nenner x^2-a^2 bringt und dann die Funktionen $\sin t(x-a)$ und $\sin t(x+a)$ zerlegt.

Digitized by Google

Wir multipliziren diese Gleichung mit dx und integriren sie zwischen den Gränzen $x=0$, $x=\infty$. Es ergiebt sich so

$$2\cos at\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx - 2a\sin at\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} &-2\cos at.\frac{du}{dt}-2a\sin at.u \\ &=\int_0^\infty \frac{\sin t(x-a)}{x-a}dx+\int_0^\infty \frac{\sin t(x+a)}{x+a}dx \end{aligned}\right\} (3)$$

Könnte man nun hier den Werth der rechten Seite für sich ausfindig machen, so wäre das Problem der Entwickelung des Werthes von u auf die Integration einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zurückgeführt. Es hat aber nicht die mindeste Schwierigkeit, den Werth der rechten Seite von Nr. (3) zu finden. Setzt man nämlich in dem ersten dieser Integrale $x-a=y$ und im zweiten $x+a=z$, so ergiebt sich sehr leicht:

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^\infty \frac{\sin tz}{z}dz,$$

oder durch Zerlegung

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz;$$

und da in einem bestimmten Integrale nichts auf die Wahl des Integrationsbuchstabens ankommt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy+2\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz. \qquad (4)$$

Man hat aber weiter

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=\int_{-a}^{0}\frac{\sin ty}{y}dy+\int_{0}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy;$$

und wenn man im ersten Integrale $y=-z$, im zweiten $y=z$ setzt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=-\int_{+a}^{0}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_{0}^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz;$$

oder durch Vertauschung der Integrationsgränzen im ersten Integral, wodurch dasselbe positiv wird,

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sin ty}{y}dy=2\int_{0}^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Digitized by Google

Substituiren wir diess in Nr. (4), so ist jetzt der Werth der rechten Seite in (3) gleich

$$2\left\{\int_0^{+a}\frac{\sin tz}{z}dz+\int_{+a}^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz.$$

Man kennt aber die Formel

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man darin $x=tz$, so erhält man unter der Voraussetzung eines positiven t *)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tz}{z}dz=\frac{\pi}{2},$$

und mithin ist der Werth der rechten Seite von (3) $=\pi$. So wird nun

$$-\cos at.\frac{du}{dt}-a\sin at.u=\frac{\pi}{2}.$$

Um diese Differenzialgleichung zu integriren, setzen wir

$$u=\cos at.v, \tag{5}$$

wo v eine noch unbekannte Funktion von t bedeutet, wodurch sich ergiebt

$$-\cos at(\cos at.\frac{dv}{dt}-a\sin at.v)-a\sin at\cos at.v=\frac{\pi}{2},$$

oder einfacher

$$-\cos^2 at.\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{2},$$

mithin

$$v=-\frac{\pi}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 at}=-\frac{\pi}{2}.\frac{\tan at}{a}+C,$$

indem C die Integrationsconstante bezeichnet. Nach (5) ist nun

$$u=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at,$$

oder nach Nr. (1)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{2a}\sin at+C\cos at; \tag{6}$$

und ebenso ist

*) Für negative t werden nämlich die Integrationsgränzen: 0 und $-\infty$ statt 0 und $+\infty$.

Digitized by Google

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}\cos at - aC\sin at\,,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos at + aC\sin at. \qquad (7)$$

Um noch die Constante C zu bestimmen, setzen wir in (6) $t=0$, woraus sich ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = C.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{4a}\,l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \text{Const.},$$

folglich

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-a^2} = 0.$$

Benutzen wir dieses Resultat für die Gleichungen (6) und (7) und schreiben zugleich b für t, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2-a^2}dx = -\frac{\pi}{2a}\sin ab, \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\cos ab. \qquad (9)$$

Zu bemerken ist noch, dass man in der ersten Gleichung a nicht $=0$ nehmen darf, weil für diesen Fall die Bestimmung der Constante sich ändert. Es wird dann

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \infty,$$

und also nicht mehr $=0$. Ebenso darf man b (das frühere t) nicht negativ nehmen, weil die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin tz}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

für negative t ihre Gültigkeit verliert.

Digitized by Google

XXIX.

Metrische Relationen im Gebiete der perspektivischen Projektion.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Die geometrischen Sätze, zu welchen man durch die Betrachtung der perspektivischen Projektionen verschiedener Gebilde gelangt, beziehen sich fast durchgängig auf die Lage verschiedener Punkte, Linien u. s. w. gegen einander, weniger dagegen auf metrische Relationen. In der That ist die harmonische Proportion das einzige Verhältniss, welches durch Projektion nicht gestört wird (die Projektion einer harmonisch getheilten Geraden ist wieder eine harmonische und ähnlich für den harmonischen Strahlbüschel), während alle übrigen Verhältnisse durch Projektion mehr oder minder geändert werden. Diese Veränderungen sind aber oft ebenso einfacher als merkwürdiger Natur, so dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, diesen an und für sich ganz elementaren Gegenstand näher zu betrachten.

§. 1.

Es mögen UW und uw (Taf. III. Fig. 2.) zwei auf einander senkrechte Ebenen sein, die wir kurz mit (E) und (e) bezeichnen wollen. Ist nun ausserhalb derselben ein fester Punkt O und in (E) ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist offenbar der Punkt p, in welchem der Projektionsstrahl OP die Ebene (e) schneidet, die Projektion des Punktes P für O als Projektionscentrum.

Um die Lage der Projektion p näher zu bestimmen, ziehen wir die Perpendikel OV auf (E), Oo auf (e), Vv und ov, und setzen $OV=ov=u$, $Oo=Vv=t$, durch welche Constanten die Lage des Projektionsmittelpunktes O bestimmt wird, ferner $PM=vT=X$ und $vM=PT=Y$. Legen wir ferner durch die Punkte O, V, P eine Ebene, so schneidet diese (e) in der auf (E) senkrecht stehenden Geraden Np. Setzen wir noch die zu bestimmenden Coordinaten des Punktes P, $Np=x$, $Nv=y$, so ist:

Digitized by Google

$$PM : MN = Vv : vN,$$

d. i.

$$X : Y - y = t : y,$$

woraus man findet

$$y = \frac{tY}{t+X}.$$

Nun ist auch

$$Vv : PM = VN : PN,$$

d. i.

$$t : X = VN : PN;$$

mithin

$$t + X : X = VN + PN : PN$$
$$= VP : PN.$$

Aus $\Delta OVP \sim \Delta pNP$ fliesst aber:

$$VP : PN = OV : pN$$
$$= u : x.$$

Substituirt man diese Proportion in die vorhergehende, so hat man:

$$t + X : X = u : x,$$

folglich

$$x = \frac{uX}{t+X}.$$

Aus den beiden gefundenen Formeln:

$$x = \frac{uX}{t+X} \quad (1)$$

$$y = \frac{tY}{t+X} \quad (2)$$

kann man leicht auch die umgekehrten

$$X = \frac{tx}{u-x}, \quad (3)$$

$$Y = \frac{uy}{u-x} \quad (4)$$

ableiten, und zwar (3) aus (1) und dann (4) aus (2) und (3).

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kommt man von den Gebilden der Ebene (E) auf die der Ebene (e) und durch die folgenden (3), (4) von diesen auf jene. Bemerkenswerth ist noch, dass in dem Ausdrucke für x die Ordinate Y nicht vorkommt. Lassen

Digitized by Google

wir daher bei unveränderten u, t, X bloss Y sich ändern, so wird P als Endpunkt von MP eine Gerade beschreiben, welche der Grundlinie mn in der Entfernung MP parallel läuft. Dabei wird sich nun nach Formel (2) y ändern, aber nach Formel (1) x immer constant bleiben, d. h. der Endpunkt p der Geraden x wird eine Gerade beschreiben, welche der mn in der Entfernung Np parallel geht. Also: die Projektion einer Parallelen zur Grundlinie ist wieder eine solche Parallele.

Um nun auch die Projektionen anderer Geraden, welche der Grundlinie nicht parallel laufen, sondern einen beliebigen Winkel mit ihr machen, aufzufinden, brauchen wir bloss die Projektionen zweier auf ihr liegender Punkte aufzusuchen und die gefundenen durch eine Gerade zu verbinden. Denn man übersieht leicht, dass die Projektion einer Geraden selbst eine Gerade sein muss.

Es schneide nun die Gerade CP (Taf. III. Fig. 3.) die Grundlinie mn unter dem Winkel $PCM=\varphi$, wobei wir C als Anfangs-, P als Endpunkt der Geraden betrachten; so ist C die Projektion seiner selbst, weil dieser Punkt beiden Ebenen (E) und (e) zugleich angehört, und es handelt sich folglich bloss noch um die Projektion p des Endpunktes der Geraden, dessen Coordinaten X und Y wir jetzt durch den Winkel φ auszudrücken haben. Setzen wir demnach $Cv=k$, $CP=z$, so ist:

$$MP=X=z\sin\varphi;\quad Mv=Y=k+z\cos\varphi.$$

Durch diese Substitutionen erhält man aus den Formeln (1) u. (2):

$$x=\frac{uz\sin\varphi}{t+z\sin\varphi}=u-\frac{ut}{t+z\sin\varphi},$$

$$y=\frac{tk+tz\cos\varphi}{t+z\sin\varphi}=t\cot\varphi+\frac{kt-t^2\cot\varphi}{t+z\sin\varphi}.$$

Lassen wir jetzt z in's Unendliche wachsen, d. h. die Linie CP in's Unendliche fortlaufen, und gehen zur Gränze für $z=\infty$ über, so erhalten wir

$$x=u,\quad y=t\cot\varphi, \tag{5}$$

d. h. geometrisch, die Projektion eines unendlich entfernten Punktes liegt auf einer durch o zu mn parallel gelegten Geraden, dem sogenannten Horizont, und die Projektion der unendlichen Geraden CPQ ist die endliche Gerade Cq. Der Punkt q wird gefunden, wenn man aus O eine Parallele zu CQ zieht, welche dem Horizonte im Punkte q begegnet.

Es ist noch zu bemerken, dass in den Formeln (5) das anfangs eingeführte $k=Cv$ nicht mehr vorkommt, dass mithin diese Entfernung auf die Lage des Punktes q gar keinen Einfluss hat. Ziehen wir daher in verschiedenen Entfernungen Cv, $C'v$, $C''r$, etc. die Geraden CQ, $C'Q$, $C''Q''$, etc., so müssen die Projektionen derselben die Geraden Cq, $C'q$, $C''q$, etc. sein, d. h. die Projektionen einer Reihe von Parallellinien, welche die Grundlinie unter einem beliebigen Winkel >0 schneiden, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt im Horizonte liegt.

Digitized by Google

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Nimmt man nämlich in den Formeln (3) und (4) $x=u$, so werden $X=Y=\infty$, so dass der Endpunkt Q der Geraden CPQ im Unendlichen liegt; zugleich ist aber auch

$$\frac{X}{Y}=\frac{tx}{uy}=\frac{tu}{uy}=\frac{t}{y}. \qquad (6)$$

Wenn also $\frac{t}{y}=\frac{Oo}{oq}=\tan Ooq=\tan\varphi$ gesetzt wird, so ist auch $\frac{X}{Y}=\tan\varphi$, mithin W. PCM = W. Oqo. Zieht man demnach beliebige Linien qC, qC', qC'', etc. und $CQ \parallel CQ' \parallel CQ''$ etc., welche die Grundlinie sämmtlich unter dem Winkel $\varphi=\text{Arctan}\frac{t}{y}$ schneiden, so kann man wieder die letzteren als Projektionen der ersteren ansehen.

Unter den Werthen, welche φ haben kann, sind besonders zwei von Wichtigkeit.

Für $\varphi=90^0$ erhält man nämlich nach (5)

$$x=u,\ y=0.$$

Diese x und y sind die Coordinaten des Punktes o, welchen man in der Perspektive den Augenpunkt zu nennen pflegt; also: die Projektionen aller Geraden, welche auf der Grundlinie senkrecht stehen, vereinigen sich im Augenpunkte.

Ferner ist für $\varphi=45^0$

$$x=u,\ y=t.$$

Durch diese Coordinaten wird ein Punkt v bestimmt, welcher auf dem Horizonte in der Entfernung $ov=Oo=t$ liegt. Man nennt ihn den Distanzpunkt. Also: die Projektionen aller Geraden, welche die Grundlinie unter einem halben Rechten schneiden, vereinigen sich im Distanzpunkte.

Hieraus ergiebt sich das gewöhnliche, sehr bekannte Verfahren zur Aufsuchung der perspektivischen Projektion eines gegebenen Punktes. Man denke sich zunächst die Ebene (E) (Taf. III. Fig. 4.) um 90^0 nach unten zu um mn herumgedreht, so dass sie mit der Verlängerung von (e) zusammenfällt, sei ferner o der Augen-, v der Distanzpunkt und in der Ebene (E) der Punkt P gegeben, dessen Projektion p gesucht wird, so verfahre man folgendermassen.

Man fälle von P auf die Grundlinie mn die Senkrechte PM und mache $MP'=MP$. Darauf ziehe man nach dem Augenpunkte die Gerade Mo, nach dem Distanzpunkte die Gerade $P'v$, so ist der Durchschnitt p beider Geraden die gesuchte Projektion des Punktes P. Denn die Gerade Mo ist die Projektion der ins Unendliche verlängert gedachten MP, $P'v$ die der ebenfalls ins Unendliche verlängerten $P'M$; folglich der Durchschnitt von Mo und $P'v$ die Projektion des Durchschnittes von MP und $P'M$, d. h. des Punktes P.

Diese Construktion lässt sich eben so leicht umkehren, wenn man nämlich P sucht, sobald p gegeben ist. Man zieht dann die Geraden op und vp, verlängert sie, bis sie die Grundlinie mn in

Digitized by Google

M und P' schneiden, errichtet dann in M eine Senkrechte auf mn, und nimmt $MP = MP'$, so ist der Punkt P gefunden, dessen Projektion p sein soll. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun verschiedene metrische Relationen untersuchen, welche zwischen den Gebilden der beiden Ebenen (E) und (e) statt finden.

§. 3.

Es sei in der Ebene (e) ein Viereck $abcd$ (Taf. III. Fig. 5.) gegeben, dessen Gegenseitendurchschnitte p und q heissen mögen. Nehmen wir die Linie pq als Horizont und ziehen beliebig die Grundlinie $mn \parallel pq$, so müssen, wo man auch den Augenpunkt o in pq annehmen möge, die Linien ab und cd die Projektionen solcher Geraden sein, welche in (E) einander parallel laufen, weil sich der Durchschnitt p von ab und cd auf dem Horizonte befindet. Das Nämliche wird auch von den Linien ad und bc gelten, so dass also die Figur $ABCD$ in (E), als deren Projektion man sich $abcd$ denken kann, durch parallele Gegenseiten begränzt wird, d. h. ein Parallelogramm ist. Diess gilt für jede Distanz ov; legt man aber dem in (E) befindlichen Parallelogramme besondere Bedingungen auf, so bleibt auch die Distanz nicht mehr willkührlich, wie man sogleich sehen wird.

1) Man verlangt, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck werde.

Es sei der Augenpunkt o willkührlich zwischen p und q genommen, $op = y$, $oq = y'$, die erst noch zu bestimmende Distanz $ov = t$, W. $CA'D = \varphi$ und W. $A'CD = \varphi'$, so ist nach Formel (6) und dem Folgenden

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \tan\varphi'.$$

Da aber $ABCD$ ein Rechteck sein soll, so muss $\varphi' = 90^0 - \varphi$ sein, mithin:

$$\frac{t}{y} = \tan\varphi, \quad \frac{t}{y'} = \cot\varphi,$$

woraus man durch Multiplikation erhält:

$$t^2 = yy', \quad t = \sqrt{yy'}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass zwar o beliebig genommen werden darf, dass aber dann die Distanz ov die mittlere Proportionale zwischen op und oq sein muss. Beschreibt man also über pq als Durchmesser einen Halbkreis, so ist, für o als Augenpunkt, die Ordinate $os = ov$ genommen die nöthige Distanz und v der Distanzpunkt.

2) Soll $ABCD$ ein Rhombus werden, so müssen sich die Diagonalen AC und BD rechtwinklich schneiden. Setzen wir wieder die unbekannte Distanz $ov = t$, $fo = y$, $go = y'$, W. $B'D'E = \psi$ und W. $D'B'E = \psi'$, so ist ähnlich wie früher

Digitized by Google

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\tan\psi';$$

und da $\psi'=90^0-\psi$ sein muss:

$$\frac{t}{y}=\tan\psi,\ \frac{t}{y'}=\cot\psi;$$

woraus

$$t^2=yy',\ t=\sqrt{yy'}$$

folgt. Wenn also o beliebig auf fg genommen wird, so muss die Distanz $os=ov$ die mittlere Proportionale zwischen fo und go sein. Beschreibt man also über fg als Durchmesser einen Halbkreis, so ist für jeden beliebig zwischen f und g genommenen Augenpunkt o die Ordinate os die Distanz, also v der Distanzpunkt, wenn $ov=os$ gemacht wird.

3) Soll endlich $ABCD$ ein Quadrat werden, so müssen beide bisher gefundenen Bedingungen gleichzeitig statt finden. Fällt man also von dem Durchschnitte s beider Halbkreise über pq und fg eine Senkrechte so auf den Horizont, so ist o der Augenpunkt und, wenn $ov=os$ genommen wird, v der Distanzpunkt.

Hat man in jedem Falle Augen- und Distanzpunkt bestimmt, so lassen sich nun leicht nach dem am Ende des vorigen Paragraphen gezeigten Verfahren die den gegebenen Punkten a, b, c, d entsprechenden A, B, C, D auffinden.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt mit den perspektivischen Projektionen des Kreises beschäftigen. Zu grösserer Einfachheit setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des zu projizirenden Kreises in (E) auf der verlängerten Augenhöhe liege (Taf. IV. Fig 1.) und dass der Kreis die Grundlinie mn berühre. Nehmen wir, wie bisher, die Augenhöhe und deren Verlängerung zur Abscissenachse und den Durchschnitt derselben mit der Grundlinie mn zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises in (E)

$$Y^2=2RX-X^2, \tag{7}$$

wobei R den Halbmesser desselben bezeichnet.

Um jetzt die Gleichung der Projektion unseres Kreises zu finden, brauchen wir bloss die Gleichungen (3) und (4) in Anwendung zu bringen, durch welche statt der Coordinaten X, Y in (E) die neuen Coordinaten x, y in (e) eingeführt werden Wir erhalten dann

$$\left(\frac{uy}{t-x}\right)^2=\frac{2Rtx}{t-x}-\left(\frac{tx}{u-x}\right)^2,$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y^2=\frac{1}{u^2}[2Rutx-(2Rt+t^2)x^2],$$

Digitized by Google

oder auch

$$y^2 = \frac{2Rt+t^2}{u^2}\left[\frac{2Ru}{2R+t}x - x^2\right]. \quad (8)$$

Man erkennt hierin sogleich die Gleichung einer Ellipse, nur ersieht man nicht sogleich die Grösse und Lage der Achsen. Diese bestimmt man durch folgende Vergleichung. Rechnet man in einer Ellipse die Coordinaten von einem der Endpunkte der kleinen Achse an, wobei diese die Abscissenachse ist, und bezeichnet die grosse Achse mit a, die kleine mit b, so erhält man

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2). \quad (9)$$

Nimmt man dagegen die grosse Achse als Abscissenachse und einen ihrer Endpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man für die nämlichen Achsen a und b:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2), \quad (10)$$

Beide Formen gehen in eine über, wenn $b = a = r$, also die Ellipse ein Kreis ist. Da nun für beide Formen $a > b$ ist, so können wir, den Quotienten $\frac{a^2}{b^2}$ oder $\frac{b^2}{a^2}$ mit q bezeichnend, so sagen:

1) Ist $q > 1$, so ist die kleine Achse der Ellipse die Abscissenachse und ihr Endpunkt der Anfang der Coordinaten.

2) Ist $q = 1$, so ist die Ellipse ein Kreis.

3) Ist $q < 1$, so ist die grosse Achse der Ellipse die Abscissenachse und ihr Endpunkt der Anfang der Coordinaten.

Diese Criterien können sehr leicht auf die Gleichung (8) angewendet werden, wenn

$$q = \frac{2Rt+t^2}{u^2}$$

genommen wird.

1) Ist nämlich $q > 1$, also

$$u^2 < 2Rt + t^2,$$

so sind die Abscissen auf der kleinen Achse gerechnet. Da nun unsere Abscissen in der Richtung Ao gezählt werden, so folgt, dass die kleine Achse der entstandenen Ellipse in die Gerade Ao fällt, mithin die grosse Achse der Grundlinie mn parallel liegt.

Die Werthe der Achsen selbst sind sehr leicht zu bestimmen; man erhält nämlich durch Vergleichung der beiden Formen (8) und (9)

$$b = \frac{Ru}{2R+t}, \quad a^2 = \frac{R^2t}{2R+t}. \quad (11)$$

Besondere Merkwürdigkeiten bietet dieser Fall nicht dar; dagegen bedürfen die Fälle (2) und (3) einer näheren Ansicht.

Digitized by Google

§. 5.

Soll die Projektion des gegebenen Kreises (§. 4.) wieder ein Kreis werden, so muss die Gleichung (8) auf die Form

$$y^2 = 2rx - x^2 \tag{12}$$

zurückgehen, in welcher r den Halbmesser des neuen Kreises bedeutet, oder, was das Nämliche ist, der Quotient, welcher im vorigen Paragraphen q genannt wurde, muss $=1$ sein. Wir haben also

$$\frac{2Rt + t^2}{u^2} = 1,$$

oder

$$u^2 = 2Rt + t^2, \tag{13}$$

und durch Vergleichung von (8) mit (12)

$$r = \frac{Ru}{2R + t}, \tag{14}$$

wodurch die Grösse des neuen Kreises bestimmt ist. Werfen wir nun noch einen Blick auf die Gleichung (13). Wir hatten gefragt, unter welchen Umständen, d. h. für welches Verhältniss zwischen Augenhöhe und Distanz, die Projektion eines Kreises wieder ein Kreis werden könne. Diese Frage beantwortet uns die Gleichung (13), welche zwar die Augenhöhe und Distanz nicht unmittelbar, aber doch eine Relation zwischen beiden giebt, welche eine derselben willkührlich anzunehmen gestattet. Jene Relation ist aber nichts Anderes, als die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, worin R die Halbachse, u die Ordinaten, t die Abscissen (vom Scheitel aus gezählt) bedeuten. Der geometrische Ort des Projektionscentri O ist also eine gleichseitige Hyperbel, welche den Halbmesser des zu projizirenden Kreises zur Achse hat, oder mit anderen Worten (Taf. III. Fig. 6.):

Wenn das Projektionscentrum auf einer gleichseitigen Hyperbel fortrückt, deren Ebene senkrecht durch A auf der Ebene UW geht und deren Halbachse $= CA$ ist, so bleibt die Projektion des um C mit CA als Halbmesser beschriebenen Kreises in der Ebene uw immer ein Kreis, dessen Halbmesser nach Formel (14) gefunden werden kann.

§. 6.

Wir wenden uns jetzt zu dem dritten der in §. 4. betrachteten Fälle, wenn nämlich das dortige $q < 1$, mithin vermöge des Werthes von q

$$u^2 > 2Rt + t^2$$

ist. Wir erhalten dann durch Vergleichung von (8) und (10)

$$a=\frac{Ru}{2R+t},\quad b^2=\frac{R^2t}{2R+t},\tag{15}$$

und hier liegt die grosse Achse in der Augenhöhe, folglich die kleine der Grundlinie parallel. Dieser Fall ist reich an schönen analytischen Beziehungen. So erhält man z. B. aus dem Obigen:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{Rt}{u};$$

aber $\frac{b^2}{a}$ ist der halbe Parameter der Ellipse; nehmen wir ihn $=\frac{1}{2}p$, so folgt jetzt die interessante Proportion:

$$u:t=R:\tfrac{1}{2}p,\tag{16}$$

aus welcher man leicht eine Construktion der in (e) zu zeichnenden Ellipse ableiten kann.

Nennt man c die lineare Excentricität der Ellipse $c=\sqrt{a^2-b^2}$, so findet man aus (15)

$$c=\frac{R\sqrt{u^2-2Rt-t^2}}{2R+t},$$

$$a+c=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt-t^2}}{2R+t}.\tag{17}$$

An diese Formeln wollen wir noch folgende Betrachtung anschliessen.

Nimmt man in Bezug auf unsere Ellipse in (e) die durch den Augenpunkt gelegte Horizontale als Polare an, so ist der zugehörige Pol nichts Anderes, als die Projektion des in (E) gegebenen Kreismittelpunktes. Alle durch diesen gehenden Linien werden nämlich von demselben und dem Kreise in drei Punkten geschnitten, welche mit dem unendlich entfernten Punkte der Geraden ein System harmonisch liegender Punkte ausmachen. Die Projektion einer harmonischen Geraden ist aber wieder harmonisch getheilt. In (e) aber entsprechen der von dem Kreise in (E) durchschnittenen Geraden eine von der Ellipse geschnittene Gerade, dem unendlich entfernten Punkte ein Punkt auf der Horizontalen, welcher mit jenen zwei Punkten der Ellipse in einer Geraden liegt, folglich muss auch dem letzten der harmonischen Punkte, d. h. dem Kreismittelpunkte, derjenige Punkt in (e) entsprechen, welcher der vierte harmonische zu den drei schon gefundenen ist, d. h. der harmonische Pol, mithin ist dieser die Projektion des Kreismittelpunktes in (E).

Man könnte nun die Frage aufstellen, ob es nicht möglich sei, das Projektionscentrum so zu legen, dass der Pol mit einem der Brennpunkte zusammen fällt. Hierauf ist die Antwort folgende.

Nennen wir x die Entfernung des harmonischen Poles von der Grundlinie mn, so lässt sich dieselbe mit Hülfe der Gleichung (1) finden, wenn man bemerkt, dass für den harmonischen Pol $X=R$ ist. Wir haben also:

Digitized by Google

$$x=\frac{Ru}{R+t}.$$

Soll nun der harmonische Pol mit dem Brennpunkte (es kann diess nur der obere sein) zusammenfallen, so muss $x=a+c$ werden, woraus durch Substitution der Werthe von x und $a+c$ aus (17) folgt:

$$\frac{Ru}{R+t}=\frac{Ru+R\sqrt{u^2-2Rt+t^2}}{2R+t}$$

oder

$$\frac{2R+t}{R+t}u-u=\sqrt{u^2-2Rt+t^2},$$

d. h. weil die linke Seite $=\left(\frac{2R+t}{R+t}-1\right)u=\frac{Ru}{R+t}$ ist:

$$\frac{R^2u^2}{(R+t)^2}=u^2-2Rt-t^2,$$

oder durch Transposition

$$2Rt+t^2=(1-\frac{R^2}{R^2+2Rt+t^2})u^2=\frac{(2Rt+t^2)u^2}{(R+t)^2},$$

woraus folgt

$$\frac{u^2}{(R+t)^2}=1,$$

und mithin

$$u=R+t,\ t=u-R, \qquad (18)$$

gewiss ein überraschend einfaches Resultat!

Will man also einen gegebenen Kreis so projiziren, dass in der entstehenden Ellipse ein Brennpunkt mit dem harmonischen Pol in Bezug auf eine noch zu bestimmende Gerade zusammenfalle, so hat man folgendes Verfahren zu beobachten (Taf. IV. Fig. 1.):

Durch einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises lege man eine Tangente und ziehe von dem Mittelpunkte C die Senkrechte CA. Auf ihrer Verlängerung über A hinaus nehme man eine Strecke $Ao>AC$ beliebig und o als Augenpunkt. Hierauf mache man $Ac=AC$, ziehe durch o eine Senkrechte auf Ao und nehme auf ihr $ov=oc$, so ist v der zugehörige Distanzpunkt. Projizirt man mit Hülfe beider Punkte den Kreis in (E) auf (e), so erhält man eine Ellipse, deren Brennpunkt c zugleich der Pol in Bezug auf ov als Polare ist.

XXX.

Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Die Lehre vom Rauminhalt der Körper ist bekanntlich auf den Satz gegründet, dass zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleichen Rauminhalt haben. Die Beweise dieses Lehrsatzes, welche bisher bekannt sind, sind aber solche, die mehr in das Gebiet der höhern, als in das der Elementarmathematik gehören, sogenannte Exhaustionsbeweise. Einer von diesen Beweisen ist der in den Gerlingschen Ausgaben der reinen Mathematik von Lorenz enthaltene.

Aufmerksam gemacht durch Gauss, dass es wünschenswerth sei, diesen Beweis durch einen mehr elementaren zu ersetzen, dass man bis jetzt nicht einmal einen elementaren Beweis für den Satz besitze, dass dreiseitige Pyramiden, die einander gegenbildlich gleich sind, d. h. sich wie rechts und links verhalten, gleichen Rauminhalt haben, beschäftigte sich Gerling mit diesen Aufgaben. Er fand für die Gleichheit der Grösse zweier gegenbildlich gleichen Pyramiden einen den Anforderungen genügenden Beweis und seine Mittheilung darüber ist die Veranlassung, dass auch ich mich mit dem fraglichen Gegenstand beschäftigte, da der von Gerling gefundene Beweis mir ein zu complicirter zu sein schien. — Ich halte es für angemessen, das bei dieser Gelegenheit von mir Gefundene dem mathematischen Publikum vorzulegen.

Ich setze voraus, dass folgende Sätze bereits bewiesen seien:

1) Parallelepipede, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind gleich gross.

2) Ein gerades dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds, dessen Grundfläche doppelt so gross als die des dreiseitigen Prismas ist und dessen Höhe gleich der des Prismas ist.

3) Jedes schiefe dreiseitige Prisma (Taf. IV. Fig. 2 *A*.) lässt sich umwandeln in ein gerades (Taf. IV. Fig. 2 *B*.) von demselben Querschnitt und ebenso grosser Länge der Seitenkante.

Digitized by Google

Es ist nämlich:

{ Taf. IV. Fig. 2 *A*. Raumstück *a* + Raumstück *b* } = { Taf. IV. Fig. 2 *B*. Raumstück *b*, + Raumstück *a*, }

weil $a \cong a_1$ und $b \cong b_1$, ist.

Vergleiche Gerlings Ausgabe von Lorenz.

4) Zwei dreiseitige Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich gross, sowohl dann, wenn in beiden Prismen eine der parallelogrammatischen (Seiten-)Flächen, als auch dann, wenn in beiden Prismen die dreieckigen Flächen als die Grundflächen betrachtet werden.

Der Beweis dieses Satzes ist in vielen Werken unvollständig, weil darin der dritte Satz fehlt, auf den er sich gründet. In der Gerlingschen Ausgabe von Lorenz ist er vollständig.

An vorstehende Sätze reihen sich folgende, zum Theil früher abzuhandelnde Lehren an.

§. 1. Erklärung. Zwei ähnliche gerade Linien *AB* und *ab*, die einander parallel sind, sind von gleicher Richtung der ähnlichen (gleichnamigen) Enden (was durch $(\overrightarrow{AB}) \# (\overrightarrow{ab})$ bezeichnet werden kann), wenn sie mit der Verbindungslinie *Aa* der Anfangspunkte innere Gegenwinkel *BAa* und *baA* bilden, die auf einerlei Seite von *Aa* liegen und einander zu zwei rechten Winkeln ergänzen, also nur dann gleich sind, wenn sie rechte Winkel sind; sie sind aber von entgegengesetzter Richtung der ähnlichen Enden (was durch $(\overrightarrow{AB}) \# (\overleftarrow{ab})$ bezeichnet werden kann), wenn sie mit *Aa* gleiche innere Wechselwinkel *BAa* und *baA* bilden. Siehe Taf. IV. Fig. 3. und Fig. 4.

§. 2. Erklärung. Ähnliche dreiseitige Pyramiden sind solche, die sich so zusammenstellen lassen, dass jede Kantenlinie der einen parallel ist mit einer ihr entsprechenden Kantenlinie der andern.

Sie heissen ebenbildlich ähnlich (vergleiche *cxyz* und *c.x.y.z.* in Taf. IV. Fig. 5.), wenn dabei je zwei einander entsprechende (ähnliche) Kantenlinien auch gleiche Richtung ihrer ähnlichen Enden haben; sind dagegen die Richtungen ihrer ähnlichen Enden entgegengesetzt, so heissen die beiden Pyramiden gegenbildlich ähnliche (vergleiche *cxyz* und $c_1 x_1 y_1 z_1$ in Taf. IV. Fig. 6).

§. 3. Lehrsatz. Sind zwei dreiseitige Pyramiden einer und derselben dritten ebenbildlich ähnlich oder sind beide einer und derselben dritten gegenbildlich ähnlich, so sind beide einander selbst ebenbildlich ähnlich.

Beweis. Werden die drei verglichenen Pyramiden P_1, P_2, P_3 in solche Zusammenstellung gebracht, dass ihre ähnlichen Kantenlinien einander parallel sind, so ist im ersten Falle jede Kantenlinie von P_3 parallel mit den entsprechenden Kantenlinien von P_1 und

Digitized by Google

von P, und die Richtungen der ähnlichen Enden sind gleich, so dass auch jede Kantenlinie von P parallel ist der ihr entsprechenden Kantenlinie von P und mit ihr gleiche Richtung der ähnlichen Enden hat. Im zweiten Falle aber ist jede Kantenlinie von P parallel und von entgegengesetzter Richtung der Enden mit den ihr entsprechenden Kantenlinien von P und von P_1, weshalb jede Kantenlinie von P parallel ist der ihr entsprechenden Kantenlinie von P_1 und mit ihr gleiche Richtung der ähnlichen Enden hat.

§. 4. Erklärung. Sind zwei dreiseitige Pyramiden b und β (Taf. IV. Fig. 7) einander ebenbildlich ähnlich und es ist eine Kantenlinie $c_1 y_1$ der einen an Länge gleich der ihr entsprechenden Kantenlinie $c_{11} y_{11}$ der andern (mithin jede Kantenlinie der einen an Länge gleich der ihr entsprechenden Kantenlinie der andern), so ist jede ein Ebenbild der andern.

§. 5. Zusatz. Jede dreiseitige Pyramide ist ihrem Ebenbilde an Körperinhalt gleich gross. — Beide lassen sich nemlich in congruente Zusammenstellung versetzen.

§. 6. Erklärung. Sind zwei dreiseitige Pyramiden (Taf. IV. Fig. 8.) einander gegenbildlich ähnlich und es ist eine Kantenlinie cy der einen an Länge gleich der entsprechenden Kantenlinie $c_1 y_1$ der andern (mithin jede Kantenlinie der einen gleich der entsprechenden Kantenlinie der andern), so heisst die eine ein Gegenbild der andern.

§. 7. Lehrsatz. Jede dreiseitige Pyramide a (Taf. IV. Fig. 8. oder a und b Fig. 7.) und ihr Gegenbild b haben gleich grossen Körperinhalt.

Beweis. Man verbinde a und b so, wie a und β (Taf. IV. Fig. 7.) verbunden sind, d. h. so, dass die gleichen Kantenlinien cy und $c_1 y_1$ in einer und derselben ihnen gleichen Linie ou liegen und entgegengesetzte Richtung haben, während $\left(\overrightarrow{c_1 x_{11}}\right) \# \left(\overleftarrow{c\,x}\right)$, $\left(\overrightarrow{c_1 z_{11}}\right) \# \left(\overleftarrow{c\,z}\right)$; $\left(\overrightarrow{y_1 x_{11}}\right) \# \left(\overleftarrow{y\,x}\right)$ und $\left(\overrightarrow{y_1 z_{11}}\right) \# \left(\overleftarrow{y\,z}\right)$ ist, folglich auch (weil parallele Ebenen, die von parallelen Ebenen durchschnitten werden, parallele Durchschnittslinien liefern) $x_1 z_{11} \# xz$, mithin auch (weil die Winkel zxx_{11} und $z_{11}x_{11}x$, die sie mit einer Linie xx_{11} bilden würden, innere Wechselwinkel sind) $\left(\overrightarrow{x_1 z_{11}}\right) \# \left(\overleftarrow{x\,z}\right)$ ist. Stellen nun in Taf. IV. Fig. 9. $cyxz = a$ und $c_1 y_1 x_1 z_1 = \beta$ die so verbundenen Pyramiden dar, so verlängere man die Ebene xyz über xy und die Ebene $c_1 z_1 x_{11}$ über $c_1 z_1$ hinaus und lege durch ux und uz_1 eine Ebene $xuz_1 m$, so wird ein vierseitig pyramidenförmiger Raum $xuz_1 mo = d$ begrenzt, der mit jeder der beiden Pyramiden a und β einzeln zusammengenommen ein dreiseitiges Prisma $d + a$ oder $d + \beta$ bildet.

Es entstehen nämlich Durchschnittslinien om, xm und $z_1 m$, und es ist

Digitized by Google

1) $om \# zx \# z_{,,} x_{,,}$ als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen $x_{,,} u$ und czx mit der Ebene zm und weil $z_{,,} x_{,,} \# zx$ ist.

2) $z_{,,} m \# ux$ d. h. $\# cx$
 $\# ox_{,,}$ d. h. $\# c_{,,} x_{,,}$ } als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen $x_{,,} m$ und $ox_{,,} z_{,,}$ mit der Ebene um und weil $c_{,,} x_{,,} \# cx$ ist.

3) $xm \# uz_{,,}$ d. h. $\# y_{,,} z_{,,}$
 $\# oz$ d. h. $\# yz$ } als Durchschnittslinie der parallelen Ebenen zm und $y_{,,} x_{,,} z_{,,}$ mit der Ebene um und weil $y_{,,} z_{,,} \# yz$ ist.

Da nun $xm \# uz_{,,} \# oz$ und $om \# zx$ und $z_{,,} m \# ux$, so ist $omz_{,,} uxz$ ein dreiseitiges Prisma, das aus $\alpha + d$ besteht; da ferner $z_{,,} m \# ux \# ox$ und $om \# z_{,,} x_{,,}$ und $xm \# uz_{,,}$, so ist $oxmz_{,,} x_{,,} u$ ein dreiseitiges Prisma, das aus $\beta + d$ besteht. Da nun aber die beiden liegenden dreiseitigen Prismen $d + \alpha$ und $d + \beta$ einerlei parallelogrammatische Grundfläche $z_{,,} uxm$ und gleiche Höhe haben, so ist $d + \alpha = d + \beta$, mithin auch $\alpha = \beta$.

§. 8. Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, dass man überhaupt zwei Vereine von Punkten (und ebenso auch zwei Körper) ähnliche zu nennen habe, wenn sie sich so zusammenstellen lassen, dass jede mögliche gerade Verbindungslinie zweier Punkte des einen parallel ist mit der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte des andern und dass die Aehnlichkeit eine ebenbildliche Aehnlichkeit heisse, wenn dabei jede Verbindungslinie zweier Punkte des einen gleiche Richtung der gleichnamigen Enden hat mit der ihr parallelen des andern, während im Falle je zwei einander entsprechende parallele Linien entgegengesetzte Richtung haben, die beiden Vereine von Punkten (und ebenso die beiden Körper) gegenbildlich ähnliche heissen. Daraus folgt dann leicht, dass je zwei ähnliche Vereine von Punkten (und ebenso auch zwei ähnliche Körper), bei denen die Gleichheit einer geraden Verbindungslinie zweier Punkte des einen und der ihr entsprechenden Verbindungslinie des andern, an Länge erkannt ist, als ebenbildlich gleich oder als gegenbildlich gleich erklärt werden müssen, je nachdem sie ebenbildlich ähnlich oder gegenbildlich ähnlich sind. Endlich sieht man ein, wie es nun leicht ist, zu beweisen, dass nicht nur je zwei ebenbildlich gleiche Körper (die sich in Congruenz versetzen lassen), sondern dass auch je zwei gegenbildlich gleiche Körper gleichen Rauminhalt haben.

Vielleicht erlaube ich mir später weitere Mittheilungen über die Art und Weise, wie, den hier ausgesprochenen Definitionen entsprechend, die Lehre von der Aehnlichkeit überhaupt darzustellen sein würde.

Digitized by Google

XXXI.

Ueber die Dehnung und das Zerreissen prismatischer Körper unter der Voraussetzung, dass die spannende Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse des Körpers wirkt.

Von dem

Herrn Fabriken-Commissions-Rathe A. F. W. Brix

zu Berlin.

Bereits im vierten Bande dieses Archivs, S. 293 u. f., habe ich eine theoretische Untersuchung über die Dehnung prismatischer Stäbe mit ungleichen Querschnitten mitgetheilt, zu der ich durch meine Versuche im Königlichen Gewerbe-Institut zur Ermittelung der Elasticität des Schmiedeeisens veranlasst worden war. Eine gleiche Veranlassung hat die vorliegende Arbeit, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, da die Resultate derselben für die Anwendung von Wichtigkeit zu sein scheinen, obgleich sie selbst vom wissenschaftlichen Standpunkte aus vielleicht nur ein geringes Interesse in Anspruch nehmen kann. Ich habe mich aber dadurch nicht abhalten lassen, die mir von der Praxis gestellte Aufgabe ganz elementar zu behandeln, und es dürfte auch zu bezweifeln sein, dass die Anwendung des höhern Calcüls kürzer zum Ziele geführt oder allgemeinere Resultate gegeben haben würde, als wie man sie im Nachstehenden finden wird.

Es handelt sich nämlich darum, bei prismatischen Körpern, die nach der Richtung ihrer Länge gespannt werden, die Dehnung und demnächst die absolute Festigkeit unter der Voraussetzung

Digitized by Google

zu bestimmen, dass die spannende Kraft nicht, wie es gewöhnlich vorausgesetzt wird, in der Richtung der Schwerpunkts-Achse des Körpers, sondern in einem bestimmten Abstande von derselben nach paralleler Richtung wirkt.

Bei der gewöhnlichen, zuerst erwähnten, Annahme werden alle Fasern des Körpers gleich gespannt; sie erleiden also gleiche Dehnungen und werden zuletzt auch zu gleicher Zeit zerreissen. — Die dieser Annahme entsprechenden Gleichungen sind bekanntlich

$$P = m \cdot \frac{F\lambda}{l} \text{ und } P = KF,$$

worin P die spannende oder zerreissende Kraft, F den Querschnitt, l die Länge des Körpers, λ die Dehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze, m das Maass der Elasticität und K das der absoluten Festigkeit bezeichnet.

Nicht so einfach gestalten sich die Gleichungen, wenn die Richtung der spannenden Kraft ausserhalb der Schwerpunkts-Achse angenommen wird. In diesem Falle werden die Fasern auf der Seite, wo die Kraft wirkt, mehr als die auf der entgegengesetzten Seite des Körpers ausgedehnt, und das endliche Zerreissen wird also — auf ähnliche Weise wie beim Zerbrechen der Körper — successive erfolgen, indem die äussersten Fasern auf der Seite der grössten Dehnung zuerst, die gerade entgegengesetzt liegenden Fasern aber zuletzt zerreissen.

Es stelle $ACBD$ (Taf. V. Fig. 1.) einen prismatischen, vollkommen elastischen Körper mit beliebigem Querschnitte vor, der in vertikaler Stellung seiner Schwerpunkts-Achse CD mit seiner oberen Endfläche befestigt, an seinem unteren Ende aber durch ein in E aufgehängtes Gewicht P belastet ist. Ferner sei AB irgend ein Querschnitt in dem Abstande $CG = l$ vom oberen Ende, und $A'B'$ sei die Lage, in welche derselbe durch die Ausdehnung des oberen Körperstückes CAB übergegangen und darin zum Gleichgewichte gekommen ist. — Offenbar muss nun die Dehnung AA' auf der linken Seite der Schwerpunkts-Achse grösser als die BB' auf der rechten Seite sein, dergestalt, dass die Dehnungen sämmtlicher zwischen A und B liegender Fasern durch die Convergenz der Ebenen AB und $A'B'$ bestimmt werden. Diese beiden Ebenen schneiden sich verlängert in einer horizontalen Linie, die im Punkte O projicirt gedacht ist, und die nach Umständen ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegen kann.

Man kann dieselbe als neutrale Achse betrachten, um welche die Punkte des Querschnittes AB beim Uebergange in die Lage $A'B'$ eine drehende Bewegung gemacht haben. Ist dann die Elasticität des Körpers mit der spannenden Kraft P in's Gleichgewicht gekommen, so müssen offenbar folgende Bedingungen stattfinden:

1) die algebraische Summe aller Spannungen in AB muss gleich der Kraft P, und

2) die Summe der Momente aller Spannungen in Bezug auf die bei O projicirte Achse gleich dem Moment $(P \cdot HO)$ der Kraft P in Bezug auf dieselbe Achse sein.

Digitized by Google

Um die diesen Bedingungen entsprechenden Gleichungen zu bilden, sei x der Abstand GH zwischen der Richtungslinie der Kraft P und der Schwerpunkts-Achse, y die Entfernung OG der neutralen Achse vom Schwerpunkte G des in Betracht gezogenen Querschnittes, dann ist $x+y=HO$ der Hebelarm für die Kraft P. Bezeichnet ferner σ die Spannung einer Faser von 1 Quadratzoll Querschnitt, die sich in dem Abstande $=1$ Zoll von der neutralen Achse befindet, so drückt σz die Spannung einer gleichen Faser aus, deren Abstand von der genannten Achse $=z$ ist.

In Taf. V. Fig. 2. stelle e ein beliebiges Element des Querschnittes AB vor und z sei der Abstand desselben von der neutralen Achse XY. Betrachtet man dieses Element als den Querschnitt einer Faser, so ist dem Obigen gemäss σz die Spannung dieser Faser für die Einheit des Querschnittes, und für den Querschnitt e ist also die Spannung $s=\sigma ze$. Denkt man sich auf dieselbe Weise die Spannungen aller übrigen Fasern bestimmt, wobei der Factor σ offenbar derselbe bleibt, so erhält man für die Summe aller Spannungen den Ausdruck

$$\Sigma\sigma ze=\sigma\,.\,\Sigma ez.$$

Nach bekannten Lehren der Statik ist aber $\Sigma ez=Fy$; substituirt man dies und berücksichtigt zugleich die zuerst ausgesprochene Bedingung des Gleichgewichts, so erhält man die ihr entsprechende Gleichung

$$P=\sigma\,.\,Fy. \tag{1}$$

Ferner ist das Moment der Spannung der Faser e in Bezug auf die Achse XY gleich sz, oder, wenn für s der vorige Werth gesetzt wird,

$$sz=\sigma ez^2;$$

also ist die Summe aller Spannungs-Momente

$$\Sigma sz=\sigma\,.\,\Sigma ez^2.$$

Nach Lehren der Mechanik drückt Σez^2 das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes AB in Bezug auf XY als Achse aus, und dieses Moment lässt sich bekanntlich durch die Formel $N+Fy^2$ ausdrücken, wenn N das Trägheitsmoment der in Rede befindlichen Fläche F für die durch ihren Schwerpunkt gehende Achse VW bedeutet. Ausserdem ist $P(x+y)$ das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die neutrale Achse XY, und da zufolge der zweiten Bedingung dieses Moment der Summe aller Spannungs-Momente gleich sein muss, so hat man dem gemäss die Gleichung

$$P(x+y)=\sigma(N+Fy^2). \tag{2}$$

Setzt man darin für P den durch die Gleichung (1) gegebenen Werth, so kömmt, da σ auf beiden Seiten sich hebt,

$$Fy\,(x+y)=N+Fy^2,$$

und hieraus findet man leicht

Digitized by Google

(3) $$y=\frac{N}{Fx};$$

ein Ausdruck, durch welchen der Abstand OG der neutralen Achse vom Schwerpunkte des Querschnittes AB bestimmt ist, da x in jedem besonderen Falle als gegeben angesehen werden muss.

Zufolge der letzten Gleichung stehen die beiden Abstände x und y in einer reciproken Beziehung zu einander, dergestalt, dass ihr Produkt die constante Grösse $\frac{N}{F}$ giebt. Nimmt man daher den einen gleich Null an, so wird der andere unendlich und umgekehrt. Für die gewöhnliche Annahme, dass die Richtungslinie der spannenden Kraft mit der Schwerpunkts-Achse des Körpers zusammenfällt, ist $x=0$, also $y=\infty$; die Convergenz zwischen den beiden Durchschnittsebenen AB und $A'B'$ hört also auf, und alle Fasern des Körpers erleiden folglich in diesem Falle so gleiche Dehnungen wie gleiche Spannungen.

Vermittelst der gefundenen drei Gleichungen ist es nun leicht, die Dehnung irgend einer Faser zu bestimmen, wenn der Abstand derselben von der Schwerpunkts-Achse, oder — bestimmter ausgedrückt — von der durch den Schwerpunkt G (Taf. V. Fig. 2.) mit der neutralen Achse XY parallel gezogenen Linie VW gegeben ist.

Bezeichnet nämlich $\pm\alpha$ diesen Abstand, jenachdem die fragliche Faser auf der linken oder rechten Seite von VW liegt, so ist $y\pm\alpha$ ihr Abstand von XY, und $s=\sigma(y\pm\alpha)$ drückt die zugehörige Spannung für den Quadratzoll ihres Querschnittes aus. Nach Gleichung (1) ist aber $\sigma=\frac{P}{Fy}$, und wenn dies in den vorigen Ausdruck von s gesetzt wird, entsteht:

$$s=\frac{P(y\pm\alpha)}{Fy};$$

oder, wenn man für y den durch die Gleichung (3) gegebenen Werth einsetzt,

(4) $$s=P.\frac{N\pm\alpha Fx}{FN}.$$

Die Gleichung zwischen dieser Spannung und der durch sie bewirkten Dehnung λ, letztere für eine Faser von der Länge l verstanden, ist nun mit Rücksicht darauf, dass hier der Querschnitt jener Faser $=1$ vorausgesetzt wird,

$$s=m.\frac{\lambda}{l};$$

wo m, wie früher erwähnt, den Elasticitäts-Modulus bedeutet. Hieraus findet man nun $\lambda=\frac{sl}{m}$; mithin nach Substitution des obigen Werthes von s,

(5) $$\lambda=\frac{Pl}{mF}.\frac{N\pm\alpha Fx}{N}.$$

Digitized by Google

Für $x=0$, d. h. für die Annahme, dass die Richtung der Kraft P mit der Schwerpunkts-Achse zusammenfällt, liefern die Gleichungen (4) und (5) nach einander

$$s=P, \text{ und } \lambda=\frac{Pl}{mF}.$$

Beide Resultate bedürfen keiner Erklärung, da sie mit den bekannten Dehnungsgesetzen elastischer Körper übereinstimmen.

Uebrigens liefert nun die Gleichung (5) für alle positiven und negativen Werthe von α die Dehnungen der zugehörigen Fasern, welche Dehnungen grösser oder kleiner ausfallen, jenachdem die Fasern mit der spannenden Kraft P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Schwerpunkts-Achse liegen. Für negative Werthe von α können die Dehnungen, wie sich weiterhin zeigen wird, auch negativ ausfallen, und müssen dann als Zusammendrückungen oder Verkürzungen der Fasern aufgefasst werden.

Verlangt man z. B. die Dehnung einer Faser kennen zu lernen, die in der Schwerpunkts-Achse selbst liegt, so ist $\alpha=0$ zu setzen, und man findet

$$\lambda=\frac{Pl}{mF}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von x und spricht also das allgemeine Gesetz aus, dass die Dehnung in der Schwerpunkts-Achse, wo auch die spannende Kraft wirken möge, unter übrigens gleichen Umständen stets denselben Werth behält.

Vorstehendes Gesetz ist von Wichtigkeit, wenn man den Elasticitäts-Modulus aus directen Dehnungsversuchen berechnen will, wobei in der Regel die obige Gleichung zum Grunde gelegt wird. Offenbar darf dies aber nur dann geschehen, wenn die durch eine bekannte Kraft P hervor gebrachte Dehnung des Körpers in der Richtung seiner Schwerpunkts-Achse gemessen ist; denn sonst müssen nothwendig mehr oder minder fehlerhafte Resultate entstehen. Um dies näher ersehen zu lassen, wollen wir die allgemeine Gleichung (5) auf einige besondere Fälle anwenden.

Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, wo der Querschnitt des Prismas ein Rechteck von den Abmessungen b und d ist, und setzen dabei voraus, die Kraft P sei in der Mitte der einen Seitenfläche, welche d zur Breite hat, angebracht; dann hat man bekanntlich $F=bd$, $N=\frac{1}{12}bd^3$, $x=\frac{1}{2}d$; also entsteht nach Gleichung (5)

$$\lambda=\frac{Pl}{mbd}\cdot\frac{d\pm 6a}{d}.$$

Will man hiernach die Dehnung der Faser bestimmen, die mit P in derselben oder die in der gegenüberstehenden Seitenfläche des Körpers liegt, so muss man in beiden Fällen $\alpha=\frac{1}{2}d$ setzen, und je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen gelten lässt, erhält man nach einander

Digitized by Google

$$\lambda_1 = 4 \cdot \frac{Pl}{mbd}; \quad \lambda_2 = -2 \cdot \frac{Pl}{mbd}.$$

In der einen Seitenfläche findet also im vorliegenden Falle eine Ausdehnung statt, welche viermal, in der andern Seitenfläche aber eine Verkürzung der Fasern, welche doppelt so gross ist, als die Dehnung in der Schwerpunkts-Achse. Die neutrale Achse muss also innerhalb des Körpers liegen, und in der That ergiebt sich ihr Abstand y von der Schwerpunkts-Achse nach Gleichung (3), wenn darin die obigen Werthe von N, F und x eingesetzt werden, gleich $\frac{1}{2}d$.

Für einen cylindrischen Stab mit kreisförmigem Querschnitte ist, wenn r den Halbmesser bezeichnet, $F = \pi r^2$, $N = \frac{1}{4}\pi r^4$; also entsteht

$$\lambda = \frac{Pl}{\pi m r^2} \cdot \frac{r^2 \pm 4\alpha x}{r^2}.$$

Nimmt man nun die Kraft P in einer Seitenlinie des Cylindermantels an, so dass $x = r$ ist, so ergiebt sich die Aenderung der Länge in dieser, so wie die in der gegenüberstehenden Seitenlinie, wenn α bezüglich gleich $+r$ und gleich $-r$ gesetzt wird. Es entsteht nämlich nach einander

$$\lambda_1 = 5 \cdot \frac{Pl}{\pi m r^2}; \quad \lambda_2 = -3 \cdot \frac{Pl}{\pi m r^2};$$

während sich zugleich $y = \frac{1}{4}r$ ergiebt. Die Werthe von λ_1 und λ_2 weichen hier also noch mehr von einander ab, als vorhin bei rechteckigen Querschnitten.

Dass nun diese Ungleichmässigkeit in der Dehnung der Fasern bei genauen Versuchen sehr störend auf die Ergebnisse einwirken kann, wird einleuchten, wenn man die Schwierigkeit erwägt, den zu prüfenden Körper (etwa eine dicke Eisenstange) an den Enden so zu fassen, dass nicht auf der einen Seite grössere Spannungen entstehen, als auf der entgegengesetzten. Es zeigen sich dann sofort grosse Unregelmässigkeiten in dem progressiven Fortschreiten der Dehnungsgrössen mit den zunehmenden Belastungen, wie ich das bei meinen Versuchen mehrmals wahrgenommen habe, ohne dass ich mir diese Erscheinung anfänglich erklären konnte. Jene Unregelmässigkeiten zu vermeiden, ist aber um so schwieriger, als es sich kaum ausführen lässt, die in der Schwerpunkts-Achse statthabende Dehnung, welche allein maassgebend sein kann, mit Sicherheit zu beobachten.

Nach dieser Abschweifung in das Gebiet der Praxis kehre ich wieder zu der vorliegenden Frage zurück. Es bleibt nämlich noch übrig, die absolute Festigkeit des prismatischen Körpers, oder denjenigen Werth der Kraft P zu bestimmen, welcher mit der genannten Festigkeit im Gleichgewichte steht. Zu dem Ende hat man nach Gleichung (4)

$$P = sF \cdot \frac{N}{N \pm \alpha F x},$$

Digitized by Google

worin s die Spannung derjenigen Faser bedeutet, deren Abstand von der Schwerpunkts-Achse gleich α ist.

Da es nun mit Rücksicht auf die vorliegende Aufgabe nur darauf ankommt, den Widerstand zu ermitteln, den der Körper durch seine Cohäsion einer Trennung seiner Theile überhaupt entgegen zu setzen vermag, so ist einleuchtend, dass hierbei nur die Spannung derjenigen Faser, welche am ersten zerreissen wird, maassgebend sein kann. Es darf also zuvörderst α nur positiv genommen werden, und ausserdem ist unter s diejenige Spannung zu verstehen, welche mit der absoluten Festigkeit jener Faser im Gleichgewichte steht. Bezeichnet man dieselbe für den Quadratzoll des Querschnittes mit K, so ist also

$$P = KF \cdot \frac{N}{N + \alpha F x} \tag{7}$$

der Ausdruck für die absolute Festigkeit des ganzen Körpers. Für $x = 0$ entsteht daraus $P = KF$, welches die bekannte Formel für die absolute Festigkeit unter der besonderen Voraussetzung ist, dass die zerreissende Kraft in der Richtung der Schwerpunkts-Achse wirkt. Fällt aber die Richtung der Kraft mit derjenigen Faser zusammen, die bei der Trennung des Körpers am ersten zerreisst, so muss $x = \alpha$ gesetzt werden, und es entsteht

$$P = KF \cdot \frac{N}{N + \alpha^2 F} \tag{8}$$

Wenden wir diese Gleichung auf die vorhin betrachteten besonderen Fälle an, so ist

1) für einen rechteckigen Querschnitt von den Abmessungen b und d: $F = bd$, $N = \frac{1}{12} bd^3$ und $\alpha = \frac{1}{2} d$; also

$$P = \tfrac{1}{4} K \cdot bd;$$

2) für einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r: $F = \pi r^2$; $N = \frac{1}{4} \pi r^4$ und $\alpha = r$; daher

$$P = \tfrac{1}{3} K \cdot \pi r^2.$$

Der Widerstand gegen das Zerreissen beträgt also bei einem vierkantigen Stabe, wenn die zerreissende Kraft in der Mitte einer der Seitenflächen angebracht ist, nur den vierten Theil, bei einem runden Stabe aber, wenn jene Kraft in einer Seitenlinie seines Mantels wirkt, nur den fünften Theil desjenigen Widerstandes, den die genannten Körper einer Kraft entgegen zu setzen vermögen, deren Richtungslinie jedesmal mit der Schwerpunkts-Achse zusammenfällt.

In manchen Fällen der Anwendung kann aber die Richtung der Kraft auch ganz ausserhalb des Körpers zu liegen kommen, welches unter Andern bei einem offenen Haken (Taf. V. Fig. 3.) der Fall ist. Nimmt man z. B. an, derselbe sei aus einem runden Eisenstabe vom Halbmesser r gebogen und setzt demgemäss für F, N und α die vorhin angegebenen Werthe, so hat man

Digitized by Google

$$P=\pi r^2 K.\frac{r}{r+4x};$$

worin x gleich dem Abstande GH ist. Setzt man die ganze Weite des Hakens $DG=a$ und $x=\frac{1}{2}a$, so ergiebt sich seine Festigkeit durch die Formel

$$P=\pi r^2 K.\frac{r}{r+2a}.$$

Je weiter der Haken, desto geringer ergiebt sich hiernach seine Festigkeit, weshalb man in der Praxis diese Weite niemals grösser machen darf, als es mit Rücksicht auf die übrigen Umstände durchaus nöthig ist. In der Regel wird $DG=2.AB$ oder $a=4r$ gemacht, wofür man $P=\frac{1}{9}.\pi r^2 K$ findet. Die Festigkeit des Hakens beträgt also in diesem Falle nur den 9ten Theil von der absoluten Festigkeit des dazu verwendeten Eisens im geraden Zustande.

XXXII.

Eigenthümliche, leicht fassliche, in systematischem Zusammenhange stehende Beweise bekannter wichtiger Sätze aus der Combinationslehre.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel in Marburg.

---

1. Wenn bei den combinatorischen Arbeiten keine solche Beschränkungen vorgeschrieben sind, durch welche ein häufigerer Gebrauch des einen und ein seltenerer des andern Elements bedingt wird, so muss jedes der gegebenen m Elemente in der Gesammtheit der Complexionen der $n$ten Classe so oft enthalten sein als das andere.

2. Wenn keines der Elemente in einer Complexion mehr als einmal vorkommen darf, oder wenn die erlaubte Wiederholung für alle Elemente ganz unbeschränkt oder in gleichem Grade beschränkt

Digitized by Google

statt finden darf, so wird hierdurch keine Verschiedenheit im Gebrauch der verschiedenen Elemente vorgeschrieben.

3. Man findet daher, wenn keine eingeschränkten Wiederholungen in Betracht kommen, die Anzahl $\binom{n}{m}$, welche angibt, wie oft eines der m Elemente in der Gesammtheit der Complexionen der $n$ten Classe vorkommt, wenn man die Anzahl $\binom{n}{m}$ der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen mit der Anzahl n der Elemente, die in jeder Complexion enthalten sind, multiplicirt und mit der Anzahl m der gegebenen Elemente dividirt:

$$A) \ldots \binom{n}{m} = \frac{n}{m} \cdot \binom{n}{m}.$$

Da nämlich die $n$te Klasse $\binom{n}{m}$ Complexionen und jede Klasse derselben n Elemente enthält, so sind in allen Complexionen der $n$ten Klasse zusammengenommen $n \cdot \binom{n}{m}$ Elemente enthalten, mithin, da m Arten von Elementen da sind und von einer Art so viel als von der andern, so ist in allen Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen jedes der m Elemente $\frac{n}{m} \cdot \binom{n}{m}$mal enthalten, d. h. $\binom{n}{m} = \frac{n}{m} \cdot \binom{n}{m}$.

4. Umgekehrt findet man daher die Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse für m Elemente durch die Gleichung

$$B) \ldots \binom{n}{m} = \frac{m}{n} \cdot \binom{n}{m}.$$

5. Wird $n = m$, so hat man

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n} \text{ oder } \binom{m}{m} = \binom{m}{m}.$$

6. Wenn man daher $\binom{n}{m}$ anderweitig bestimmt, so hat man in der Gleichung B) ein Hülfsmittel zur Bestimmung von $\binom{n}{m}$, welches sowohl für Permutationen, Variationen und Combinationen ohne Wiederholungen, als auch für Variationen und Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen brauchbar ist, wie folgende Auseinandersetzung zeigt.

α) Permutationen ohne alle Wiederholungen.

7. Hier ist $m = n$, also $\binom{m}{m} = \binom{m}{m}$.

Digitized by Google

Bildung der $m$ten oder $n$ten Klasse.

Irgend eins der m Elemente lässt sich allen Complexionen der $(m-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen ansetzen, und zwar an jede in m verschiedenen Stellen (als erstes, zweites, drittes u. s. w. $m$tes Element) *); kommt also in der $m$ten Klasse $m$mal so oft vor, als Complexionen der $(m-1)$ten Classe möglich sind. Daher ist:

$$\text{I.}\quad \binom{m}{m}A = m\binom{m-1}{m-1}C;\ \text{also auch gemäss } B):$$

$$\text{II.}\quad \binom{m}{m}C = m\binom{m-1}{m-1}C.$$

Es ist also, wenn man in II. statt m nach und nach setzt $(m-1)$, $(m-2)$,.. und so $\binom{m-1}{m-1}C$, $\binom{m-2}{m-2}C$,..findet, und die gefundenen Werthe in II. substituirt: $\binom{m}{m}C = m\binom{m-1}{m-1}C = m(m-1).\binom{m-2}{m-2}C$
$= m(m-1)(m-2).\binom{m-3}{m-3}C = .. = m(m-1)(m-2)...(m-(p-1))\binom{m-p}{m-p}C$,
wobei zuletzt $\binom{m-p}{m-p}C = \binom{1}{1}C = 1$, also $(m-(p-1)) = 2$ werden muss, so dass

$$\text{III.}\quad \binom{m}{m}C = m(m-1)(m-2)(m-3)...3.2.1 = 1.2.3...m$$

= Anzahl der Permutationen ohne Wiederholungen für m Elemente; also auch

$$\text{IV}\quad \binom{m}{m}A = 1.2.3....m.$$

β) *Variationen ohne Wiederholungen.*

Bildung der $n$ten Klasse.

8. Irgend eins der m Elemente kann jeder Complexion der $(n-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen als erstes,

---

*) Es gibt zum Beispiel die Complexion abc der 3ten Klasse durch Setzung des Elementes d in eine der vier Stellen, die in der Darstellung

·	a	·	b	·	c	·

durch Punkte ausgefüllt sind, nebenstehende vier Complexionen der 4ten Klasse.

·	a	·	b	·	c	d	= abcd
·	a	·	b	d	c	·	= abdc
·	a	d	b	·	c	·	= adbc
d	a	·	b	·	c	·	= dabc

In ähnlicher Art können die übrigen Complexionen der 4ten Klasse aus den übrigen Complexionen der dritten Klasse (acb, bac, bca, cab, cba) hergeleitet werden.

zweites, drittes u. s. w. $n$tes Element, d. h. in n verschiedenen Stellen, angefügt werden. Es ist also die Zahl, welche angibt, wie oft ein Element in der $n$ten Klasse aus m Elementen enthalten ist, $n$mal so gross als die Anzahl der Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus $(m-1)$ Elementen. Diess in Zeichen ausgedrückt heisst.

$$\text{I.}\quad \binom{n}{m}_A = n\binom{n-1}{m-1}_C;$$

da nun, zufolge *B*), allgemein $\binom{n}{m}_C = \frac{m}{n}\binom{n}{m}_A$, so ist hier:

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}_C = m\binom{n-1}{m-1}_C = m\,(m-1)\binom{n-2}{m-2}_C = m(m-1)(m-2)\binom{n-3}{m-3}_C$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-(p-1))\binom{n-p}{m-p}_C,$$

wo nothwendig einmal $\binom{n-p}{m-p}_C = \binom{1}{m-(n-1)}_C$ werden muss, nemlich wenn $p = n-1$ wird.

Es ist aber dann $\binom{1}{m-(n-1)}_C = m-(n-1)$, weil $m-(n-1)$ Elemente $m-(n-1)$ Unionen geben. Auch ist dann $m-(p-1) = m-(n-2)$, also

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}_C = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-2))(m-(n-1))$$

= der Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen zur $n$ten Klasse für m Elemente;

hieraus ergibt sich

$$\binom{n}{m}_A = n\binom{n-1}{m-1}_C = n.[(m-1)(m-2)(m-3)\ldots,(m-(n-1))].$$

γ) Variationen mit unbeschränkten Wiederholungen.

Bildung der $n$ten Klasse.

9. Wenn man eines der m Elemente allen Complexionen der $(n-1)$ten Classe für m Elemente zur Linken anfügt, so erhält man alle jene Complexionen der $n$ten Klasse, in welchen das fragliche Element in der ersten Stelle jeder Complexion sich befindet. Dasselbe gilt von jedem andern Element in Beziehung auf die betreffende andere Ordnung *) der $n$ten Klasse.

Jedes Element ist also in der $n$ten Klasse sovielmal als erstes Element vorhanden, als die $(n-1)$te Klasse Complexionen zählt.

---

*) Alle jene Complexionen einer Klasse, die einerlei Anfangselement haben, zu einerlei Ordnung gerechnet.

Digitized by Google

Es ist aber jedes Element ebenso oft in jeder der n Stellen vorhanden, als es in der ersten vorkommt (weil keiner der Stellen irgend ein Vorzug zusteht), daher muss hier

$$\text{I.}\ \binom{n}{m}_A = n.\binom{n-1}{m}_C$$

sein; da nun gemäss *B*) gilt $\binom{n}{m}_C = \frac{m}{n}\binom{n}{m}_A$, so ist hier

$$\text{II.}\ \binom{n}{m}_C = m.\binom{n-1}{m}_C, \text{ also}$$

$$\binom{n}{m}_C = m.\left(m\binom{n-2}{m}_C\right) = m^2\left(m\binom{n-3}{m}_C\right) = \ldots = m^p\binom{n-p}{m}_C,$$

wo $\binom{n-p}{m}_C$ einmal $= \binom{1}{m}_C$, also $(n-p)=1$, folglich $p=(n-1)$ werden muss.

Es ist aber $\binom{1}{m}_C = m$, weil m Elemente m Unionen geben; also wird

$$\text{III.}\ \binom{n}{m}_C = m^{n-1}.m = m^n$$

= Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen beim Variiren mit unbeschränkten Wiederholungen.

Hieraus folgt: $\binom{n-1}{m}_C = m^{n-1}$, und man hat also auch:

$$\text{IV.}\ \binom{n}{m}_A = n.\binom{n-1}{m}_C = n.m^{n-1}.$$

δ) *Combinationen ohne Wiederholungen.* Bildung der $n$ten Klasse.

10. Wenn man eines der m Elemente an alle Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus den $(m-1)$ übrigen Elementen ansetzt, so erhält man sämmtliche Complexionen der $n$ten Klasse. Man hat also für die Anzahl, welche angibt, wie oft dieses, folglich jedes Element, in der $n$ten Klasse gebraucht wird, die Gleichung:

$$\text{I.}\ \binom{n}{m}_A = \binom{n-1}{m-1}_C;$$

da nun gemäss *B*):

$$\binom{n}{m}C = \frac{m}{n}\binom{n}{m}A,$$

so ist

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}C = \frac{m}{n}\cdot\binom{n-1}{m-1}C, \text{ also:}$$

$$\binom{n}{m}C = \frac{m}{n}\cdot\left[\frac{m-1}{n-1}\binom{n-2}{m-2}C\right] = \frac{m\,.\,(m-1)}{n\,.\,(n-1)}\cdot\left[\frac{m-2}{n-2}\binom{n-3}{m-3}C\right]$$

$$= \frac{m\,.\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots.(m-(p-1))}{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots.(n-(p-1))}\binom{n-p}{m-p}C,$$

wo, wenn $p=(n-1)$ wird, auch $\binom{n-p}{m-p}C = \binom{1}{m-p}C = \binom{1}{m-(n-1)}C$ $=m-(n-1)$ und $m-(p-1)=m-(n-2)$, und $n-(p-1)=2$ wird, so dass:

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}C = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-2))\,.\,(m-(n-1))}{n(n-1)\,(n-2)\ldots.2\,.\,1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

$$\left.\begin{array}{l}\odot)\quad \binom{n}{m}C = \dfrac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.\,(m-(n-1))}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.n} \\ \text{und} \\ \big)\quad \binom{n}{m}C = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.\,(n+(m-n))}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,(m-n)}\ *)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Anzahl der Com-}\\ \text{plexionen der}\\ n\text{ten Klasse aus}\\ m\text{ Elementen}\\ \text{beim Combini-}\\ \text{ren ohne Wie-}\\ \text{derholungen,}\end{array}\right.$$

so dass die Formel $\odot$) die bequemere ist, wenn $n<(m-n)$, und umgekehrt $\big)$) vorzuziehen ist, wenn $(m-n)<n$.

Hat man z. B. für 60 Elemente die Anzahl der Ternionen zu finden, so ist $3<(60-3)$, also die Formel $\odot$) zu brauchen, und man hat

$$\binom{n}{m}C = \frac{60\,.\,59\,.\,58}{1\,.\,2\,.\,3}, \text{ während } \big)\text{ gibt } \binom{n}{m}C = \frac{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\ldots.\,60}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots.57}.$$

Ist dagegen für 6 Elemente die Anzahl der Complexionen der 4ten Klasse zu finden, so hat man

---

*) Es ist nämlich jeder Bruch $\frac{x}{y} = \frac{q:y}{q:x}$; ist also

$x=m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-1))$ und $y=1\,.\,2\,.\,3\ldots.n$

und $q=1\,.\,2\,.\,3\ldots.(n+m-n)=1\,.\,2\,.\,3\ldots.m$, so ist

$$\frac{q:y}{q:x} = \frac{(n+1)\,(n+2)\ldots.(n+(m-n))}{1\,.\,2\ldots.\,(m-n)}.$$

Digitized by Google

$$\text{nach } \odot): \binom{n}{m} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4},$$

$$\text{nach } \supset): \binom{n}{m} = \frac{5.6}{1.2}.$$

Aus ⊙) folgt mit Rücksicht auf I.

$$\text{IV}a. \quad \binom{n}{m} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)....(m-(n-1))}{1.2.3....(n-1)}.$$

Aus ⊃) folgt

$$\text{IV}b. \quad \binom{A}{m} = \frac{n(n+1)(n+2)....(n+((m-1)-n))}{1.2.3....(m-n)}.$$

ε) *Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen.*

Bildung der *n*ten Klasse.

11. Man erhält die nach einander folgenden Ordnungen der *n*ten Klasse von Combinationen mit unbeschränkten Wiederholungen aus *m* Elementen dadurch, dass man nach und nach jedes der *m* Elemente an alle diejenigen Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus *m* Elementen zur Linken (oder, wenn es nicht um regelmässige, sondern nur um vollständige Aufzählung der Complexionen der *n*ten Klasse zu thun ist, irgendwo) ansetzt, welche kein niedrigeres Element enthalten.

12. Wenn man also das niedrigste der *m* Elemente allen Complexionen der $(n-1)$ten Klasse aus denselben *m* Elementen zur Linken ansetzt, so erhält man alle diejenigen Complexionen der *n*ten Klasse, welche das niedrigste Element enthalten. Und zwar ist das niedrigste Element in diesen Complexionen (also in der ganzen *n*ten Klasse)

erstens, so viel mal in der ersten Stelle vorhanden, als die Anzahl der Complexionen der $(m-1)$ten Klasse beträgt (denen es zur Linken angefügt wurde), während es

zweitens, in den übrigen Stellen so viel mal vorhanden ist, als es in allen Stellen der $(n-1)$ten Klasse vorhanden ist.

13. Jedes der *m* Elemente ist aber in einer und derselben Klasse so oft enthalten, als das niedrigste, weil das Höher- oder Niedriger-Sein der Elemente keine Verschiedenheit der Anzahl, welche angibt, wie oft ein Element in einer Klasse vorzukommen hat, hervorruft, da man ja jedes der *m* Elemente als das niedrigste muss betrachten können. Es ist demnach für jedes Element

$$\text{I.} \quad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m}.$$

Digitized by Google

Da nun allgemein gemäss *B*) und *A*):

$$\binom{n}{m}_C = \frac{m}{n}\binom{n}{m}_A \text{ oder } \binom{n}{m}_A = \frac{n}{m}\binom{n}{m}_C,$$

so muss auch

$$\binom{n-1}{m}_A = \frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}_C,$$

mithin

$$\binom{n}{m}_A = \binom{n-1}{m}_C + \frac{n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}_C = \left(1+\frac{n-1}{m}\right)\binom{n-1}{m}_C = \frac{m+n-1}{m}\cdot\binom{n-1}{m}_C$$

sein; also gemäss *B*):

$$\binom{n}{m}_C = \frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m+n-1}{m}\binom{n-1}{m}_C\right),$$

folglich

$$\text{II.}\quad \binom{n}{m}_C = \frac{m+n-1}{n}\cdot\binom{n-1}{m}_C.$$

Es ist also

$$\binom{n}{m}_C = \frac{m+n-1}{n}\cdot\frac{m+n-2}{n-1}\cdot\binom{n-2}{m}_C = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{n\,.\,(n-1)}\cdot\left(\frac{m+n-3}{n-2}\right)\binom{n-3}{m}_C$$

$$= \frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots\ldots(m+n-p)}{n\,.\,(n-1)\ldots\ldots(n-(p-1))}\cdot\binom{n-p}{m}_C,$$

wo, wenn $\binom{n-p}{m}_C = \binom{1}{m}_C = m$ wird, auch $n-p=1$, also $p=n-1$, mithin auch $m+n-p=m+1$ und $n-(p-1)=2$ werden muss, so dass

$$\text{III.}\quad \binom{n}{m}_C = \frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\ldots\ldots(m+1)\,.\,m}{n\,.\,(n-1)\ldots\ldots 2\,.\,1}$$

ist, welcher Formel man auch folgende beide Gestalten geben kann:

$$\odot)\ \binom{n}{m}_C = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}$$

und

$$)\ (\ \binom{n}{m}_C = \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(m-1)}$$

$\Big\}$ = Anzahl der Complexionen der $n$ten Klasse aus m Elementen beim Combiniren mit unbeschränkten Wiederholungen,

wo wieder ⊙) bequemer ist als)), wenn $n<(m-1)$ und umgekehrt.

Da nun nach *A*)

$$\binom{n}{m}_A = \frac{n}{m}\binom{n}{m}_C,$$

Digitized by Google

so ist nach ⊙)

$$\text{IV}a.\ \binom{n}{m}=\frac{n}{m}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

oder nach ☽)

$$\text{IV}b.\ \binom{n}{m}=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

14. Aus I. unter 13., d. h. aus der Gleichung:

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m}$$

folgt:

$$\binom{n-1}{m}=\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m};$$

mithin ist

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m}$$
$$=\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m}+\binom{n-3}{m}+\binom{n-3}{m}$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$=\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m}+\binom{n-3}{m}+\ldots+\binom{n-p}{m}+\binom{n-p}{m},$$

wo, wenn $n-p=1$ wird, auch $\binom{n-p}{m}=1$ ist, so dass

$$\binom{n}{m}=1+\binom{1}{m}+\binom{2}{m}+\binom{3}{m}+\ldots+\binom{n-1}{m}$$
$$=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Es ist also die Summe der Reihe:

$$\delta)\ 1+\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1.2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\ldots+\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)m)+3)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Digitized by Google

Die Reihe δ) ist die gemeinschaftliche allgemeine Form für folgende bekanntlich höchst wichtige Reihen:

	1stes	2tes	3tes	4tes	$n$tes Glied	Summe der Reihe.
$m=1$	1	1	1	1	1	$\frac{n}{1}$
$m=2$	1	2	3	4	$\frac{n}{1}$	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
$m=3$	1	3	6	10	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$m=4$	1	4	10	20	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$m=5$	1	5	15	35	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
$m=m$	1	$\frac{m}{1}$	$\frac{m(m+1)}{1.2}$	$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$	$\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2....(m-1)}$ oder $\frac{n(n+1)....(n+m-2)}{1.2....(n-1)}$	$\frac{m(m+1)(m+2)...(m+n-1)}{1.2.3...(n-1)}$ oder $\frac{n(n+1)(n+2)....(n+m-1)}{1.2.3....(m-1)}$

XXXIII.

Ueber die Auflösung der Gleichung $ax+by+cz=0$, wo a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, in ganzen Zahlen.

Aus einer Abhandlung von Cauchy (Exercices de Mathématiques. 9me Livraison) ausgezogen

von

dem Herausgeber.

Wenn man in den Formeln

$$1)\quad \begin{cases} x=bw-cv, \\ y=cu-aw, \\ z=av-bu \end{cases}$$

für u, v, w beliebige ganze Zahlen setzt, so erhält man, wovon man sich durch ganz leichte Rechnung auf der Stelle überzeugt, allemal eine Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen. Vorzüglich kommt es nun aber hierbei darauf an, dass man zeigt, dass die Gleichungen 1) auch alle Auflösungen der vorhergehenden Gleichung in ganzen Zahlen liefern, welche es geben kann, was bei dieser Untersuchung bei Weitem die Hauptsache ist.

Um diesen Beweis zu führen, wollen wir, was offenbar jederzeit verstattet ist, annehmen, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c die Einheit sei, oder dass diese Grössen relative Primzahlen seien. Sind nun, dies vorausgesetzt, X, Y, Z drei ganze Zahlen, durch welche die Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

Digitized by Google

aufgelöst wird, so ist

$$2)\quad aX+bY+cZ=0;$$

und wenn wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a und b durch d bezeichnen, so muss d in

$$cZ=-aX-bY$$

aufgehen. Da aber c und d nothwendig relative Primzahlen sein müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, offenbar a, b, c nicht relative Primzahlen sein würden, wie doch vorausgesetzt wurde, so muss nach einem allgemein bekannten Satze d in Z aufgehen, und daher $\frac{Z}{d}$ eine ganze Zahl sein. Weil d der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b ist, so sind $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen, und die Gleichung des ersten Grades

$$\frac{a}{d}V-\frac{b}{d}U=\frac{Z}{d}$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U und V, oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$3)\quad Z=aV-bU,$$

ist also bekanntlich immer in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U und V immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen. Eliminirt man nun Z aus den beiden Gleichungen 2) und 3), so erhält man die Gleichung

$$a(X+cV)=b(cU-Y)$$

oder

$$4)\quad \frac{a}{d}(X+cV)=\frac{b}{d}(cU-Y),$$

wo $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ relative Primzahlen sind. Daher muss nach dem schon oben angewandten Satze $\frac{b}{d}$, welches in dem Producte $\frac{a}{d}(X+cV)$ aufgeht, in $X+cV$ aufgehen, und man kann folglich, wenn G eine ganze Zahl bezeichnet,

$$5)\quad X+cV=\frac{b}{d}G$$

setzen. Führt man aber diesen Werth von $X+cV$ in die Gleichung 4) ein, so erhält man auf der Stelle ferner

$$6)\quad cU-Y=\frac{a}{d}G.$$

Digitized by Google

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergiebt sich

$$7)\quad X=\frac{b}{d}G-cV,\ Y=cU-\frac{a}{d}G.$$

Da nach dem Obigen c und d relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung des ersten Grades

$$8)\quad dU'-cV'=G$$

zwischen den beiden unbekannten Grössen U' und V' bekanntlich in ganzen Zahlen auflösbar, d. h. es lassen sich für U' und V' immer ganze Zahlen finden, welche dieser Gleichung genügen; und führt man nun den Werth von G aus 8) in die Gleichungen 7) ein, so erhält man:

$$9)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU'. \end{cases}$$

Ueberlegt man jetzt noch, dass sich die Gleichung 3) offenbar auch auf den folgenden Ausdruck bringen lässt:

$$Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'),$$

so hat man für die Grössen X, Y, Z die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad \begin{cases} X=bU'-c(V+\frac{b}{d}V'), \\ Y=c(U+\frac{a}{d}V')-aU', \\ Z=a(V+\frac{b}{d}V')-b(U+\frac{a}{d}V'). \end{cases}$$

Vergleicht man aber diese Formeln mit den Formeln 1), so ergiebt sich, dass die letzteren aus den ersteren hervorgehen, wenn man

$$u=U+\frac{a}{d}V',\ v=V+\frac{b}{d}V',\ w=U'$$

setzt, und dass jede beliebige durch das System X, Y, Z dargestellte Auflösung der Gleichung

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen aus den allgemeinen Formeln 1) erhalten wird, wenn man nur für u, v, w in diesen Formeln gewisse ganze Zahlen setzt, wie behauptet wurde.

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn das System x_0, y_0, z_0 irgend eine bestimmte Auflösung der Gleichung

Digitized by Google

$$ax+by+cz=0$$

in ganzen Zahlen darbietet, die allgemeinen Werthe von x, y, z, welche diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösen, auch unter der Form

$$(1)\quad \begin{cases} x=x_0+bw-cv, \\ y=y_0+cu-aw, \\ z=z_0+av-bu \end{cases}$$

dargestellt werden können.

XXXIV.

Ueber die Cycloide als Brachystochrone.

Von

dem Herausgeber.

Bei Vorträgen über die höhere Mechanik wird man ausser der Kenntniss der Differentialrechnung und der Integralrechnung, welche natürlich unerlässlich ist, bei allen Zuhörern nicht immer auch die Kenntniss der Variationsrechnung voraussetzen können. Und wenn nun auch allerdings die Aufgabe von der Brachystochrone *) ein recht eigentlich dieser letzteren Wissenschaft angehörendes Problem ist, so scheint es aus dem angegebenen Grunde und wegen des grossen Interesses der Aufgabe an sich, doch wünschenswerth, im Besitz einer die Anwendung der Variationsrechnung nicht in Anspruch nehmenden Auflösung derselben zu sein, die ich daher im Folgenden zu geben versuchen werde, wobei ich aber bemerken muss, dass diese Auflösung wenigstens in Rücksicht des ihr vorzüglich zum Grunde liegenden Princips mit der von Jacob Bernoulli gegebenen Auflösung nahe verwandt ist.

*) Wir betrachten hier nur den Fall einer Bewegung im luftleeren Raume oder überhaupt in einem nicht widerstehenden Mittel.

Digitized by Google

Die Aufgabe selbst kann auf folgende Art ausgesprochen werden:

*Wenn A und B in Taf. V. Fig. 4. zwei gegebene Punkte sind, so soll man die diese beiden Punkte mit einander verbindende Curve von einfacher Krümmung *) bestimmen, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt.*

Die Auflösung dieser interessanten Aufgabe, welche wir im Folgenden geben werden, gründet sich vorzüglich auf das folgende Prinzip.

Wenn die in der Figur verzeichnete Curve AB die gesuchte ist, auf welcher also ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt, so wird auch jedes Stück ab dieser Curve von dem schweren Punkte, welcher in a mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen. Gäbe es nämlich ein anderes Curvenstück acb, welches, dieselbe Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt, in einer kürzeren Zeit als ab durchlaufen würde, so würde doch bB noch in derselben Zeit durchlaufen werden, weil nach einem aus der Mechanik bekannten Satze die in dem Punkte b erlangte Geschwindigkeit des sich bewegenden schweren Punktes dieselbe ist, dieser Punkt mag sich auf ab oder auf acb bewegen, indem diese Geschwindigkeit bekanntlich bloss von der vertikalen Entfernung der beiden Punkte A und b von einander abhängt, welche in beiden Fällen dieselbe ist. Also würde offenbar der schwere Punkt auf dem Wege $AacbB$ in einer kürzeren Zeit als auf dem Wege $AabB$ oder AB von A bis B gelangen, was gegen die Voraussetzung streitet, wodurch folglich unsere obige Behauptung gerechtfertigt ist.

Ferner gründet sich unsere Auflösung der Aufgabe von der Brachystochrone noch auf das folgende Problem, welches wir daher vorher auflösen müssen.

In Taf. V. Fig. 5. sei CD eine gegebene gerade Linie, und M und N seien zwei auf verschiedenen Seiten derselben liegende gegebene Punkte. Man soll in der Linie CD den Punkt P so bestimmen, dass, wenn man die Linien MP und NP zieht, und a und b zwei gegebene Zahlen bezeichnen, die Grösse

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ein Minimum werde.

Von M und N fälle man auf CD die Perpendikel MM' und und NN', und setze als gegebene Grössen $MM'=m$, $NN'=n$ und $M'N'=e$. Ferner bezeichne man die, jenachdem der Punkt P von M' aus nach N' oder nach der entgegengesetzten Seite hin liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des Punktes P von dem Punkte M' durch x, so ist

$$MP=\sqrt{m^2+x^2},\quad NP=\sqrt{n^2+(e-x)^2},$$

---

*) Diese Bedingung ist hier absichtlich gemacht worden.

Digitized by Google

und folglich, wenn wir

$$y=\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

setzen:

$$y=\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{a}+\frac{\sqrt{n^2+(e-x)^2}}{b}.$$

Entwickeln wir nun den ersten Differentialquotienten dieser Grösse, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a\sqrt{m^2+x^2}}-\frac{e-x}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}},$$

woraus sich als gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums die Gleichung

$$\frac{x}{a\sqrt{m^2+x^2}}=\frac{e-x}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}}$$

ergiebt.

Weil hiernach

$$\frac{x}{e-x}=\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b\sqrt{n^2+(e-x)^2}}$$

ist, so ist

$$\frac{x}{e-x}$$

stets eine positive Grösse, und x und $e-x$ haben daher immer gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass stets x positiv und $x<e$ ist, folglich der Punkt P immer zwischen M' und N' liegt.

Entwickeln wir den zweiten Differentialquotienten von y, so erhalten wir

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m^2}{a(m^2+x^2)\sqrt{m^2+x^2}}+\frac{n^2}{b(n^2+(e-x)^2)\sqrt{n^2+(e-x)^2}},$$

welches offenbar immer eine positive Grösse und daher die Bedingung des Minimums erfüllt ist.

Da offenbar

$$MP=\sqrt{m^2+x^2},\ NP=\sqrt{n^2+(e-x)^2}:$$
$$M'P=x,\ N'P=e-x$$

ist; so ist nach dem Obigen

Digitized by Google

$$\frac{M'P}{a.MP}=\frac{N'P}{b.NP}$$

die Bedingung des Minimums. Bezeichnen wir aber die Winkel MPM' und NPN' respective durch α und β, so ist

$$M'P=MP.\cos\alpha,\ N'P=NP.\cos\beta;$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}$$

oder

$$\cos\alpha:\cos\beta=a:b$$

die Bedingung des Minimums.

Bezeichnen a und b die Geschwindigkeiten, mit denen ein Punkt auf MP und NP sich gleichförmig bewegt, so sind $\frac{MP}{a}$ und $\frac{NP}{b}$ die Zeiten, in denen die Wege MP und NP zurückgelegt werden, und

$$\frac{MP}{a}+\frac{NP}{b}$$

ist folglich die Zeit, in welcher der Weg MPN zurückgelegt wird. Daher ergiebt sich aus dem Vorhergehenden der folgende Satz:

Wenn ein Punkt in den Linien MP und NP mit den Geschwindigkeiten a und b sich gleichförmig bewegt und der Punkt P in CD eine solche Lage haben soll, dass unter dieser Voraussetzung der sich bewegende Punkt auf dem Wege MPN in der kürzesten Zeit von M nach N gelangt; so müssen die Cosinus der Winkel MPD und NPC sich wie die Geschwindigkeiten a und b in den Linien MP und NP verhalten,

Hiervon lässt sich nun die folgende Anwendung auf die Bestimmung der Brachystochrone für den Fall schwerer Punkte machen.

Die Curve AB in Taf. V. Fig. 6. (M. vergl. Taf. V. Fig. 4.) denke man sich in eine so grosse gerade Anzahl so kleiner Theile getheilt, dass man ohne merklichen Fehler jedes dieser Theilchen als eine gerade Linie und die Bewegung in einem jeden derselben als gleichförmig betrachten kann. Durch den Punkt A und alle Theilpunkte denke man sich horizontale Linien gezogen, und bezeichne die Neigungswinkel der geradlinigen Elemente

$$Ab_1,\ b_1b_2,\ b_2b_3,\ b_3b_4,\ b_4b_5,\ \ldots.$$

gegen diese horizontalen Linien respective durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

Digitized by Google

Denken wir uns dann ferner durch alle Theilpunkte die vertikalen Linien

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4,\ a_5b_5,\ \ldots.$$

gezogen, so sind nach bekannten Sätzen die durch den Fall auf AB in

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \ldots.$$

erlangten Geschwindigkeiten respective:

$$2\sqrt{g.a_1b_1},\ 2\sqrt{g.a_2b_2},\ 2\sqrt{g.a_3b_3},\ 2\sqrt{g.a_4b_4},\ \ldots.;$$

wo g seine bekannte Bedeutung hat.

Nach dem oben zuerst ausgesprochenen Princip gelangt der schwere Punkt auf der Curve AB mit der in dem $n$ten und $(n+1)$sten Theilpunkte erlangten Geschwindigkeit in der kürzesten Zeit von dem $n$ten bis zum $(n+2)$ten Theilpunkte, und wir haben daher nach dem oben bewiesenen Satze in den vorher eingeführten Bezeichnungen offenbar die folgenden Proportionen:

$$\cos\alpha : \cos\alpha_1 = 0 : 2\sqrt{g.a_1b_1} = 0 : \sqrt{a_1b_1},$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 = 2\sqrt{g.a_1b_1} : 2\sqrt{g.a_2b_2} = \sqrt{a_1b_1} : \sqrt{a_2b_2},$$

$$\cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = 2\sqrt{g.a_2b_2} : 2\sqrt{g.a_3b_3} = \sqrt{a_2b_2} : \sqrt{a_3b_3},$$

$$\cos\alpha_3 : \cos\alpha_4 = 2\sqrt{g.a_3b_3} : 2\sqrt{g.a_4b_4} = \sqrt{a_3b_3} : \sqrt{a_4b_4},$$

u. s. w.

Da nun die einzelnen Elemente der Curve mit den entsprechenden Berührenden derselben als zusammenfallend betrachtet werden können, so sind offenbar

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

die von den Berührenden der Curve in den Punkten

$$A,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots.$$

mit der durch A gezogenen horizontalen Linie AC, welche wir als den positiven Theil der Abscissenaxe und A also als den Anfang der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winkel; und wenn wir nun überhaupt zwei dieser Winkel durch Θ, Θ' und die Ordinaten der entsprechenden Punkte der Curve durch y, y' bezeichnen, so erhellet aus dem Obigen unmittelbar die Richtigkeit der Proportion

$$\cos\Theta : \cos\Theta' = \sqrt{y} : \sqrt{y'}$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \frac{\cos\Theta'}{\sqrt{y'}},$$

Digitized by Google

woraus sich ergiebt, dass

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}$$

eine constante Grösse ist, die wir durch $\sqrt{a}$ bezeichnen, und daher

$$\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \sqrt{a}$$

setzen wollen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich mittelst leichter Rechnung

$$\text{tang}\,\Theta = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}},$$

und da nun nach den Principien der höheren Geometrie

$$\text{tang}\,\Theta = \frac{dy}{dx}$$

ist, so erhalten wir als Differentialgleichung unserer Curve die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}$$

oder

$$dx = dy\sqrt{\frac{ay}{1-ay}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$ay = \sin\omega^2,\ 1-ay = \cos\omega^2\ ^*),$$

so ist

$$dx = \text{tang}\,\omega\,.\,dy.$$

Weil aber

$$ady = 2\sin\omega\cos\omega\,d\omega$$

ist, so ist

$$dx = \frac{2}{a}\sin\omega^2\,d\omega,$$

---

*) Es ist hier absichtlich der vorhergehende Winkel Θ nicht weiter berücksichtigt und ω nur als eine Hülfsgrösse zur Erleichterung der Integration eingeführt worden.

Digitized by Google

und folglich

$$x = \frac{2}{a}\int \sin\omega^2\, d\omega + \text{Const.}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int \sin\omega^2\, d\omega &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int d\sin\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= \sin\omega \int \sin\omega\, d\omega - \int \cos\omega\, d\omega \int \sin\omega\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int \cos\omega^2\, d\omega \\ &= -\sin\omega\cos\omega + \int (1-\sin\omega^2)\, d\omega \\ &= \omega - \sin\omega\cos\omega - \int \sin\omega^2\, d\omega,\end{aligned}$$

also

$$\int \sin\omega^2\, d\omega = \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin\omega\cos\omega,$$

und folglich

$$x = \frac{1}{a}(\omega - \sin\omega\cos\omega) + \text{Const.}$$

Also ist

$$\begin{aligned} ax &= \omega - \sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ ay &= \sin\omega^2; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2ax &= 2\omega - 2\sin\omega\cos\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 2\sin\omega^2; \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} 2ax &= 2\omega - \sin 2\omega + \text{Const.}, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega. \end{aligned}$$

Für $y=0$ ist nach dem Obigen offenbar auch $x=0$. Für $y=0$ ist aber

$$1 - \cos 2\omega = 0 \text{ oder } \cos 2\omega = 1,$$

und folglich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $2\omega = 2k\pi$. Also ist nach dem Obigen

$$0 = 2k\pi - \sin 2k\pi + \text{Const.} = 2k\pi + \text{Const.},$$

d. i. $\text{Const.} = -2k\pi$, und folglich

$$\begin{aligned} 2ax &= 2\omega - 2k\pi - \sin 2\omega, \\ 2ay &= 1 - \cos 2\omega. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\sin(2\omega - 2k\pi) = \sin 2\omega, \quad \cos(2\omega - 2k\pi) = \cos 2\omega.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$2ax = 2\omega - 2k\pi - \sin(2\omega - 2k\pi),$$
$$2ay = 1 - \cos(2\omega - 2k\pi);$$

und folglich, wenn man überhaupt

$$\varphi = 2\omega - 2k\pi$$

setzt:

$$2ax = \varphi - \sin\varphi, \quad 2ay = 1 - \cos\varphi;$$

oder für $\frac{1}{2a} = r$:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Im Anfange der Bewegung müssen x und y beide zugleich verschwinden, welches offenbar nur für $\varphi = 0$ möglich ist, da nur für diesen Werth von φ die Differenz $\varphi - \sin\varphi = 0$, d. i. $\sin\varphi = \varphi$ sein kann. Also hat man für den Anfang der Bewegung $\varphi = 0$ zu setzen. Wollte man φ negativ nehmen, so würde, weil der absolute Werth von φ immer grösser als der absolute Werth von $\sin\varphi$ ist, x negativ, da doch im Obigen x als positiv angenommen worden ist. Folglich muss man φ von 0 an zunehmen, nicht von 0 an abnehmen lassen, woraus sich wegen der Gleichungen

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi)$$

nun unmittelbar auf ganz unzweideutige Weise ergiebt, dass die gesuchte Curve eine gemeine Cycloide ist, deren erzeugender Kreis den Halbmesser $r = \frac{1}{2a}$ hat.

Wegen der aus dem Obigen sich ganz von selbst ergebenden wichtigen und merkwürdigen mechanischen Eigenschaft der gemeinen Cycloide nennt man dieselbe bekanntlich die Brachystochrone im luftleeren Raume.

Digitized by Google

XXXV.

Sur les fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

1.

Dans beaucoup de recherches analytiques il importe de décomposer une fonction rationelle et fractionnaire en fractions partielles, et, réciproquement, de réduire une somme de fractions partielles à une fonction fractionnaire. — Pour résoudre ce double problème dans toute sa généralité, nous désignons par F_x une fonction entière de x du degré n. Soient $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x. Alors, en supposant que cette équation contienne n_1 racines égales r_1, n_2 racines égales r_2, etc., on aura

$$F_x = A(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou, en prenant le coefficient constant A égal à l'unité,

$$F_x = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}. \tag{1}$$

Soient encore f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ des fonctions de x, liées entre elles et à la fonction F_x par l'équation

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}. \tag{2}$$

Cela fait, on pourra toujours satisfaire à l'équation (2), en supposant les fonctions f_x, $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, $\ldots P_{x,m}$ entières par rapport à

Digitized by Google

x, et, respectivement, d'un degré inférieur à n, n_1, n_2, ... n_m. En effet, si l'on pose

$$(3) \qquad F_x = (x-r_k)^{n_k} Q_{x,k},$$

k étant un des nombres entiers $1, 2, \ldots m$, la fonction $Q_{x,k}$ sera entière par rapport à x du degré $n-n_k$, et le facteur $x-r_k$ n'y entrera pas. D'ailleurs on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

d'où l'on déduit

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k} \frac{F_x}{(x-r_k)^{n_k}},$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$f_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} P_{x,k}\, Q_{x,k},$$

ou

$$(4) \qquad f_x = P_{x,1}\, Q_{x,1} + P_{x,2}\, Q_{x,2} + \ldots + P_{x,m}\, Q_{x,m}.$$

Or, $Q_{x,k}$ étant du degré $n-n_k$, il suit que $P_{x,k}\, Q_{x,k}$ sera d'un degré inférieur à n, lorsqu'on suppose la fonction $P_{x,k}$ entière par rapport à x d'un degré inférieur à n_k. On voit donc que l'équation (4), ou l'équation (2), d'où elle est déduite, admet la supposition que les fonctions f_x et $P_{x,k}$ soient entières par rapport à x d'un degré inférieur à n et n_k, ensorte que l'on pourra faire

$$(5) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(6) \qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(7) \qquad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que, pour le problème de la composition, il s'agit de trouver les coefficients a_0, a_1, ... a_n et b_0, b_1, ... b_{n-1}, lorsque les quantités r_1, r_2, ... r_m et les fonctions $P_{x,1}$, $P_{x,2}$, ... $P_{x,m}$ sont données; et, pour la décomposition, de trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, ... $c_{n_k-1,k}$, lorsque les fonctions f_x et F_x sont données. — Commençons par la décomposition.

II.

En posant pour une fonction quelconque φ_x

$$\frac{d^n \varphi_x}{dx^n} = \partial_x^n \varphi_x,$$

Digitized by Google

les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, etc. de l'équation (7) I. sont exprimés, d'après le théorème de Taylor, par l'équation

$$(1) \qquad c_{h,k} = \frac{1}{h!}\partial_{r_k}^{h} P_{r_k,k},$$

dans la quelle, pour abréger, on a désigné le produit $1.2\ldots h$ par $h!$, h étant un nombre entier et positif. Donc, pour trouver les coefficients $c_{0,k}$, $c_{1,k}$, etc., il suffit de connaitre la fonction $P_{r_k,k}$, valeur particulière de la fonction $P_{x,k}$. Or on déduit de l'équation (2) I. jointe à l'équation (3) I.:

$$\frac{f_x}{Q_{x,k}} = (x-r_k)^{n_k}\left\{\frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}\right\},$$

équation qui, par la supposition $x=r_k$, se réduit à

$$(2) \qquad \frac{f_{r_k}}{Q_{r_k,k}} = P_{r_k,k}.$$

Pour exprimer $Q_{r_k,k}$ en F_{r_k}, on differentie l'équation (3) I. n_k fois par rapport à x, ce qui donne

$$\partial_x^{n_k} F_x = \partial_x^{n_k} Q_{x,k}\,(x-r_k)^{n_k};$$

puis on applique au second membre de cette équation la formule connue

$$\partial_x^{n}\varphi_x\psi_x = \overset{0}{\partial}_x^{n}\varphi_x\,\partial_x^{n}\psi_x + \overset{1}{(n)}\,\partial_x\varphi_x\partial_x^{n-1}\psi_x + \overset{2}{(n)}\,\partial_x^{2}\varphi_x\partial_x^{n-2}\psi_x + \ldots + \partial_x^{n}\varphi_x\overset{0}{\partial}_x\psi_x$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad \partial_x^{n}\varphi_x\psi_x = \sum_{h=0}^{h=n+1} \overset{h}{(n)}\,\partial_x^{h}\varphi_x\,\partial_x^{n-h}\psi_x,$$

$\overset{h}{(n)}$ étant déterminé par l'équation

$$\overset{h}{(n)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-h+1)}{1.2\ldots h},$$

ou, lorsque n est un nombre entier et positif,

$$(4) \qquad \overset{h}{(n)} = \frac{n!}{h!\,(n-h)!}.$$

On trouvera par suite à l'aide de la formule (3)

$$\partial_x^{n_k} F_x = \sum_{h=0}^{h=n_k+1} \overset{h}{(n_k)}\,\partial_x^{h} Q_{x,k}\,\partial_x^{n_k-h}(x-r_k)^{n_k},$$

et, puisqu'on a

Digitized by Google

$$\partial_x^{n_k-h}(x-r_k)^{n_k} = \frac{n_k!}{h!}(x-r_k)^h,$$

la précédente se change en

$$\partial_x^{n_k} F_x = \sum_{h=0}^{h=n_k+1} (n_k)^h \frac{n_k!}{h!}(x-r_k)^h \partial_x^h Q_{x,k},$$

d'où l'on tire, en faisant $x=r_k$,

$$\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k} = n_k!\ Q_{r_k,k}. \tag{5}$$

En éliminant $Q_{r_k,k}$ entre les équations (2) et (5), il viendra

$$Q_{r_k,k} = n_k!\ \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}, \tag{6}$$

et par conséquent l'équation (1) se réduit à

$$c_{h,k} = \frac{n_k!}{h!}\partial_{r_k}^h \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}. \tag{7}$$

Par cette équation on trouve les coefficients $c_{0,k}$. $c_{1,k}$, etc., lorsque les fonctions f_x et F_x sont données. Il résulte donc de l'analyse précédente le théorème suivant.

Théorème I. Soit F_x une fonction rationnelle et entière de x, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x.

Soit f_x une fonction rationnelle et entière de x d'un degré inférieur à celui de F_x.

Soit enfin, pour abréger,

$$c_{h,k} = \frac{n_k!}{h!}\partial_{r_k}^h \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}$$

et

$$P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

Digitized by Google

On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}}.$$

On peut donner au théorème I. un autre énoncé par la considération suivante.

Soit U_x une fonction entière de x du degré n. On aura

$$U_x = \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{(x-r)^h}{h!}\, \partial_r^h\, U_r,$$

r étant une quantité quelconque. En mettant la précédente sous la forme

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!} \frac{\partial_r^h\, U_r}{(x-r)^{n+1-h}},$$

et observant que, pour un nombre entier et positif p, on a

$$\frac{1}{(x-r)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\, \partial_r^{p-1}\, \frac{1}{x-r},$$

il viendra

$$U_x = (x-r)^{n+1} \sum_{h=0}^{h=n+1} \frac{1}{h!\,(n-h)!}\, \partial_r^h\, U_r\, \partial_r^{n-h}\, \frac{1}{x-r},$$

équation qui, en vertu des formules (3) et (4), se réduit à

$$U_x = \frac{(x-r)^{n+1}}{n!}\, \partial_r^n\, \frac{U_x}{x-r}.$$

Or, cette équation subsistant pour toute fonction entière du degré n, quel que soit r, et $P_{x,k}$ étant du degré n_k-1, on aura pareillement

$$P_{x,k} = \frac{(x-r_k)^{n_k}}{(n_k-1)!}\, \partial_{r_k}^{n_k-1}\, \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où

$$\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = \frac{1}{(n_k-1)!}\, \partial_{r_k}^{n_k-1}\, \frac{P_{r_k,k}}{x-r_k}, \tag{8}$$

ou, en mettant au lieu de $P_{r_k,k}$ sa valeur tirée de l'équation (6)

$$\frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}} = n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{1}{x-r_k} \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \right\}.$$

Digitized by Google

Donc le théorème I. sera réduit au suivant.

Théorème II. Soient f_x et F_x les mêmes fonctions que dans le théor. I. Soit de plus, pour abréger,

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}},$$

k étant un nombre entier. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Maintenant il ne sera pas difficile d'étendre ces theorèmes au cas où la fonction f_x sera d'un degré supérieur à celui de F_x. Pour cela nous remarquons que, lorsqu'on pose

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x, \tag{9}$$

r_0 étant une quantité quelconque indépendante de x, et s un nombre entier et positif, on pourra prendre s assez grand pour que φ_x soit d'un degré supérieur à celui de f_x. Donc, si la fonction F_x est donnée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s) étant un nombre entier et positif, ou égal à zéro, si l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'aura pas une racine r_0, on aura, en vertu de l'équation (9),

$$\varphi_x = (x-r_0)^{n_0} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m}.$$

En appliquant le théorème II., on obtiendra

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_x}{x-r_k},$$

R_k étant déterminé par l'équation

$$R_k = n_k \frac{f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{f_x}{F_x} = (x-r_0)^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k}.$$

Digitized by Google

Or, r_0 étant une quantité quelconque, on peut faire

$$r_0 = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{f_x}{F_x} = x^s \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{R_k}{x-r_k},$$

ou, puisque les signes Σ et ∂ ne se rapportent pas à x et s,

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{x^s}{x-r_k}. \tag{10}$$

Mais on a

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + r_k^{s-1} + x r_k^{s-2} + \ldots + x^{s-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x^s}{x-r_k} = \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{h=0}^{h=s} x^h r_k^{s-1-h};$$

donc l'équation (10) se réduit à

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \left\{ \frac{r_k^s}{x-r_k} + \sum_{h=0}^{h=s} x^h r_k^{s-1-h} \right\}.$$

Cette analyse conduit au théorème suivant.

Théorème III. Soit f_x une fonction rationelle et entière de x du degré p.

Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré q, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s} (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

(n_0-s), n_1, n_2, $\ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et r_0, r_1, $\ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, ensorte que $n_0 - s = 0$, lorsque l'équation $F_x = 0$ n'aura pas une racine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire. liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x,$$

s étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire à la condition

$$s + q > p.$$

Digitized by Google

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k = n_k \frac{r_k^s f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}},$$

h et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Corollaire I. Si l'on a

$$q > p,$$

c'est-à-dire, si le degré de F_x est supérieur à celui de f_x, on satisfera à la condition

$$s + q > p,$$

en prenant $s = 0$: donc on reviendra au théor. II.

Corollaire II. Il sera souvent plus commode de séparer la partie correspondante à la quantité r_0 ou 0. Dans ce cas on trouvera

$$\frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\} + \sum_{h=0}^{h=n_0} \frac{n_0!}{h!} x^{s+h-n_0} \partial_{r_0}^h \frac{f_{r_0}}{\partial_{r_0}^{n_0} \varphi_{r_0}}.$$

Corollaire III. En posant

$$f_x = \psi_a + \frac{x-a}{1!} \partial_a \psi_a + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!} \partial_a^p \psi_a,$$

on aura pour une fonction quelconque ψ_x

$$\psi_x = f_x + \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

Donc, comme f_x est une fonction entière par rapport à x du degré p, on aura suivant le théor. III.

$$\frac{\psi_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\} + \frac{1}{F_x} \int_a^x \frac{(x-x')^p}{p!} \partial_{x'}^{p+1} \psi_{x'} \, dx'.$$

Digitized by Google

III.

D'après ce qui a été dit ci-dessus I., on a simultanément les équations

$$(1) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{P_{x,k}}{(x-r_k)^{n_k}},$$

$$(2) \qquad F_x = (x-r_1)^{n_1}\,(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

ou

$$(3) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$(4) \qquad f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

$$(5) \qquad P_{x,k} = c_{0,k} + c_{1,k}(x-r_k) + c_{2,k}(x-r_k)^2 + \ldots + c_{n_k-1,k}(x-r_k)^{n_k-1}.$$

De plus, en vertu de l'équation (8) II., on a

$$(6) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{x-r_k},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f_x}{F_x} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\left\{\frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\left[\frac{1}{r_k} + \frac{x}{r_k^2} + \frac{x^2}{r_k^3} + \ldots + \frac{x^{s-1}}{r_k^s}\right] + R\right\},$$

R étant déterminé par l'équation

$$R = \frac{P_{r_k,k}}{(n_k-1)!}\,\frac{\left(\frac{x}{r_k}\right)^s}{r_k - x},$$

et s étant un nombre entier et positif, qu'on peut faire accroître jusqu'à l'infini. Or on reconnaît que le reste R s'évanouit pour des valeurs infiniment grandes de s, toutes les fois que le module de x sera inférieur au module de la plus petite des racines r_k : dans ce cas on aura donc

$$(7) \qquad \frac{f_x}{F_x} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots,$$

en faisant, pour abréger,

$$(8) \qquad B_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}.$$

Il est évident que le second membre de l'équation (7) ne serait jamais convergent, lorsque parmi les racines r_k il y en aurait le zéro, sinon $P_{x,k}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n_k s'évanouissent

Digitized by Google

en même temps pour $x=0$. Mais on obvie à cet inconvénient par la séparation de la partie correspondante à cette racine, comme il a été remarqué dans le coroll. II. theor. III. En tout cas l'équation

$$f_x = F_x \{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots\}$$

subsiste, puisque les fonctions f_x et F_x sont entières par rapport à x. En mettant au lieu de F_x sa valeur de l'équation (3), il viendra

$$\begin{aligned} f_x = a_0 B_0 + a_0 B_1 x + a_0 B_2 x^2 + \ldots + a_0 B_h x^h + \ldots \\ + a_1 B_0 x + a_1 B_1 x^2 + \ldots + a_1 B_{h-1} x^h + \ldots \\ + a_2 B_0 x^2 + \ldots + a_2 B_{h-2} x^h + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_h B_0 x^h + \ldots \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette expression de f_x, comparée à celle de l'équation (4), conduit à

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_0 B_0, \\ b_1 = a_0 B_1 + a_1 B_0, \\ b_2 = a_0 B_2 + a_1 B_1 + a_2 B_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_h = a_0 B_h + a_1 B_{h-1} + a_2 B_{h-2} + \ldots + a_h B_0, \end{array} \right.$$

ou, s étant un nombre entier,

$$(10) \qquad b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s B_{h-s}.$$

On obtiendra une autre expression pour b_h de la manière suivante. D'abord on présente l'équation (3) sous la forme

$$(11) \qquad F_x = \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s x^s.$$

Ensuite on déduit de l'équation (2) non seulement

$$F_{r_k} = 0,$$

mais encore

$$\partial_{r_k}^p F_{r_k} = 0,$$

p étant un nombre entier et positif assujetti à la condition

$$p < n_k;$$

Digitized by Google

d'où il suit, eu égard à la formule (3) II.,

$$\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\,F_{r_k}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1}}=0.$$

En substituant à F_{r_k} sa valeur tirée de l'équation (11), on trouvera

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{s=0}^{s=n+1}\frac{a_s}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}\left\{a_s\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{1}{(n_k-1)!}\,\partial_{r_k}^{n_k-1}\frac{P_{r_k,k}}{r_k^{h+1-s}}\right\}=0,$$

et, suivant l'équation (8),

$$\sum_{s=0}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s}=0. \tag{12}$$

Enfin on conclut de la précédente

$$\sum_{s=0}^{s=h+1}a_s\,B_{h-s}=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s},$$

ce qui change l'équation (10) en

$$b_h=-\sum_{s=h+1}^{s=n+1}a_s\,B_{h-s}, \tag{13}$$

d'où l'on tire successivement

$$-\left\{\begin{array}{l}-b_{n-1}=a_n\,B_{-1},\\ -b_{n-2}=a_{n-1}\,B_{-1}+a_n\,B_{-2},\\ -b_{n-3}=a_{n-2}\,B_{-1}+a_{n-1}\,B_{-2}+a_n\,B_{-3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -b_{n-h}=a_{n-h+1}B_{-1}+a_{n-h+2}B_{-2}+a_{n-h+3}B_{-3}+\ldots+a_nB_{-h}.\end{array}\right. \tag{14}$$

Les formules (9) ou (14) peuvent servir à l'évaluation des coefficients $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$, lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et les sommes $B_0, B_1, B_2, \ldots B_{-1}, B_{-2}, B_{-3}, \ldots$ déterminées par l'équation (8), sont connus. Réciproquement on en déduit la valeur des sommes, et par suite les coefficients du développement

Digitized by Google

(7), lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$, c'est-à-dire les fonctions F_x et f_x, sont données. Il y a plus: les formules (9) ou (14) conduisent même à la détermination des coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$. En effet l'équation (8) jointe à l'équation (6) II. donne

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} f_{r_k}. \tag{15}$$

Supposons maintenant qu'entre les fonctions f_x et F_x il y ait la relation

$$f_x = \partial_x F_x, \tag{16}$$

et que, pour cette valeur particulière de f_x, B_{h-1} se change en A_h. On aura

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \left\{ \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k} F_{r_k} \right\}. \tag{17}$$

Or, la fonction F_x étant toujours représentée par l'équation (2) ou (3), il suit

$$\partial_{r_k}^{p} F_{r_k} = 0,$$

le nombre entier et positif p vérifiant la condition

$$p < n_k.$$

Donc, ayant égard à la formule (3) II., on déduit de l'équation (17)

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} \partial_{r_k}^{n_k-1} \partial_{r_k} F_{r_k},$$

ou

$$A_h = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, r_k^{-h}. \tag{18}$$

Ajoutons que pour ce cas-ci les formules (10) et (13) se réduisent à

$$b_h = \sum_{s=0}^{s=h+1} a_s \, A_{h+1-s}, \quad b_h = -\sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s \, A_{h+1-s},$$

d'où

$$b_{h-1} = \sum_{s=0}^{s=h} a_s \, A_{h-s}, \quad b_{h-1} = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s \, A_{h-s}, \tag{19}$$

et que de plus l'équation (16) jointe aux équations (3) et (4) établit entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ les relations

Digitized by Google

$$b_0 = a_1\,,\quad b_1 = 2\,a_2\,,\quad b_2 = 3\,a_3\,,\ \ldots\,.$$

en général

$$b_{h-1} = h a_h\,,$$

par la quelle les équations (19) deviendront

$$(20)\qquad h a_h = \sum_{s=0}^{s=h} a_s\, A_{h-s}\,,$$

$$(21)\qquad h a_h = -\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s\, A_{h-s}.$$

D'ailleurs on a

$$\sum_{s=h}^{s=n+1} a_s\, A_{h-s} = a_h\, A_0 + \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s\, A_{h-s}\,,$$

et de plus, en vertu des équations (20), (2) et (3),

$$-A_0 = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\,.$$

donc la formule (21) sera remplacée par

$$(22)\qquad (n-h)\, a_h = \sum_{s=h+1}^{s=n+1} a_s\, A_{s-h}.$$

On tire successivement de la formule (20)

$$(23)\quad \begin{cases} a_1 = a_0\, A_1\,, \\ 2\ a_2 = a_0\, A_2 + a_1\, A_1\,, \\ 3\ a_3 = a_0\, A_3 + a_1\, A_2 + a_2\, A_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\ a_h = a_0\, A_h + a_1\, A_{h-1} + a_2\, A_{h-2} + \ldots + a_{h-1}\, A_1\,; \end{cases}$$

et de la formule (22)

$$(34)\quad \begin{cases} a_{n-1} = a_n\, A_{-1}\,, \\ 2\ a_{n-2} = a_{n-1}\, A_{-1} + a_n\, A_{-2}\,, \\ 3\ a_{n-3} = a_{n-2}\, A_{-1} + a_{n-1}\, A_{-2} + a_n\, A_{-3}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h\ a_{n-h} = a_{n-h+1}\, A_{-1} + a_{n-h+2}\, A_{-2} + a_{n-h+3} A_{-3} + \ldots + a_n A_{-h}. \end{cases}$$

En prenant la différence des formules (20) et (21), on obtiendra encore

$$(25)\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1} a_s\, A_{h-s} = 0,$$

formule analogue à la formule (12).

Digitized by Google

Dans le formules (24), qui constituent le théorème de Girard *), le coefficient a_n reste indéterminé, de même que a_0 dans les formules (23). Mais si l'on fait $x=0$ dans les expressions F_x et $x^n F_{\frac{1}{x}}$, la comparaison des équations (2) et (3) donne

$$a_0 = (-1)^n r_1^{n_1} r_2^{n_2} \ldots r_m^{n_m}, \quad a_n = 1.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème IV. Soit

$$V_x = \frac{P_{x,1}}{(x-r_1)^{n_1}} + \frac{P_{x,2}}{(x-r_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{P_{x,m}}{(x-r_m)^{n_m}},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, dont la somme soit égale à n, et $P_{x,k}$ désignant, pour tout nombre entier et positif k, une fonction rationelle et entière de x d'un degré inferieur à n_k.

Soit, pour abréger,

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

et

$$f_x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ étant determinés par le système des formules (18), (26) et (23) ou (24), et les coefficients $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ par le système des formules (8) et (9) ou (14). On aura

$$V_x = \frac{f_x}{F_x}.$$

L'analyse précédente conduit encore à plusieurs conséquences, mais nous nous bornerons à signaler la suivante.

Concevons non seulement que la fonction f_x soit donnée, mais faisons actuellement

$$f_x = 1.$$

Alors on aura

$$b_0 = 1,$$
$$0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1},$$

*) Ce théorème, faussement attribué à Newton, appartient à Albert Girard, qui, 13 ans avant la naissance de Newton, en a donné l'énoncé dans un ouvrage dont voici le titre: Invention nouvelle en Algèbre, par Albert Girard, Mathématicien, à Amsterdam, chez G. Jansen Blaauw, 1629. — C'est M. J. de Gelder, prof. à Leyde, qui a fait cette remarque dans ses Wiskundige lessen, 2de Cursus, 2de uitgave, pag. 423.

Digitized by Google

et par suite les formules (14) donneront

$$0 = B_{-1} = B_{-2} = \ldots = B_{-(n-1)}.$$

Hâtons nous d'ajouter que pour ce cas l'équation (15) se réduit à

$$B_{h-1} = -\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{-h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}};$$

donc on aura le théorème suivant.

Théorème V. Soit F_x une fonction rationelle et entière de x du degré n, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_1)^{n_1} (x-r_2)^{n_2} \ldots (x-r_m)^{n_m},$$

$n_1, n_2, \ldots n_m$ étant des nombres entiers et positifs, et $r_1, r_2, \ldots r_m$ les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0$$

résolue par rapport à x.

Soit h un nombre entier et positif, vérifiant la condition

$$h < n-1.$$

On aura

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^{h}}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} = 0.$$

Digitized by Google

XXXVI.

Ein Theorem über Fakultäten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In dem 1sten Hefte des VIIten Theiles dieser Zeitschrift S. 204 habe ich einige Sätze angegeben, welche zur Auffindung der höheren Differentialquotienten sehr allgemeiner Funktionen dienen; so ist z. B.

$$\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx_n} = \frac{1}{x^n}\left\{A_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + A_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + A_3 x^{3\lambda} f'''(x^\lambda) + \ldots \right. \\ \left. \ldots + A_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right\} \quad (1)$$

wobei die Coeffizienten durch die Formel

$$A_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{ p_0 (p\lambda)_n - p_1 \overline{(p-1\lambda)}_n + p_2 \overline{(p-2\lambda)}_n - \ldots \right\} \quad (2)$$

bestimmt sind. Hiervon lässt sich eine sehr einfache Anwendung auf die Theorie der Fakultäten machen.

Sei nämlich $f(y) = y^{-\mu}$, so wird

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p \, \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p-1) y^{-\mu-p},$$

oder nach Vandermonde's Bezeichnung der Fakultäten

$$f^{(p)}(y) = (-1)^p [\mu]^p y^{-\mu-p}, \text{ folgl. } f^{(p)}(x^\lambda) = (-1)^p [\mu]^p (x^{-\lambda(\mu+p)}. \quad (3)$$

Ferner ist

$$f(x^\lambda) = x^{-\lambda\mu} \text{ und } \frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = (-1)^n [\lambda\mu]^n x^{-\lambda\mu-n}.$$

Digitized by Google

Substituiren wir diess für die linke Seite von (1) und auf der rechten Seite die aus (3) für $p=1, 2, \ldots n$ sich ergebenden derivirten Funktionen, so wird, nach Hebung von $x^{-\lambda\mu-n}$,

$$(-1)^n [\lambda\mu]^n = -A_1 [\mu]^1 + A_2 [\mu]^2 - A_3 [\mu]^3 + \ldots + (-1)^n A_n [\mu]^n,$$

oder bei umgekehrter Anordnung der Reihe

$$[\lambda\mu]^n = A_n [\mu]^n - A_{n-1} [\mu]^{n-1} + A_{n-2} [\mu]^{n-2} - \ldots \pm A_1 [\mu]^1. \quad (4)$$

Diese Gleichung lehrt die Fakultät der Wurzel $\lambda\mu$ durch die Fakultäten der Wurzel μ ausdrücken und dürfte in dieser Allgemeinheit einen nicht unwichtigen Beitrag zur Fakultätentheorie bilden.

In manchen speziellen Fällen kann man die endliche Reihe in (2), welche zur Bestimmung der Coeffizienten A dient, summiren; so findet man z. B.

1) für $\lambda=-1$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} \cdot (-1)^n (n-1)_q = (-1)^n (n-1)(n-2)\ldots(n-q) \cdot n_q,$$

folglich nach Nro. (4):

$$(\lambda)^n [-\mu]^n = [\mu]^n - (n-1) \cdot n_1 [\mu]^{n-1} + (n-1)(n-2) \cdot n_2 [\mu]^{n-2} - \ldots; \quad (5)$$

2) für $\lambda=2$:

$$A_{n-q} = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-q)} (n-q)_q 2^{n-2q} = (q+1)(q+2)\ldots(2q) \cdot n_{2q} 2^{n-2q},$$

und daher nach Nro. (4):

$$\frac{1}{2^n} [2\mu]^n = [\mu]^n - \frac{2 \cdot n_2}{2^2} [\mu]^{n-1} + \frac{3.4 \cdot n_4}{2^4} [\mu]^{n-2} - \ldots, \quad (6)$$

3) für $\lambda=\frac{1}{2}$:

$$A_{n-q} = \frac{(-1)^q}{2^n} \cdot \frac{(n+q-1)(n+q-2)\ldots(n-q)}{2.4.6\ldots(2q)},$$

und mithin

$$2^n [\tfrac{1}{2}\mu]^n = [\mu]^n + \frac{n(n-1)}{2} [\mu]^{n-1} + \frac{(n+1)\ldots(n-2)}{2.4} [\mu]^{n-2} + \ldots. \quad (7)$$

Man kann diese Sätze auch in etwas anderer Form darstellen, wenn man mit Crelle folgendermassen bezeichnet:

$$\mu(\mu \pm \delta)(\mu \pm 2\delta)\ldots(\mu \pm \overline{n-1}\,\delta) = (\mu, \pm\delta)^n.$$

Digitized by Google

Es ergiebt sich dann leicht aus (5), (6) und (7):

$$\left.\begin{aligned}(\mu,-1)^n = (\mu,+1)^n - (n-1)\,.\,n_1\,(\mu,+1)^{n-1} \\ + (n-1)(n-2)\,.\,n_2\,(\mu,+1)^{n-2} - \ldots.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$(\mu,+\tfrac{1}{2})^n = (\mu,+1)^n - \frac{2\,.\,n_2}{2^2}(\mu,+1)^{n-1} + \frac{3\,.\,4\,.\,n_4}{2^4}(\mu,+1)^{n-2} - \ldots \quad (9$$

$$\left.\begin{aligned}(\mu,+2)^n = (\mu,+1)^n + \frac{n(n-1)}{2}(\mu,+1)^{n-1} \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}(\mu,+1)^{n-2} + \ldots.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Der letzte Satz hängt sehr genau mit dem Theoreme über die Gamma-Funktionen zusammen, welches ich im 6ten Theile des Archivs. S. 218. Formel (10) bewiesen habe.

XXXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Divisionsexempel.

Divisor: $1 \pm ax$,
Dividendus: $1 \mp x + (1-2a)x^2 \pm a(1-a+a^2)x^3$,
Quotient: $1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$.

Man soll untersuchen, ob die quadratische Gleichung

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2 = 0$$

reelle oder imaginäre Wurzeln hat, und zugleich die Grösse

$$1 \mp (1+a)x + (1-a+a^2)x^2$$

in zwei reelle oder imaginäre Factoren des ersten Grades zerlegen.

Digitized by Google

Divisionsexempel.

Divisor: $1-(a+x)$,

Dividendus: $(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2-x^3$,

Quotient: $\{1+(a+x)\}^2$.

Man hat nämlich immer die Gleichung

$$(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2+x^3$$
$$=\{1+(a+x)\}\{1-(a+x)^2\}=\{1-(a+x)\}\{1+(a+x)\}^2.$$

XXXVIII.

Miscellen.

Die verschiedenen Auflösungen der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem Herrn Doctor Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

Die älteren Methoden der Auflösung biquadratischer Gleichungen von Descartes und Euler, so wie die neueste von Ampère (Archiv. Thl. I. S. 16.), stehen ziemlich unverbunden neben einander. Wie aber leicht zu sehen, ist Ampère's Auflösung nur eine Modification der Auflösung von Descartes, und die Vermeidung der Methode der unbestimmten Coefficienten ist nur scheinbar, da dieselbe der gewöhnlichen elementaren Herleitung des Zusammenhanges der Coefficienten der Gleichung und der Combinationen ihrer Wurzeln zum Grunde liegt.

Dagegen ist Euler's Auflösung die reine Umkehrung der Cartesischen; denn Euler geht von dem Punkte aus, zu welchem man durch eine vollständige Durchführung des Verfahrens von Descartes gelangt.

Um nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$1) \qquad x^4+px^2+qx+r=0$$

zu finden, setzt man nach Descartes

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2-2ax+b)(x^2+2ax+c),$$

sucht a, b, c durch p, q, r auszudrücken, und löst dann die Gleichungen

Digitized by Google

$$2)\quad \begin{cases} x^2-2ax+b=0, \\ x^2+2ax+c=0. \end{cases}$$

Die Coefficienten a, b, c erhält man durch Auflösung der Gleichungen

$$b+c-4a^2=p,\ 2a(b-c)=q,\ bc=r,$$

aus denen sich die folgenden ergeben:

$$3)\quad b=\tfrac{1}{2}(p+4a^2+\frac{q}{2a}),\quad 4)\quad c=\tfrac{1}{2}(p+4a^2-\frac{q}{2a}),$$

$$5)\quad a^6+\frac{p}{2}a^4+(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4})a^2-\frac{q^2}{64}=0.$$

Bezeichnet man a^2 mit y, so hat man die kubische Hülfsgleichung

$$6)\quad y^3+\frac{p}{2}y^2+(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4})y-\frac{q^2}{64}=0.$$

Nach Auflösung derselben ist a bekannt, wie auch b und c, und man erhält durch Auflösung der quadratischen Gleichungen (2)

$$7)\quad x=a\pm\sqrt{a^2-b},\ x=-a\pm\sqrt{a^2-c},$$

oder mit Benutzung von (3) und (4)

$$8)\quad \begin{cases} x=a\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-a^2-\frac{q}{4a}}, \\ x=-a\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p-a^2+\frac{q}{4a}}; \end{cases}$$

wobei es offenbar gleichgültig ist, ob man $a=+\sqrt{y_1}$ oder $a=-\sqrt{y_1}$ setzt, wenn y_1 eine beliebige von den drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung bezeichnet. Die Formen der Wurzeln (8) nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man statt der Coefficienten p und q der ursprünglichen Gleichung die sämmtlichen drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung aufnimmt. Es seien diese nämlich y_1, y_2, y_3; dann ist

$$9)\quad -\frac{p}{2}=y_1+y_2+y_3;\ \frac{q^2}{64}=y_1y_2y_3.$$

Wenn also q eine positive Zahl ist, dann ist

$$10)\quad \frac{q}{8}=\sqrt{y_1}\,.\,\sqrt{y_2}\,.\,\sqrt{y_3};$$

und wenn q eine negative Zahl ist, so hat man

$$11)\quad \frac{q}{8}=-\sqrt{y_1}\,.\,\sqrt{y_2}\,.\,\sqrt{y_3},$$

Digitized by Google

wo jede Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Für a^2 setzen wir y_1, also $\sqrt{y_1}$ für a. Dann sind, wenn q positiv, unsere Wurzeln (8):

$$12)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2 + y_3 - 2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}, \\ x = -\sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2 + y_3 + 2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}; \end{cases}$$

das ist

$$13)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x = \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}. \end{cases}$$

Im zweiten Falle dagegen, wenn in der ursprünglichen Gleichung q eine negative Zahl bedeutet, sind unsere Wurzeln (8):

$$14)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2 + y_3 + 2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}, \\ x = -\sqrt{y_1} \pm \sqrt{(y_2 + y_3 - 2\sqrt{y_2}\sqrt{y_3})}; \end{cases}$$

das ist

$$13)\quad \begin{cases} x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}, \\ x = \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}, \\ x = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}. \end{cases}$$

Wir haben also in (13) und (15) Euler's Formeln als Endresultat gewonnen, sind mithin in den vollständigen Besitz aller Vortheile gelangt, welche Euler's Methode darbietet, ohne nöthig zu haben, von der etwas künstlichen Voraussetzung auszugehen, dass unsere biquadratische Gleichung Wurzeln von der Form

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$$

habe, ohne ferner die künstliche Herleitung der kubischen Hülfsgleichung nach Euler für die ohne Vergleich einfachere und natürlichere nach Descartes aufnehmen zu müssen.

Die Aufnahme aller drei Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung in die Formeln (8) ist nichts als eine durch die Nothwendigkeit gebotene ganz natürliche Beseitigung des Bedenkens, ob denn auch für die Wurzeln dieselben Werthe kommen möchten, wenn man eine beliebige Wurzel der Hülfsgleichung substituirt. Dies Bedenken beschwichtigt man gewöhnlich dadurch, dass man auf die eine, stets vorhandene, positive Wurzel der kubischen Hülfsgleichung den Accent legt.

Digitized by Google

XXXIX.

Entwickelung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen der zweiten Ordnung.

Von dem
Herrn Doctor J. R. Boyman,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Malmedy.

Bezeichne $z = f(x, y)$ die allgemeine Gleichung der Rotationskörper, bezogen auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axe der Z zugleich Rotationsaxe; seien $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung, und sei γ der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltene Winkel, den die Loxodrome mit dem Meridian oder der Directrix bildet: so ist die allgemeine Differentialgleichung der Wendelflächen der Rotationskörper, wie sie in der Abhandlung des Verfassers „De lineis loxodromicis etc. Berolini. 1839." entwickelt ist, folgende:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \operatorname{tang}\gamma \cdot \left[y+y\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+x\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\right]}{y\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \operatorname{tang}\gamma \cdot \left[x+x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\right]} \quad \ldots(1)$$

welche in Verbindung mit der Gleichung des gegebenen Rotationskörpers die entsprechende loxodromische Linie bestimmt.

Aus dieser Gleichung wollen wir im Folgenden die Gleichungen der Loxodromen auf den Rotationskörpern des zweiten Grades ableiten.

Digitized by Google

I. Cylindrische und Konische Loxodrome.

Der Rotationscylinder und der Rotationskegel sind dargestellt bezüglich durch folgende Gleichungen:

$$x^2+y^2=a^2\ldots(2);\quad x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots(3);$$

in welchen a für beide Körper den Radius der Grundfläche, und c für den Kegel die Coordinate des Scheitels bezeichnet. Die Gleichung des Kegels geht aber in die des Cylinders über, wenn man in derselben $c=\infty$ setzt. Daher wird es nicht nöthig sein, die Loxodromen beider Körper unmittelbar zu suchen, sondern es genügt, bloss die konische Loxodrome unmittelbar zu entwickeln, um sodann aus dieser die cylindrische Loxodrome abzuleiten. Indem wir so verfahren, schlagen wir nur den sachgemässen Weg ein.

Nehmen wir daher obige Gleichung des Kegels:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2\ldots\ldots(3)$$

und differentiiren dieselbe, so erhalten wir:

$$x\,dx+y\,dy=-\frac{a^2}{c^2}(c-z)\,dz\ldots\ldots(4)$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2(c-z)},\text{ und }\frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{a^2(c-z)};$$

Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung (1), so verwandelt sich dieselbe nach einigen Reductionen in folgende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\tang\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}y}{y+\tang\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}x},$$

welche Gleichung wir unter nachstehende Form bringen:

$$y\,dx-x\,dy=-\tang\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}(x\,dx+y\,dy).$$

Aus dieser erhält man nun, wenn man rechts den Werth in z aus Gleichung (4) substituirt und zum Zwecke der Integration durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c-z)^2$ auf den verschiedenen Seiten dividirt, folgende Integralgleichung:

$$\int\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\tang\gamma.(1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{c-z}.$$

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich ferner in x und z, so wie in y und z die beiden Gleichungen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}} = \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{c-z},$$

$$\int \frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}} = \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \int \frac{dz}{c-z}.$$

Nach Ausführung der angedeuteten Integration, wobei Const. $= \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log c$ gefunden wird, erhält man:

$$\text{Arc tang } \frac{x}{y} = \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z} \quad \ldots\ldots (5)$$

die Gleichung der Wendelfläche des Kegels, welche mit (3) verbunden die konische Loxodrome bestimmt; und

$$\left.\begin{aligned} \text{Arc sin } \frac{x}{v} &= \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z}, \\ \text{Arc cos } \frac{y}{v} &= \operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Kegelloxodrome bestimmt ist.

In anderer Form stellen diese Gleichungen sich also dar:

$$x = y \operatorname{tang}[\operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z}],$$

$$x = v \sin[\operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z}],$$

$$y = v \cos[\operatorname{tang}\gamma \cdot (1+\frac{c^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} \log \frac{c}{c-z}].$$

Setzen wir jetzt, um zu den Gleichungen der cylindrischen Loxodrome zu gelangen, in obigen Integralgleichungen $c=\infty$, so erhalten wir:

$$\int \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \operatorname{tang}\gamma \int \frac{dz}{a},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}} = \operatorname{tang}\gamma \int \frac{dz}{a},$$

$$\int \frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}} = \operatorname{tang}\gamma \int \frac{dz}{a};$$

und daher nach Ausführung der Integration:

$$\text{Arc tang } \frac{x}{y} = \operatorname{tang}\gamma \cdot \frac{z}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Digitized by Google

für die Gleichung der Wendelfläche des Cylinders, wodurch in Verbindung mit (2) die cylindrische Loxodrome bestimmt ist; und

$$\left.\begin{aligned} \text{Arc sin}\frac{x}{v} &= \text{tang}\,\gamma \cdot \frac{z}{a}, \\ \text{Arc cos}\frac{y}{v} &= \text{tang}\,\gamma \cdot \frac{z}{a} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche gemeinschaftlich ebenfalls die Cylinderloxodrome bestimmen.

Diese Gleichungen in anderer Form lauten:

$$x = y \,\text{tang}\,(\text{tang}\,\gamma \cdot \frac{z}{a}),$$

$$x = v \sin(\text{tang}\,\gamma \cdot \frac{z}{a}),$$

$$y = v \cos(\text{tang}\,\gamma \cdot \frac{z}{a}).$$

II. Sphärische und Sphäroidische Loxodrome.

Bekanntlich sind die Gleichungen der Kugel und des Sphäroids beziehungsweise folgende:

$$x^2 + y^2 = a^2 - z^2 \ldots (9); \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2) \ldots\ldots (10)$$

von welchen die zweite in die erstere übergeht, wenn man in derselben $b = a$ setzt. Wir können also auch hier dasselbe Verfahren, wie vorhin, anwenden, der Art nämlich, dass wir zunächst die Gleichung der Sphäroidischen Loxodrome unmittelbar entwickeln, und aus dieser sodann die Gleichung der Sphärischen Loxodrome einfach dadurch ableiten, dass wir bloss a statt b setzen.

Aus der gegebenen Gleichung des Sphäroids

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2) \ldots\ldots (10)$$

erhält man nun durch Differentiation:

$$x\,dx + y\,dy = -\frac{a^2}{b^2} z\,dz \ldots\ldots (11)$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ und } \frac{dz}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}.$$

Digitized by Google

Werden diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung (1) substituirt, so erhält man für dieselbe nach einigen Vereinfachungen die nachstehende:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,y}{y+\operatorname{tang}\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,x},$$

welche wir folgendermassen umformen:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma\,.\,(1+\frac{b^2(b^2-z^2)}{a^2z^2})^{\frac{1}{2}}\,(xdx+ydy).$$

Setzen wir nun rechts aus Gleichung (11) den Werth in z, und dividiren Behufs der Integration auf beiden Seiten einzeln durch $x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)$, so erhalten wir die Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)},$$

und hieraus in x und z, so wie in y und z die Gleichungen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\operatorname{tang}\gamma\int\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz}{a(b^2-z^2)}.$$

Die Ausführung der angedeuteten Integration gibt, da Const. = 0 ist:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\quad..(12)$$

für die Gleichung der Wendelfläche des Sphäroids, welche mit (10) verbunden die Sphäroidische Loxodrome bestimmt; und

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\},\\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{x}{v}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)z}{(b^4+(a^2-b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2-b^2)z}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\quad(13)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche die Sphäroidische Loxodrome ebenfalls vollkommen bestimmt ist.

Vorstehende Gleichungen stellen in anderer Form, wenn man zugleich den Ausdruck innerhalb der Klammer mit S bezeichnet, sich also dar:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right),$$
$$x = v \sin\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right),$$
$$y = v \cos\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, S\right).$$

Die Gleichungen der Sphärischen Loxodrome ergeben sich nun ganz einfach aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man in denselben $b = a$ setzt. Alsdann findet man aus (12):

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

für die Gleichung der Wendelfläche der Kugel, welche in Verbindung mit (9) die Sphärische Loxodrome bestimmt; und aus (13):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}, \\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche ebenfalls zur vollständigen Bestimmung der Sphärischen Loxodrome dienen.

Diese Gleichungen in anderer Form sind:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$x = v \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right),$$
$$y = v \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, \log\frac{a+z}{a-z}\right).$$

III. Hyperboloidische Loxodrome erster Art.

Die Gleichung des einmanteligen Rotationshyperboloids (à une nappe) ist bekanntlich:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + z^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Dieselbe geht nun aber aus der des Rotationsellipsoids hervor, wenn man in dieser $b = b\sqrt{-1}$ setzt. Daher geben auch die vorhin entwickelten Resultate auf der Stelle die gesuchten Gleichungen

Digitized by Google

der Hyperboloidischen Loxodrome erster Art, wenn man in denselben $b\sqrt{-1}$ für b nimmt. Auf diese einfache Weise erhält man nun, da auch hier Const. $=0$ ist:

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\}\ldots.(17)$$

die Gleichung der Wendelfläche des einmanteligen Rotations-Hyperboloids, wodurch in Verbindung mit (16) die Hyperboloidische Loxodrome erster Art bestimmt ist; und:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Arc sin}\dfrac{x}{v}=\dfrac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\},\\ \text{Arc cos}\dfrac{y}{v}=\dfrac{1}{2}\tang\gamma\left\{\begin{array}{r}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+az}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-az}\\ -\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\dfrac{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)z}{(b^4+(a^2+b^2)z^2)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)z}\end{array}\right\}\end{array}\right\}..(18)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche gemeinschaftlich die Hyperboloidische Loxodrome erster Art ebenfalls vollkommen bestimmen.

In anderer Form sind diese Gleichungen, wenn man noch zur Abkürzung den Ausdruck in der Klammer mit H_1 bezeichnet, folgende:

$$x=y\tang(\tfrac{1}{2}\tang\gamma\,.\,H_1),$$

$$x=v\sin(\tfrac{1}{2}\tang\gamma\,.\,H_1),$$

$$y=v\cos(\tfrac{1}{2}\tang\gamma\,.\,H_1).$$

In dem Falle, dass das einmantelige Rotationshyperboloid aus der gleichseitigen Hyperbel entstanden, ist $b=a$, und die vorstehenden Gleichungen gehen alsdann in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Arc tang}\dfrac{x}{y}\\ =\dfrac{1}{2}\tang\gamma.\left[\log\dfrac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}.\log\dfrac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z}\right]\end{array}\right\}\ldots(19)$$

die Gleichung der Wendelfläche des gleichseitigen einmanteligen Rotationshyperboloids; und:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Arc sin}\frac{x}{v}\\
&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z}\right],\\
&\text{Arc cos}\frac{y}{v}\\
&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\left[\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-z}-\sqrt{2}.\log\frac{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}.z}{(a^2+2z^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}.z}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloidischen Loxodrome erster Art auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ.

Für diese Gleichungen hat man in anderer Form, wenn man zugleich den Ausdruck der Klammer mit G_1 bezeichnet, die folgenden:

$$x=y\,\text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\,G_1),$$

$$x=v\,\sin\,(\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\,G_1),$$

$$y=v\,\cos\,(\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,.\,G_1).$$

IV. Hyperboloidische Loxodrome zweiter Art.

Die bekannte Gleichung des zweimanteligen Rotationshyperboloids (à deux nappes), nämlich:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}(z^2-b^2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(21)$$

geht ebenfalls aus der des Rotationsellipsoids hervor, wenn in dieser $a=a\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Wir gelangen also ebenso leicht zu den Gleichungen der Hyperboloidischen Loxodrome zweiter Art, indem wir in den für die Sphäroidische Loxodrome gewonnenen Ausdrücken $a\sqrt{-1}$ statt a nehmen. Alsdann erhält man, indem man die nach dem Anfangspunkt der Curve zu bestimmende Const. $=\frac{1}{2}\,\text{tang}\,\gamma\,(\log B-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log B)$ setzt, folgende Gleichungen:

Digitized by Google

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right]\ldots\ldots(22)$$

die Gleichung der Wendelfläche des zweimanteligen Rotationshyperboloids, welche mit (21) verbunden zur Bestimmung der Hyperboloidischen Loxodrome der zweiten Art dient; und:

$$\left.\begin{aligned}\text{Arc sin}\frac{x}{v}&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right],\\ \text{Ars cos}\frac{y}{v}&=\frac{1}{2}\,\text{tang}\gamma\left[\log\frac{A(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+az)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-az}-\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\log\frac{B(((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z)}{((a^2+b^2)z^2-b^4)^{\frac{1}{2}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}z}\right]\end{aligned}\right\}\ldots(23)$$

die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen *XZ* und *YZ*, durch welche gemeinschaftlich ebenfalls die Hyperboloidische Loxodrome der zweiten Art bestimmt wird.

Digitized by Google

In anderer Form, und den Ausdruck innerhalb der Klammer mit H_2 bezeichnend, erhält man:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, H_2\right).$$

Für den Fall, dass das zweimantelige Rotationshyperboloid durch die gleichseitige Hyperbel erzeugt ist, verwandeln sich vorstehende Gleichungen, indem man $b = a$ setzt, in folgende:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{matrix} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}\,.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z} \end{matrix} \right\} \quad \ldots . \quad (24)$$

die Gleichung der Wendelfläche des gleichseitigen zweimanteligen Rotationshyperboloids; und:

$$\left. \begin{matrix} \operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{v} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{matrix} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}\,.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z} \end{matrix} \right\}, \\ \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{y}{v} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \left\{ \begin{matrix} \log \dfrac{A'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-z} \\ -\sqrt{2}\,.\log \dfrac{B'((2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\,.\,z)}{(2z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\,.\,z} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \quad \ldots . \quad (25)$$

die Gleichungen der Projectionen der gleichseitig-hyperboloidischen Loxodrome zweiter Art auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ.

Den Ausdruck in der Klammer mit G_2 bezeichnend, hat man für diese Gleichungen in anderer Form die folgenden:

$$x = y \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right),$$

$$x = v \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right),$$

$$y = v \cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma \,.\, G_2\right).$$

Digitized by Google

V. Paraboloidische Loxodrome.

Als Gleichung des Rotationsparaboloids hat man bekanntlich:

$$x^2+y^2=pz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus:

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}pdz. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Daher erhält man:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{p}, \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{2y}{p}.$$

Substituirt man diese Werthe wieder in die allgemeine Gleichung (1), so findet man nach einigen Reductionen:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma.(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}x}.$$

Bringt man diese Gleichung in nachstehende Form:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}(xdx+ydy),$$

substituirt alsdann auf der rechten Seite aus (27) den Werth in z, und dividirt zum Zwecke der Integration auf beiden Seiten bezüglich durch $x^2+y^2=pz$, so erhält man die Integralgleichung:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

und für die Gleichungen in x und z, so wie in y und z:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}},$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\int\frac{-dz}{z}(1+\frac{4z}{p})^{\frac{1}{2}}.$$

Nun gibt die Integration, wenn man die nach dem Anfange der Curve zu bestimmende Constans $=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.(\log A-\frac{B}{p})$ setzt:

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{y}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right]. \quad \ldots \quad (28)$$

Digitized by Google

für die Gleichung der Wendelfläche des Rotationsparaboloids, welche mit (26) verbunden die Paraboloidische Loxodrome bestimmt; und:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right], \\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{y}{v} &= \frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\left[\log\frac{A(p+(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}})}{p-(p^2+4pz)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2(p+4pz)^{\frac{1}{2}}+B}{p}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (29)$$

für die Gleichungen der Projectionen auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, durch welche die Paraboloidische Loxodrome ebenfalls vollständig bestimmt ist.

Diese Gleichungen sind in anderer Form, indem man zugleich den Ausdruck der Klammer mit P bezeichnet, folgende:

$$x = y\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right),$$

$$x = v\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right),$$

$$y = v\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\gamma\,.\,P\right).$$

LX.

Ueber Legendre's Theorem von den Euler'schen Integralen zweiter Art.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Der sinnreiche Gedanke, den Satz Legendre's über die Gammafunctionen mittelst eines bestimmten Integrales für $\frac{d\Pi(\mu)}{d\mu}$ abzu-

Digitized by Google

leiten, was offenbar der direkteste Weg ist, rührt bekanntlich von Lejeune Dirichlet her. Er benutzt hierzu die Gleichung *):

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)^\mu} \qquad (1)$$

ganz unmittelbar, was aber etwas unbequem ist. Vielleicht dürfte folgender Weg einfacher und leichter sein.

Nach Nro. (1) ist identisch

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)}+\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^\mu}\right\}\frac{dx}{x}$$

indem sich das zweite Integral gegen das erste aus der Parenthese entspringende hebt. Hierbei sind nun die beiden ersten Integrale von μ unabhängig und bilden eine rein numerische Constante. Den Werth derselben kann man entdecken, wenn man die Integrale als die Gränzen betrachtet, denen sich die Ausdrücke

$$\int_0^n \frac{dx}{x}e^{-x} \text{ und } \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$

für unendliche wachsende n nähern. Es ist nämlich:

$$\int_0^n \frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$
$$=\int_0^n \frac{dx}{x}\left\{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots..\right\}-\int_0^n \frac{dx}{x}+\int_0^n \frac{dx}{1+x}.$$

Hier hebt sich beiderseits das Integral $\int_0^n \frac{dx}{x}$, und es bleibt nach geschehener Integration:

$$\int_0^n \frac{dx}{x}e^{+x}-\int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}=$$
$$=-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3}+\ldots..+l(n+1),$$

wofür man auch durch Zusetzung der Grösse $ln-ln$ schreiben kann:

$$\int_0^n \frac{dx}{x}e^{-x}-\int_0^n \frac{dx}{x(1+x)}$$
$$=ln-\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3}+\ldots..+l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Bekanntlich hat man aber folgende unter allen Umständen convergirende Reihe für den Integrallogarithmus:

*) M. s. den zweiten Band des Archivs Nro. XXV. §. 19. Formel (7).

$$li\,u = C + \frac{1}{2}\,l[(lu)^2] + \frac{1}{1}\cdot\frac{lu}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lu)^2}{1.2} + \ldots\ldots,$$

worin $C = 0{,}5772156$ ist. Setzt man hierin $u = e^{-n}$, so ergibt sich

$$ln - \frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{1.2.3} + \ldots = -C + li(e^{-n}),$$

und folglich, wenn man dieses Resultat in die vorige Betrachtung einführt,

$$\int_0^n \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^n \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(e^{-n}) + l(1+\frac{1}{n}).$$

Gehen wir in dieser für jedes n geltenden Gleichung zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C + li(0).$$

Da aber nach der Definition des Integrallogarithmus

$$li\,u = \int_0^u \frac{dx}{lx}$$

ist, so folgt für $u = 0$, $li(0) = 0$, mithin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} - \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = -C = -(0{,}5772156).$$

Durch Benutzung dieses Resultats geht die Gleichung (2) in die folgende über:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^\mu}\right\}\frac{dx}{x}.$$

Dieselbe gestaltet sich noch etwas eleganter, wenn man $\frac{1}{1+x} = z$ setzt, woraus $x = \frac{1-z}{z}$ und $dx = -\frac{dz}{z^2}$ folgt; ist ferner $x = \infty$ und $x = 0$ geworden, so hat z die Werthe $z = 0$ und $z = 1$ angenommen, und daher ist auch

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C - \int_1^0 \left\{z - z^\mu\right\}\frac{dz}{z^2\,\frac{1-z}{z}},$$

oder wenn man die Gränzen vertauscht und wieder x für z schreibt:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = -C + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Diese Gleichung, welche man auch auf andere Weise abgeleitet hat, ist es, die man zu einem sehr einfachen Beweise des Legendre'schen Theoremes benutzen kann.

Setzt man in derselben $\mu+\frac{h}{n}$ für μ, wobei h und n ganze positive Zahlen bedeuten mögen, so wird

$$\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu}=-C+\int_0^1 \frac{1-x^{\mu+\frac{h}{n}-1}}{1-x}\,dx,$$

oder für $x=z^n$:

$$\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{h}{n})}{d\mu}=-C+n\int_0^1 \frac{z^{n-1}-z^{n\mu+h-1}}{1-z^n}\,dz.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung für h der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ geschrieben und alle so entstehenden Gleichungen addirt, so erscheint die Gleichung:

$$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}+\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{1}{n})}{d\mu}+\ldots+\frac{dl\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{d\mu}$$
$$=-nC+n\int_0^1 \frac{nz^{n-1}-z^{n\mu-1}(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})}{1-z^n}\,dz,$$

oder weil

$$1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

ist:

$$\frac{dl\{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})\}}{d\mu}$$
$$=-nC+n\int_0^1 \left\{\frac{nz^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^{n\mu-1}}{1-z}\right\}dz.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (3) z und $n\mu$ für x und μ, so tritt $n\,d\mu$ an die Stelle von $d\mu$, und nach beiderseitiger Multiplikation mit n ist dann

$$\frac{dl\Gamma(n\mu)}{d\mu}=-nC+n\int_0^1 \frac{1-z^{n\mu-1}}{1-z}\,dz.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen ergibt sich jetzt

Digitized by Google

$$\frac{d}{d\mu} l \left\{ \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)} \right\} = n\int_0^1 \left\{ \frac{nz^{n-1}}{1-z^n} - \frac{1}{1-z} \right\} dz.$$

Der Werth dieses Integrales ist aber sehr leicht zu finden; denn man hat durch unbestimmte Integration

$$\int \left\{ \frac{nz^{n-1}}{1-z^n} - \frac{1}{1-z} \right\} dz = -l(1-z^n) + l(1-z)$$

$$= -l\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) = -l(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}),$$

folglich

$$\int_0^1 \left\{ \frac{nz^{n-1}}{1-z^n} - \frac{1}{1-z} \right\} dz = -ln.$$

Demnach ist jetzt in Gemässheit des Vorigen:

$$\frac{d}{d\mu} l \left\{ \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)} \right\} = ln = l\left(\frac{1}{n^n}\right).$$

Multiplizirt man beiderseits mit $d\mu$, integrirt und nennt lq die hinzuzufügende Constante, so wird

$$l \left\{ \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\frac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(n\mu)} \right\} = \mu\, l\left(\frac{1}{n^n}\right) + lq = l(n^{-n\mu} q),$$

woraus folgt:

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\mu+\tfrac{2}{n})\ldots\Gamma(\mu+\tfrac{n-1}{n}) = n^{-n\mu} q\,\Gamma(n\mu).$$

Die Constante q bestimmt sich leicht, wenn man $\mu=\frac{1}{n}$ setzt und bemerkt, dass $\Gamma(1)=1$ ist. Man hat dann

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-1} q,$$

und weil nach dem von Euler gefundenen Satze die linke Seite

$$= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

ist,

Digitized by Google

$$q = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} .$$

So wird denn

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{n})\ldots\Gamma(\mu+\tfrac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2}-n\mu}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(n\mu),$$

und diess ist der von Legendre zuerst bewiesene Satz.

XLI.

Ueber die Verwandlung der Funktionen einer Veränderlichen in Reihen, welche nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Unter die schönsten Arbeiten Cauchy's gehört gewiss die Auffindung des Kennzeichens, wonach man jeder Funktion auf den ersten Blick ansehen kann, unter welchen Bedingungen sich dieselbe in eine convergente nach steigenden Potenzen ihrer Veränderlichen fortschreitende Reihe verwandeln lässt. Dasselbe spricht sich in folgendem Satze aus:

„Sei $F(x)$ die gegebene Funktion und um völliger Allgemeinheit willen $x = r(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$, in welcher Form alle denkbaren reellen und imaginären Werthe von x enthalten sind. Bleiben nun die Funktion $F(x)$ und ihr erster Differenzialquotient $F'(x)$ endlich und stetig für alle Werthe von x, deren Moduli innerhalb des Intervalles 0 bis R liegen, wo R eine durch die Natur der Funktion $F(x)$ selbst bestimmte Grösse ist, so kann man $F(x)$

Digitized by Google

für alle diese, aber auch nur für diese Werthe von x in eine convergente Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

verwandeln; die Gränzen für die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion und ihres Differenzialquotienten sind mithin zugleich die für die Entwickelbarkeit der Funktion."

Cauchy beweist dieses merkwürdige Theorem dadurch, dass er zeigt: für $R > r > 0$ und $e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}} = \Theta$, wo n ganz und positiv ist, hat man die Gleichung:

$$F(x) = \operatorname{Lim} \frac{1}{n}\left[\frac{r}{r-x} F(r) + \frac{\Theta r}{\Theta r - x} F(\Theta r) + \frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r - x} F(\Theta^2 r) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\Theta^{n-1} r}{\Theta^{n-1} r - x} F(\Theta^{n-1} r)\right],$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsen von n bezieht, so dass $\operatorname{Lim} \Theta = 1$ wird *).

Hier wird sich gewiss Jedem, der den Gang des Beweises verfolgt, die Frage aufdrängen, wie wohl der geistreiche französische Analytiker zu dieser Betrachtungsweise, die von der bisherigen völlig verschieden ist, gekommen sei, und wie dieselbe mit anderen bekannten Methoden zusammenhänge. Hierauf ist die Antwort: hinter der ganzen Untersuchung steht ein sehr allgemeines bestimmtes Integral, dessen Werth die beliebige Funktion F darstellt, nämlich das Theorem:

$$F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{\sqrt{-1}\,t}}{re^{\sqrt{-1}\,t} - a} F(re^{\sqrt{-1}\,t})\, dt, \quad a < r,$$

welches unter den nämlichen Bedingungen richtig bleibt, unter denen sich $F(a)$ in eine nach Potenzen von a fortschreitende und convergente Reihe verwandeln lässt.

Wir wollen nun zuerst die Richtigkeit dieses Satzes beweisen und dann zeigen, wie er mit Cauchy's Untersuchungen zusammenhängt.

I. Lemma.

Für alle diejenigen Werthe von r, für welche sich $F(r)$ in eine nach steigenden Potenzen von r fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln lässt, ist

$$\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\, dt = \frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2.3 \ldots n} 2\pi, \qquad (1)$$

wobei i zur Abkürzung für $\sqrt{-1}$ gebraucht wird.

---

*) Moigno, Leçons de calcul différentiel etc. XVIIième leçon und Archiv. Theil I. S. 364.

Digitized by Google

Nach dem Maclaurin'schen Theoreme hat man nämlich:

$$F(r) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} r + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 + \dots , \qquad (2)$$

was aber nur so lange richtig bleibt, als die Reihe rechts convergirt, weil ausserdem die Funktion und die Reihe einander nicht gleich sind. Unter dieser Voraussetzung ist es auch erlaubt, $re^{ti} = r(\cos t + i \sin t)$ für r zu setzen, indem sich dann die Reihe in zwei andere zerlegt, nämlich

$$F(0) + \frac{F'(0)}{1} r\cos t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \cos 2t + \dots$$
$$+ \quad i\left\{\frac{F'(0)}{1} r \sin t + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 \sin 2t + \dots\right\},$$

welche ebenfalls noch convergiren, wenn die Reihe (2) convergirt.

Multipliziren wir jetzt die Gleichung

$$F(re^{ti}) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} re^{ti} + \frac{F''(0)}{1.2} r^2 e^{2ti} + \dots\dots$$

mit $e^{-nti}\,dt$ und integriren nach t zwischen den Gränzen $t=0$, $t=2\pi$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\,dt = \\ &F(0)\int_0^{2\pi} e^{-nti}\,dt + \frac{r F'(0)}{1}\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)ti}\,dt \\ &\qquad + \frac{r^2 F''(0)}{1.2}\int_0^{2\pi} e^{-(n-2)ti}\,dt + \dots \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre etwa

$$\frac{r^m F^{(m)}(0)}{1.2\dots m}\int_0^{2\pi} e^{-(n-m)ti}\,dt , \qquad (4)$$

wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet und es sich noch um den Werth des bestimmten Integrales handelt. Dasselbe ist auch

$$= \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\,t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)\,t\,dt.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: ob nämlich die willkürliche Zahl m von der gegebenen n verschieden ist, oder nicht.

Im ersten Falle hat man

$$\int \cos(n-m)\,t\,dt - i\int \sin(n-m)\,t\,dt = \frac{\sin(n-m)\,t}{n-m} + i\,\frac{\cos(n-m)\,t}{n-m} ;$$

folglich, weil auch $n-m$ eine ganze Zahl ist:

Digitized by Google

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = 0.$$

Für $m=n$ dagegen ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t\,dt - i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)t\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Es verschwinden also in der Reihe (3) alle diejenigen Glieder, in denen die fortlaufenden Zahlen $m=1, 2, 3, \ldots$ von n verschieden sind, und es bleibt demnach bloss das Glied übrig, in welchem $m=n$ ist, d. h. gemäss des Ausdruckes (4) die Grösse

$$\frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}\,2\pi;$$

folglich haben wir nach (3)

$$\int_0^{2\pi} e^{-nti} F(re^{ti})\,dt = \frac{r^n F^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}\,2\pi,$$

womit das aufgestellte Lemma bewiesen ist.

II.

Wir können hieraus leicht unser im Anfang aufgestelltes Theorem beweisen. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}} F(re^{ti})\,dt.$$

Dabei lässt sich der unter dem Integralzeichen stehende Bruch

$$\frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-ti}}$$

nach der bekannten Formel

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\ldots, 1>u>-1$$

in eine unendliche Reihe verwandeln, sobald $\frac{a}{r}$ wie u unter der Einheit liegt, also hinsichtlich der absoluten Werthe $a<r$ ist. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti}-a} F(re^{ti})\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} F(re^{ti})\,dt + \frac{a}{r}\int_0^{2\pi} e^{-ti} F(re^{ti})\,dt + \frac{a^2}{r^2}\int_0^{2\pi} e^{-2ti} F(re^{ti})\,dt + \ldots\right\}.$$

Digitized by Google

Bestimmt man hier die Werthe sämmtlicher Integrale rechts mit Hülfe von Formel (1), so ergiebt sich für $a<r$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(0)+\frac{a}{1}F'(0)+\frac{a^2}{1.2}F''(0)+\ldots. \quad (5)$$

Nun war aber früher vorausgesetzt, dass die Reihe

$$F(0)+\frac{r}{1}F'(0)+\frac{r^2}{1.2}F''(0)+\ldots.$$

convergire und $F(r)$ zur Summe habe; da nun $a<r$ ist, so muss die Reihe in (5) um so mehr convergiren und $F(a)$ zur Summe haben; daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti})\,dt=F(a),\ a<r; \quad (6)$$

und diess gilt für alle solche Werthe von r, für welche sich $F(r)$ in eine nach steigenden Potenzen fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln lässt.

Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, diese ganze Betrachtungsweise umzukehren. Könnte man nämlich unabhängig vom Maclaurin'schen Satze die Richtigkeit des in Nro. (6) aufgestellten Theoremes erweisen und die Bedingungen ermitteln, unter welchen dasselbe gilt, so wären hiermit auch die Bedingungen gefunden, unter welchen man eine Funktion $F(a)$ in eine nach Potenzen von a fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln kann. Nun hat man aber den Satz

$$\int_0^c f(t)\,dt=\mathrm{Lim}\frac{c}{n}\left\{f(0)+f(\tfrac{c}{n})+f(\tfrac{2c}{n})+\ldots+f(\tfrac{\overline{n-1}\,c}{n})\right\},$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das unbegränzte Wachsen von dem ganzen positiven n bezieht. Hiernach ist für

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{re^{ti}}{re^{ti}-a}F(re^{ti}):$$

$$F(a)=\mathrm{Lim}\,\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-a}F(c)+\frac{re^{\frac{2\pi}{n}i}}{re^{\frac{2\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{2\pi}{n}i})+\frac{re^{\frac{4\pi}{n}i}}{re^{\frac{4\pi}{n}i}-a}F(re^{\frac{4\pi}{n}i})+\ldots\right\};$$

oder für $e^{\frac{2\pi}{n}i}=\Theta$:

$$F(a)=\mathrm{Lim}\frac{1}{n}\left\{\frac{r}{r-a}F(0)+\frac{\Theta r}{\Theta r-a}F(\Theta r)+\frac{\Theta^2 r}{\Theta^2 r-a}F(\Theta^2 r)+\ldots\right\}.$$

Digitized by Google

Dieser Satz wäre es also eigentlich, den man beweisen müsste, woraus dann Nro. (6) und das Maclaurin'sche Theorem unmittelbar folgen würden. Diesen Weg hat sich in der That Cauchy gebrochen, wobei er auch die Bedeutung der vorigen Gleichung für die Integralrechnung ganz verschweigen konnte, wenn er seine Untersuchungen als zur Differenzialrechnung gehörig darstellen wollte.

XLII.

Ueber eine Anwendung des in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesenen Hauptsatzes der Theorie der bestimmten Integrale.

Von

dem Herausgeber.

Der in der Abhandlung Thl. II. Nro. XXV. §. 3. bewiesene bekannte Hauptsatz der Theorie der bestimmten Integrale scheint mir nicht immer in seiner ganzen Wichtigkeit erkannt, wohl selbst zuweilen für einen gewissermaassen bloss näherungsweise richtigen Satz gehalten zu werden, was eine völlig unrichtige Ansicht ist. Namentlich scheint es mir, dass dieser Satz in den Lehrbüchern der höheren Analysis noch nicht allgemein genug zur Entwickelung der Grundformeln, auf denen die Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik beruhen, benutzt wird, da doch nach meiner Ueberzeugung gerade der in Rede stehende Satz den eigentlichen und wahren Grund aller dieser Anwendungen enthält. Ich habe mir daher vorgenommen, in verschiedenen nach und nach auf einander folgenden kleinen Aufsätzen die Anwendung dieses wichtigen Satzes etwas näher zu erläutern, und werde zunächst auf den folgenden Seiten eine Entwickelung der bekannten Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes ebener Curvenstücke mittheilen, welcher man, wie ich hoffe, wenn dieselbe auch weitläufiger als die gewöhnliche Darstellung ist, doch völlige Strenge und Evidenz nicht wird absprechen können.

Digitized by Google

Zuerst müssen wir die folgende Aufgabe auflösen.

Den Schwerpunkt eines Trapeziums $ABCD$ (Taf. VI. Fig. 1.), dessen parallele Seiten AC und BD sind, zu finden.

Um diese Aufgabe aufzulösen, halbire man die parallelen Seiten AC und BD des Trapeziums in E und F, und ziehe EF, so ist diese Linie nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Zieht man ferner die Linien DE und AF, und nimmt $EG=\frac{1}{3}DE$ und $FH=\frac{1}{3}AF$, so sind G und H die Schwerpunkte der Dreiecke ACD und ABD, und es ist also auch die Linie GH ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums. Folglich ist der Durchschnittspunkt S der Linien EF und GH der gesuchte Schwerpunkt des Trapeziums.

Legen wir nun durch A eine auf den parallelen Seiten des Trapeziums senkrecht stehende, durch S eine denselben Seiten parallele gerade Linie, und bezeichnen den Durchschnittspunkt dieser beiden Linien durch K, die Entfernung der beiden parallelen Seiten des Trapeziums von einander oder die sogenannte Höhe desselben aber durch AL, so ist nach bekannten allgemeinen Sätzen vom Schwerpunkte

$$AK=\frac{\frac{1}{3}AL.\Delta ACD+\frac{2}{3}AL.\Delta ABD}{\Delta ACD+\Delta ABD}$$

oder

$$AK=\frac{1+2\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}}{3(1+\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD})}.AL;$$

also, wie sogleich erhellet:

$$AK=\frac{1+2\frac{BD}{AC}}{3(1+\frac{BD}{AC})}.AL=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AL.$$

Weil aber offenbar

$$\frac{AK}{AL}=\frac{AJ}{AB}$$

ist, so ist auch

$$AJ=\frac{AC+2BD}{3(AC+BD)}.AB.$$

Ferner ist offenbar

$$AB:BF-AE=AJ:SJ-AE,$$

Digitized by Google

d i.

$$AB : \tfrac{1}{2}(BD-AC) = \frac{AC+2BD}{3(AC+BD)} . AB : SJ - \tfrac{1}{2}AC,$$

woraus sich unmittelbar

$$SJ - \tfrac{1}{2}AC = \frac{(BD-AC)(AC+2BD)}{6(AC+BD)},$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$SJ = \frac{AC^2 + AC.BD + BD^2}{3(AC+BD)}$$

ergiebt.

In Taf. VI. Fig. 2. sei jetzt $ABCD$ ein auf rechtwinklige Coordinaten bezogenes Curvenstück, in welchem alle Ordinaten gleiche Vorzeichen haben. Denkt man sich nun AB in n gleiche Theile getheilt, zieht durch alle Theilpunkte senkrechte Ordinaten, verbindet deren Endpunkte durch Sehnen der Curve mit einander, wodurch man n Trapeze erhält, und bezeichnet die den sämmtlichen Theilpunkten von AB mit Einschluss von A und B entsprechenden Abscissen und Ordinaten durch

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_{n-1}, x_n = b$$

und

$$\alpha = y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_{n-1}, y_n = \beta;$$

die Coordinaten des Schwerpunkts des Curvenstücks $ABCD$ aber durch X und Y, so ist, wenn der Kürze wegen, indem man sich n in's Unendliche wachsend denkt:

$$M = \operatorname{Lim} \left\{ \begin{array}{l} (x_0 + \frac{y_0+2y_1}{3(y_0+y_1)} \cdot \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{1}{2}(y_0+y_1) \frac{b-a}{n} \\ + (x_1 + \frac{y_1+2y_2}{3(y_1+y_2)} \cdot \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{1}{2}(y_1+y_2) \frac{b-a}{n} \\ + (x_2 + \frac{y_2+2y_3}{3(y_2+y_3)} \cdot \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{1}{2}(y_2+y_3) \frac{b-a}{n} \\ + (x_3 + \frac{y_3+2y_4}{3(y_3+y_4)} \cdot \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{1}{2}(y_3+y_4) \frac{b-a}{n} \\ \text{u. s. w.} \\ + (x_{n-1} + \frac{y_{n-1}+2y_n}{3(y_{n-1}+y_n)} \cdot \frac{b-a}{n}) \cdot \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n) \frac{b-a}{n} \end{array} \right.$$

und

Digitized by Google

$$N = \text{Lim.}\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{l}(y_0+y_1)+(y_1+y_2)\\ +(y_2+y_3)\\ +(y_3+y_4)\\ \text{u. s. w.}\\ +(y_{n-1}+y_n)\end{array}\right.$$

gesetzt wird, nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$X = \frac{M}{N},$$

wo es nun darauf ankommt, die Grössen M und N zu bestimmen.
Es ist aber

$$M = \text{Lim.}\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{l}x_0(y_0+y_1)+x_1(y_1+y_2)\\ +x_2(y_2+y_3)\\ +x_3(y_3+y_4)\\ \text{u. s. w,}\\ +x_{n-1}(y_{n-1}+y_n)\end{array}\right.$$

$$+\text{Lim.}\,\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2\{y_0+3y_1+3y_2+3y_3+\ldots+3y_{n-1}+2y_n\}$$

$$= \text{Lim.}\,\frac{b-a}{2n}\left\{\begin{array}{l}x_0y_0+(x_1-\frac{b-a}{n})y_1\\ +x_1y_1+(x_2-\frac{b-a}{n})y_2\\ +x_2y_2+(x_3-\frac{b-a}{n})y_3\\ +x_3y_3+(x_4-\frac{b-a}{n})y_4\\ \text{u. s. w.}\\ +x_{n-1}y_{n-1}+(x_n-\frac{b-a}{n})y_n\end{array}\right.$$

$$+\text{Lim.}\,\tfrac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\text{Lim.}\,\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$= \text{Lim.}\,\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\text{Lim.}\,\frac{b-a}{2n}(x_0y_0+x_ny_n)$$

$$-\text{Lim}.\tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$+\text{Lim}.\tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 y_0$$

$$+\text{Lim}.\tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\text{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(2y_0+y_n)$$

$$=\text{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n)$$

$$-\text{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)+\text{Lim}.\tfrac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta);$$

und folglich, weil offenbar

$$\text{Lim}.\frac{b-a}{2n}(a\alpha+b\beta)=0,\ \text{Lim}.\tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(\alpha-\beta)=0$$

ist:

$$M=\text{Lim}.\frac{b-a}{n}(x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n);$$

also nach dem Archiv. Thl. II. S. 275. bewiesenen allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen offenbar:

$$M=\int_a^b xydx.$$

Ferner ist

$$N=\text{Lim}.\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_{n-1}+y_n)$$

$$=\text{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\text{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta),$$

und folglich, weil offenbar

$$\text{Lim}.\frac{b-a}{2n}(\alpha+\beta)=0$$

ist:

$$N=\text{Lim}.\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n);$$

also nach dem in Rede stehenden Satze von den bestimmten Integralen:

Digitized by Google

$$N = \int_a^b y dx.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

Setzen wir ferner

$$M' = \text{Lim.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_0^2 + y_0 y_1 + y_1^2}{3(y_0 + y_1)} \cdot \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3(y_1 + y_2)} \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \frac{b-a}{n} \\ + \frac{y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2}{3(y_2 + y_3)} \cdot \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \frac{b-a}{n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{y_{n-1}^2 + y_{n-1} y_n + y_n^2}{3(y_{n-1} + y_n)} \cdot \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \frac{b-a}{n} \end{array} \right\},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$Y = \frac{M'}{N},$$

wo es nun auf die Bestimmung der Grösse M' ankommt.

Es ist aber

$$M' = \text{Lim.} \frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} y_0^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + 2y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + \ldots + y_{n-1} y_n \end{array} \right\},$$

und folglich, weil

$$\begin{array}{l} y_0 y_1 = y_0 (y_1 - y_0) + y_0^2, \\ y_1 y_2 = y_1 (y_2 - y_1) + y_1^2, \\ y_2 y_3 = y_2 (y_3 - y_2) + y_2^2, \\ y_3 y_4 = y_3 (y_4 - y_3) + y_3^2, \\ \text{u. s. w.} \\ y_{n-1} y_n = y_{n-1} (y_n - y_{n-1}) + y_{n-1}^2 \end{array}$$

ist:

$$M' =$$

$$\text{Lim.} \frac{b-a}{6n} \left\{ \begin{array}{l} 2y_0^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 + \ldots + 3y_{n-1}^2 + y_n^2 \\ + y_0(y_1 - y_0) + y_1(y_2 - y_1) + y_2(y_3 - y_2) + \ldots + y_{n-1}(y_n - y_{n-1}) \end{array} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(\alpha^2+2\beta^2).$$

Nach dem schon vorher angewandten Satze von den bestimmten Integralen ist nun

$$\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_n^2)=\int_a^b y^2dx;$$

und nach dem Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen, ebenfalls sehr wichtigen, Satze von den Mittelgrössen ist, weil nach der Voraussetzung

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots y_n$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, wenn wir eine gewisse Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots\ldots y_n-y_{n-1}$$

durch μ bezeichnen:

$$y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})$$
$$=\mu\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}).$$

Also ist

$$\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}$$

$$=\mathrm{Lim}\,.\,\mu\,\frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1})$$

$$=\mathrm{Lim}\,\mu\,.\,\mathrm{Lim}\,.\frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)$$

$$-\mathrm{Lim}\,.\,\mu\beta\,\frac{b-a}{n}.$$

Weil nun aber nach dem schon mehrmals angewandten Satze von den bestimmten Integralen

$$\mathrm{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=\int_a^b y\,dx$$

ist, und, wenn n in's Unendliche wächst, die Grössen

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots y_n-y_{n-1};$$

also natürlich auch die Mittelgrösse μ zwischen denselben, sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern; so ist offenbar

Digitized by Google

$$\text{Lim}\,\mu\,.\,\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=0.$$

Und weil nun offenbar auch

$$\text{Lim}\,.\,\mu\beta\,\frac{b-a}{n}=0$$

ist, so ist

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\{y_0(y_1-y_0)+y_1(y_2-y_1)+y_2(y_3-y_2)+\ldots+y_{n-1}(y_n-y_{n-1})\}=0.$$

Nimmt man hierzu endlich noch, dass offenbar

$$\text{Lim}\,.\,\frac{b-a}{n}\,(\alpha^2+2\beta^2)=0$$

ist, so folgt aus dem Obigen

$$M'=\int_a^b y^2dx,$$

also

$$Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

Durch die Formeln

$$X=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad Y=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

ist nun die Lage des Schwerpunkts vollkommen bestimmt.

Hätte man die Coordinaten X, Y des Schwerpunkts eines Flächenstücks wie $ACEDB$ in Taf. VI. Fig. 3. zu bestimmen, so wäre, wenn wir die Abscissen der Punkte A, B und E respective durch a, b und e bezeichnen, nach der Lehre vom Schwerpunkte und nach dem Vorhergehenden:

$$X=\frac{\frac{\int_a^e xydx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\frac{\int_e^b xydx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx},$$

$$Y=\frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{\int_a^e y^2dx}{\int_a^e ydx}\,.\int_a^e ydx+\frac{1}{2}\,.\,\frac{\int_e^b y^2dx}{\int_e^b ydx}\,.\int_e^b ydx}{\int_a^e ydx+\int_e^b ydx};$$

Digitized by Google

d. i.

$$X = \frac{\int_a^e xydx + \int_e^b xydx}{\int_a^e ydx + \int_e^b ydx},$$

$$Y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^e y^2dx + \int_e^b y^2dx}{\int_a^e ydx + \int_e^b ydx}.$$

Weil nun aber nach der Lehre von den bestimmten Integralen (Archiv. Thl. II. S. 268.)

$$\int_a^e ydx + \int_e^b ydx = \int_a^b ydx,$$

$$\int_a^e xydx + \int_e^b xydx = \int_a^b xydx,$$

$$\int_a^e y^2dx + \int_e^b y^2dx = \int_a^b y^2dx$$

ist, so erhält man wie vorher auch jetzt wieder:

$$X = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, \quad Y = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

Das Vorhergehende ist für unsern jetzigen Zweck hinreichend. Späterhin hoffen wir auf andere ähnliche Anwendungen von dem allen obigen Betrachtungen hauptsächlich zum Grunde liegenden wichtigen Satze von den bestimmten Integralen zurückzukommen.

Digitized by Google

XLIII.

Ueber zwei Sätze aus der Algebra und aus der Zahlenlehre.

Nach der Abhandlung: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres par M. Poinsot in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées publié par J. Liouville. Janvier et Février. 1845. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Durch leichte Rechnung überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & Ax+B \\ =\ & (x-a)\,A \\ & +Aa+B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Ax^2+Bx+C \\ =\ & (x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax \\ +Aa+B \end{array}\right. \\ & +Aa^2+Ba+C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Ax^3+Bx^2+Cx+D \\ =\ & (x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^2 \\ +(Aa+B)x \\ +Aa^2+Ba+C \end{array}\right. \\ & +Aa^3+Ba^2+Ca+D, \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\\
&=(x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^3\\ +(Aa+B)x^2\\ +(Aa^2+Ba+C)x\\ +Aa^3+Ba^2+Ca+D\end{array}\right\}\\
&\quad+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,\\
&\qquad\text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

und übersieht hier auch schon das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten, auf völlig unzweideutige Weise.

Nehmen wir nun dieses Gesetz für jede ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades als gültig an, so ist

$$
\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=Ax^n+(x-a)\left\{\begin{array}{l} Bx^{n-2}\\ +(Ba+C)x^{n-3}\\ +(Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ +(Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\ +Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{array}\right\}\\
&\quad+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+Da^{n-3}+\ldots+La^2+Ma+N.
\end{aligned}
$$

Addiren wir jetzt auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Grösse

$$-Aa^n+Aa^n=0,$$

und bemerken, dass

$$A(x^n-a^n)=A(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

ist, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Lx^2+Mx+N\\
&=(x-a)\left\{\begin{array}{l} Ax^{n-1}\\ +(Aa+B)x^{n-2}\\ +(Aa^2+Ba+C)x^{n-3}\\ +(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{n-4}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ +(Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+Ca^{n-4}+\ldots+Ka+L)x\\ +Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka^2+La+M\end{array}\right\}\\
&\quad+Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots+La^2+Ma+N,
\end{aligned}
$$

und sehen also hieraus, dass das bemerkte Gesetz für jede ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades gilt, wenn es für

Digitized by Google

jede ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades gilt, nach dem Obigen folglich offenbar allgemein gültig ist.

Wir haben daher jetzt den folgenden Satz:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist, so ist für jedes a immer

$$f(x) = (x-a) f_1(x) + f(a),$$

wo $f_1(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades bezeichnet, deren höchstes Glied denselben Coefficienten wie das höchste Glied der Function $f(x)$ hat *).

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades sei, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, und dass

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$$

n ganz beliebige Grössen seien. Dann ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-a_1) f_1(x) + f(a_1), \\
f_1(x) &= (x-a_2) f_2(x) + f_1(a_2), \\
f_2(x) &= (x-a_3) f_3(x) + f_2(a_3), \\
f_3(x) &= (x-a_4) f_4(x) + f_3(a_4), \\
&\text{u. s. w.} \\
f_{n-1}(x) &= (x-a_n) f_n(x) + f_{n-1}(a_n);
\end{aligned}$$

wo nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \ldots . f_n(x)$$

ganze rationale algebraische Functionen respective vom Grade

$$n-1, n-2, n-3, n-4, \ldots . 0$$

sind, deren höchste Glieder sämmtlich den Coefficienten A haben, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die constante Grösse $f_n(x) = A$ sein muss.

Durch successive Anwendung der obigen Gleichungen erhalten wir aber leicht für $f(x)$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
f(x) = \quad & f(a_1) \\
& + (x-a_1) f_1(a_2)
\end{aligned}$$

*) Eine andere Darstellung des Beweises dieses Satzes s. m. Archiv. Thl. II. S. 354.

Digitized by Google

$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

von welchem sich nun die folgenden Anwendungen machen lassen.

§. 3.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die n Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind.

Ist dann $f(a_1)=0$, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f(x) = (x-a_1)f_1(a_2)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_2) = (a_2-a_1)f_1(a_2),$$

und folglich, wenn $f(a_2)=0$ ist, weil die Grössen a_1 und a_2 ungleich sind, also nicht $a_2-a_1=0$ ist, jederzeit $f_1(a_2)=0$.

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)f_2(a_3)$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4)$$

u. s. w.

$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n)$$
$$+A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

also

$$f(a_3) = (a_3-a_1)(a_3-a_2)f_2(a_3),$$

und folglich, wenn $f(a_3)=0$ ist, weil die Grössen a_1, a_2, a_3 unter einander ungleich sind, also nicht

Digitized by Google

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)=0$$

ist, jederzeit $f_2(a_3)=0$.

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} f(x)= \;& (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_3(a_4) \\ & \text{u. s. w.} \\ & +(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1}) \\ & +(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})f_{n-1}(a_n) \\ & +A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n), \end{aligned}$$

also

$$f(a_4)=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)f_3(a_4),$$

und folglich, wenn $f(a_4)=0$ ist, da die Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 unter einander ungleich sind, also nicht

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=0$$

ist, jederzeit $f_3(a_4)=0$.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man übersieht aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, dass, wenn die n Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots a_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind und

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist, jederzeit auch

$$f_1(a_2)=0,\ f_2(a_3)=0,\ f_3(a_4)=0,\ f_4(a_5)=0,\ \ldots f_{n-1}(a_n)=0$$

ist. Dann ist aber nach dem obigen allgemeinen für die Function $f(x)$ gefundenen Ausdrucke

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots\ldots(x-a_n),$$

und wir gelangen daher jetzt zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ des $n$ten Grades, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, jederzeit verschwindet, wenn man für x nach und nach die n sämmtlich unter einander ungleichen Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots a_n$$

setzt, so dass

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist; so ist

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n).$$

Digitized by Google

§. 4.

Könnte es ausser den sämmtlich von einander verschiedenen Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

für welche

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0,\ f(a_4)=0,\ \ldots f(a_n)=0$$

ist, noch eine von diesen Grössen verschiedene Grösse α geben, für welche

$$f(\alpha)=0$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter der gemachten Voraussetzung

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

ist,

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n)=0$$

sein, welches ungereimt ist, da, weil nach der Voraussetzung α keiner unter den Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

gleich ist, also keiner der Factoren

$$\alpha-a_1,\ \alpha-a_2,\ \alpha-a_3,\ \alpha-a_4,\ldots.\ \alpha-a_n$$

verschwindet, und natürlich auch der Coefficient A des höchsten Gliedes der Function $f(x)$ nicht verschwinden kann, weil dieselbe sonst, wie doch angenommen wurde, nicht von dem $n$ten Grade sein könnte. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Algebra:

Lehrsatz. Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe der Grösse x, für welche eine von dieser Grösse abhängende ganze rationale algebraische Function verschwindet, kann nie grösser sein als der Grad dieser Function.

§. 5.

Wir wollen jetzt annehmen, dass alle im Obigen gebrauchten Symbole ganze Zahlen bezeichnen, und dass die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_n$$

in Bezug auf eine gewisse Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruent seien.

Digitized by Google

Ist dann $f(a_1)$ durch p theilbar, d. h

$$f(a_1) \equiv 0 (\text{Mod. } p),$$

so ist, weil nach §. 2.

$$f(a_2) = f(a_1) + (a_2 - a_1) f_1(a_2)$$

ist, wenn auch $f(a_2)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_2) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

ist, offenbar auch $(a_2 - a_1) f_1(a_2)$ durch p theilbar, d. h.

$$(a_2 - a_1) f_1(a_2) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p).$$

Weil aber a_1 und a_2 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in $a_2 - a_1$ nicht auf, und muss also nach einem bekannten Satze von den Primzahlen in $f_1(a_2)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_1(a_2) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

sein. Nach §. 2. ist ferner

$$f(a_3) \equiv f(a_1) + (a_3 - a_1) f_1(a_2) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3),$$

und wenn also jetzt auch $f(a_3)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_3) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

ist, so muss offenbar auch

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3)$$

durch p theilbar, d. h.

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

sein. Weil aber a_1, a_2, a_3 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in keiner der Differenzen $a_3 - a_1$, $a_3 - a_2$ auf, und muss also nach demselben Satze von den Primzahlen wie vorher in $f_2(a_3)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_2(a_3) \equiv 0 \ (\text{Mod. } p)$$

sein. Auf ähnliche Art ist nach dem in §. 2. bewiesenen Satze

Digitized by Google

$$\begin{aligned} f(a_4) = \; & f(a_1) \\ & + (a_4 - a_1) f_1(a_2) \\ & + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2) f_2(a_3) \\ & + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4), \end{aligned}$$

und wenn also jetzt auch $f(a_4)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so muss offenbar auch

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4)$$

durch p theilbar, d. h.

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Weil aber a_1, a_2, a_3, a_4 nach der Voraussetzung in Bezug auf die Primzahl p als Modulus nicht congruent sind, so geht p in keiner der Differenzen $a_4 - a_1$, $a_4 - a_2$, $a_4 - a_3$ auf, und muss also nach dem vorher schon mehrmals angewandten Satze von den Primzahlen in $f_3(a_4)$ aufgehen, d. h. es muss

$$f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt jetzt keinem Zweifel mehr, und man übersieht aus dem Vorhergehenden auf der Stelle, dass, wenn die n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander nicht congruent, und die Grössen

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), \ldots f(a_n)$$

sämmtlich durch p theilbar sind, d. h.

$$\begin{aligned} f(a_1) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_2) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_3) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ f(a_4) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p), \\ &\text{u. s. w.} \\ f(a_n) &\equiv 0 \text{ (Mod. } p) \end{aligned}$$

ist: dann jederzeit auch die Grössen

$$f_1(a_2), f_2(a_3), f_3(a_4), f_4(a_5), \ldots f_{n-1}(a_n)$$

durch p theilbar sind, d. h.

Digitized by Google

$$f_1(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_2(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_3(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f_4(a_5) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f_{n-1}(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist. Dann ist aber nach §. 2. offenbar auch die Differenz

$$f(x) - A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

durch p theilbar, d. h.

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p),$$

und wir gelangen daher jetzt zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz. Wenn die ganze rationale algebraische Function $f(x)$ des $n$ten Grades, deren höchstes Glied den Coefficienten A hat, jederzeit einen durch die Primzahl p theilbaren Werth erhält, wenn man für x nach und nach die n in Bezug auf den Modulus p sämmtlich unter einander nicht congruenten Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

setzt, so dass also

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so ist jederzeit für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p).$$

§. 6.

Könnte es ausser den in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruenten n Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

für welche

Digitized by Google

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, noch eine diesen Grössen in Bezug auf den Modulus p nicht congruente Grösse α geben, für welche $f(\alpha)$ durch p theilbar, d. h.

$$f(\alpha) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

wäre, so müsste, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen unter den gemachten Voraussetzungen

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \text{ (Mod. } p)$$

ist, offenbar

$$A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)(\alpha-a_3)(\alpha-a_4)\ldots(\alpha-a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

sein, welches, wenn die Primzahl p in A nicht aufgeht, nach dem oben schon mehrmals angewandten Satze von den Primzahlen ungereimt ist, da p unter den gemachten Voraussetzungen auch in keinem der Factoren

$$\alpha-a_1,\ \alpha-a_2,\ \alpha-a_3,\ \alpha-a_4,\ \ldots\alpha-a_n$$

aufgehen kann. Dies führt uns unmittelbar zu dem folgenden bekannten Fundamentalsatze der Zahlenlehre:

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x ist, und die Primzahl p in dem Coefficienten des höchsten Gliedes dieser Function nicht aufgeht, so kann es nie mehr als n in Bezug auf den Modulus p unter einander nicht congruente Werthe von x geben, für welche

$$f(x) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist.

Andere Beweise dieses Satzes haben Gauss (Disquisitiones arithmeticae. p. 40.), Lagrange (Mem. de l'Acad. des sc. de Berlin. 1767. p. 192.), Legendre (Hist. de l'Acad. des sc. de Paris. 1785.) und Euler (Nov. Comm. Acad. sc. Petrop. T. XVIII. pag. 93.), letzterer jedoch nur für einen besonderen Fall, gegeben. Auch s. m. das Mathematische Wörterbuch. Art. Zahl. Nr. 19. und Archiv der Mathematik und Physik. Thl. II. S. 5.

Digitized by Google

Die oben im Wesentlichen nach Poinsot geführten Beweise der beiden Sätze in §. 4. und dem vorliegenden Paragraphen bieten, wie es uns scheint, vorzüglich deshalb ein besonderes Interesse dar, weil durch dieselben die beiden genannten Theoreme, welche als die Fundamentalsätze der Algebra und der Zahlenlehre betrachtet werden können, auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückgeführt werden, welches auch der wichtigste Grund ist, welcher uns veranlasst hat, dieselben hier mitzutheilen. Ausserdem verdienen dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Strenge gewiss überhaupt recht sehr, bei dem Unterrichte in der Algebra und in der Zahlenlehre benutzt zu werden.

§. 7.

Wir wollen jetzt

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

setzen, und annehmen, dass es n in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruente Werthe

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

von x gebe, für welche

$$\begin{aligned} f(a_1) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_2) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_3) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(a_4) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ &\text{u. s. w.} \\ f(a_n) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

ist. Dann ist nach §. 5. für jedes x

$$f(x) \equiv A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n) \pmod{p}.$$

Bezeichnen wir aber überhaupt die $k$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n$$

durch

$$\mathfrak{B}_k \quad :$$

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$$

so ist nach einem allgemein bekannten Satze

Digitized by Google

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)$$

$$\equiv x^n - \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{2} \cdot x^{n-2}$$

$$- \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{n-1} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{n}$$

und folglich nach dem Obigen für jedes x:

$$A x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$\equiv A x^n - A \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{1} \cdot x^{n-1}$$

$$+ A \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{2} \cdot x^{n-2}$$

$$- A \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{3} \cdot x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{n-1} \cdot x$$

$$+ (-1)^n \cdot A \cdot \mathfrak{K}_{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}^{n} \quad (\text{Mod. } p).$$

Also ist, wenn wir der Kürze wegen

$$f_1(x) = \{A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \Big\} x^{n-1}$$
$$+ \{A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \Big\} x^{n-2}$$
$$+ \{A_3 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \Big\} x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ \{A_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \Big\} x$$
$$+ A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n}$$

setzen, für jedes x

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Folglich ist

$$f_1(a_1) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_1(a_2) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_1(a_3) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_1(a_4) \equiv 0 \pmod{p},$$

u. s. w.

$$f_1(a_n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dies könnte, da n die Anzahl der in Bezug auf die Primzahl p als Modulus sämmtlich unter einander nicht congruenten Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n;$$

der Grad der Function $f_1(x)$ aber nur $n-1$ ist, nach dem in §. 6. bewiesenen Lehrsatze nicht der Fall sein, wenn die Primzahl p in dem Coefficienten

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1}$$

nicht aufginge, d. h. wenn nicht

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \equiv 0 \pmod{p}$$

wäre. Also ist

Digitized by Google

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \equiv 0 \pmod{p},$$

und folglich nach der Lehre von den Congruenzen für jedes x auch

$$\left.\left| A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \right.\right\} x^{n-1} \equiv \pmod{p}.$$

Aus dieser Congruenz und der Congruenz

$$f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

folgt nach der Lehre von den Congruenzen, wenn wir der **Kürze** wegen

$$f_2(x) = \left.\left| A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \right.\right\} x^{n-2}$$

$$+ \left.\left| A_3 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \right.\right\} x^{n-3}$$

u. s. w.

$$+ \left.\left| A_{n-1} - (-1)^{n-1} A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \right.\right\} x$$

$$+ A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n}$$

setzen, für jedes x:

$$f_2(x) \equiv 0 \pmod{p};$$

also:

$$f_2(a_1) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_2(a_2) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_2(a_3) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$f_2(a_4) \equiv 0 \pmod{p},$$
u. s. w.)
$$f_2(a_n) \equiv 0 \pmod{p};$$

welches aus ganz ähnlichen Gründen wie vorher nach §. 6. wieder nicht möglich ist, wenn nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2}$$

durch die Primzahl p theilbar, oder nicht

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \pmod{p}$$

Digitized by Google

ist. Also ist

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist nun schon klar, und wir werden daher jetzt zu dem folgenden Satze geführt:

Lehrsatz. Wenn

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

und für n in Bezug auf die Primzahl p als Modulus unter einander nicht congruente Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ als Werthe von x

$$f(a_1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_2) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_3) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$
$$f(a_4) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

u. s. w.

$$f(a_n) \equiv 0 \text{ (Mod. } p)$$

ist, so ist jederzeit

$$A_1 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_2 - A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_2} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_3 + A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_3} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

u. s. w.

$$A_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_{n-1}} \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

$$A_n - (-1)^n \cdot A \cdot \underset{(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)}{\mathfrak{K}_n} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

§. 8.

Es seien jetzt

$$a, b, c, d, e, \ldots.$$

alle Zahlen, welche kleiner als die beliebige Zahl p und zu der

Digitized by Google

selben relative Primzahlen sind, und x sei eine ganz beliebige Zahl, welche mit p relative Primzahl ist. Dann sind auch die Producte

$$ax, bx, cx, dx, ex, \ldots.$$

mit p relative Primzahlen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, und also eine die Einheit übersteigende Primzahl z. B. in ax und p aufginge, nach einem bekannten Satze diese Primzahl entweder in a oder in x aufgehen müsste, so dass also entweder a oder x mit p nicht relative Primzahl sein würde, was gegen die Voraussetzung streitet. Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \end{aligned}$$

u. s. w,

wo

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots.$$

sämmtlich kleiner als p sind, so kann leicht gezeigt werden, dass diese Grössen sämmtlich zu p relative Primzahlen und sämmtlich unter einander ungleich sind. Wäre nämlich z. B. a_1 nicht mit p relative Primzahl, und ginge folglich eine die Einheit übersteigende Primzahl in a_1 und p auf, so würde wegen der Gleichung

$$ax = \alpha p + a_1$$

diese Primzahl auch in ax, folglich nach dem schon vorher angewandten Satze entweder in a oder in x aufgehen, und es würde also entweder a oder x nicht mit p relative Primzahl sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Wäre ferner z. B. $a_1 = d_1$, so wäre wegen der beiden Gleichungen

$$ax = \alpha p + a_1, \; dx = \delta p + d_1$$

offenbar

$$ax - \alpha p = dx - \delta p,$$

und folglich

$$(a-d)x = (\alpha - \delta)p.$$

Also ginge p, welches mit x relative Primzahl ist, in $(a-d)x$ auf, und müsste folglich nach einem bekannten Satze in $a-d$ aufgehen, was ungereimt ist, da nach der Voraussetzung der absolute Werth von $a-d$ offenbar kleiner als p ist. Weil nun hiernach die Zahlen

Digitized by Google

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots,$$

deren Anzahl der Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots.$$

gleich ist, sämmtlich kleiner als p, unter einander ungleich und zu p relative Primzahlen sind, so ist klar, dass ohne Rücksicht auf die Ordnung die Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots.$$

und

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots.$$

von einander nicht verschieden sind, und dass also jederzeit

$$abcde\ldots. = a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots.$$

ist.

Bezeichnen wir aber die Anzahl der Zahlen

$$a, b, c, d, e, \ldots.,$$

welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind, durch n, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax &= \alpha p + a_1, \\ bx &= \beta p + b_1, \\ cx &= \gamma p + c_1, \\ dx &= \delta p + d_1, \\ ex &= \varepsilon p + e_1, \end{aligned}$$

u. s. w.

durch Multiplication auf der Stelle, dass die Differenz der Producte

$$x^n\, abcde\ldots \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \ldots,$$

d. h. nach dem Vorhergehenden die Differenz der Producte

$$x^n\, abcde\ldots \text{ und } abcde\ldots$$

durch p theilbar, oder dass

$$(x^n - 1)\, abcde\ldots. \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Weil nun aber

$$a, b, c, d, e, \ldots.$$

mit p sämmtlich relative Primzahlen sind, so muss nach einem bekannten Satze p in $x^n - 1$ aufgehen, d. h. es muss

Digitized by Google

$$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sein, wobei nach dem Obigen vorausgesetzt wird, dass x und p relative Primzahlen sind, und n die Anzahl der Zahlen bezeichnet, welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind.

Ist p eine Primzahl, so sind

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p-1$$

die sämmtlichen Zahlen, welche kleiner als p und zu p relative Primzahlen sind. Wenn also nur die Primzahl p in x nicht aufgeht, so ist nach dem Vorhergehenden jederzeit

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

d. h. unter den gemachten Voraussetzungen ist $x^{p-1}-1$ immer durch p theilbar, welches bekanntlich der Fermat'sche Satz ist.

§. 9.

Wenn wir nun unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl ist, für jedes x

$$f(x) = x^{p-1} - 1$$

setzen, so ist nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Fermat'schen Satze

$$\begin{aligned} f(1) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(2) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(3) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ f(4) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ &\text{u. s. w.} \\ f(p-1) &\equiv 0 \pmod{p}; \end{aligned}$$

und folglich nach dem in §. 5. bewiesenen Lehrsatze für jedes x:

$$f(x) = x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(p-1)) \pmod{p}.$$

Für $x=0$ ist also

$$-1 \equiv (-1)(-2)(-3)\ldots(-(p-1)) \pmod{p},$$

d. h., weil $p-1$ offenbar eine gerade Zahl ist,

$$-1 \equiv 1.2.3.4\ldots(p-1) \pmod{p},$$

folglich

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Digitized by Google

Wenn also p eine Primzahl ist, so ist die Grösse

$$1.2.3.4\ldots(p-1)+1$$

jederzeit durch p theilbar, welches bekanntlich der Wilson'sche Satz ist.

Man sieht hieraus, wie leicht sich auf diese Weise mit Hülfe der oben bewiesenen allgemeinen Sätze aus dem Fermat'schen Satze der Wilson'sche Satz herleiten lässt, welche Herleitung von Poinsot a. a. O. wenigstens in der obigen Art nicht gegeben worden ist, so wie denn überhaupt die Darstellung in diesem Aufsatze mehreres uns Eigenthümliche enthält, wie man bei der Vergleichung beider Arbeiten finden wird.

§. 10.

Uebrigens ist endlich noch zu bemerken, dass das Wilson'sche Theorem eigentlich nur ein besonderer Fall des in §. 7. bewiesenen Satzes ist.

Wenn wir nämlich ganz wie im vorhergehenden Paragraphen jetzt wieder

$$f(x) = x^{p-1}-1$$

setzen, so ist in §. 7. der Exponent $n=p-1$, und

$$A=1,\ A_1=0,\ A_2=0,\ldots A_{p-2}=0,\ A_{p-1}=-1;$$

ferner

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ldots a_{p-1}=p-1.$$

Also hat man nach dem in §. 7. bewiesenen Satze offenbar die folgenden Congruenzen:

$$\mathfrak{K}_1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

$$\mathfrak{K}_2 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

$$\mathfrak{K}_3 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

u. s. w.

$$\mathfrak{K}_{p-2} \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

$$1+(-1)^{p-1}\ \mathfrak{K}_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

Digitized by Google

Aber

$$\mathfrak{Z}_{p-1} \qquad = 1.2.3.4\ldots(p-1),$$
$$(1, 2, 3, \ldots, p-1)$$

und folglich

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1).(-1)^{p-1} \equiv 0 \text{ (Mod. } p).$$

Ist nun die Primzahl p grösser als 2, so ist $p-1$ eine gerade Zahl, also

$$1 + 1.2.3.4\ldots(p-1) \equiv 0 \text{ (Mod. } p),$$

wobei aber sogleich in die Augen fällt, dass diese Congruenz auch für $p=2$ gilt, und daher allgemein ist.

Alle vorher aus dem in §. 7. bewiesenen Satze hergeleiteten Congruenzen sind übrigens an sich wichtig und interessant.

XLIV.

Applicàtions des théorèmes relatifs à la théorie des fractions partielles.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

§. 1.

Pour qu'on puisse suivre avec plus de commodité les applications suivantes, nous réproduirons d'abord le théorème III. du Nro. XXXV. T. VII. de ce journal.

Théorème. Soit f_x une fonction rationnelle et entière de x du degré p.

Soit F_x une fonction rationnelle et entière de x du degré q, représentée par l'équation

$$F_x = (x-r_0)^{n_0-s}(x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m},$$

Digitized by Google

(n_0-s), n_1, n_2, ... n_m étant des nombres entiers et positifs, et r_0, r_1, r_2, ... r_m les racines inégales de l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, dont r_0 soit toujours égale à zéro, ensorte que $n_0-s=0$, lorsque l'équation $F_x=0$ n'aura pas une racine égale à zéro.

Soit φ_x une fonction auxiliaire, liée à F_x par l'équation

$$\varphi_x = (x-r_0)^s F_x,$$

s étant un nombre entier et positif, pris de manière à satisfaire à la condition

$$s+q>p.$$

Soit enfin, pour abréger,

$$T_k = n_k \frac{r_k^s f_{r_k}}{\partial_{r_k}^{n_k} \varphi_{r_k}},$$

h et k étant des nombres entiers et positifs. On aura

$$(1) \qquad \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1} T_k \left\{ \frac{1}{x-r_k} + \frac{x^h}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Ajoutons encore que $\partial_x^n \psi_x$ désigne la dérivée, et $\partial_x^{-n} \psi_x$ l'intégrale de l'ordre n par rapport à x d'une fonction quelconque ψ_x, ensorte que

$$(2) \qquad \partial_x^n \psi_x = \frac{d^n \psi_x}{dx^n}, \quad \partial_x^{-n} \psi_x = \int^n \psi_x \, dx^n.$$

Cela posé, on voit que par la formule (1) toute fonction rationnelle et fractionnaire de x sera réduite aux expressions de la forme

$$\frac{1}{x-r}, \quad x^h,$$

h étant un nombre entier et positif. Il suffit donc de savoir appliquer une opération relative à x aux expressions

$$\frac{1}{x-r}, \quad x^h,$$

pour qu'on puisse appliquer cette opération à toute fonction rationnelle et fractionnaire de x. On sait, par exemple,

$$\partial_x^n \frac{1}{x-r} = \frac{n!}{(x-r)^{n+1}},$$

et

Digitized by Google

$$\partial_x^n\, x^h = \frac{h!}{(h-n)!}\, x^{h-n}\,,$$

en désignant le produit $1.2\ldots n$ par $n!$. Donc la formule (1) donnera

$$(3)\qquad \partial_x^n \frac{f_x}{F_x} = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1}\, T_k \left\{ \frac{n!}{(x-r_k)^{n+1}} + \frac{h!}{(h-n)!}\, \frac{x^{h-n}}{r_k^{h+1}} \right\}.$$

Pareillement on a

$$\partial_x^{-n}\, \frac{1}{x-r} = \frac{(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ l(x-r) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n-1} \right\} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

et

$$\partial_x^{-n}\, x^h = \frac{h!}{(h+n)!}\, x^{h+n} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

$c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ étant des constantes d'intégration. Donc on tire de la formule (1)

$$(4)\qquad \begin{cases} \partial_x^{-n}\, \dfrac{f_x}{F_x} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} \\ + \displaystyle\sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1}\, T_k \left\{ \frac{(x-r_k)^{n-1}}{(n-1)!} \left[l(x-r_k) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n-1} \right] + \frac{h!}{(h+n)!}\, \frac{x^{h+n}}{r_k^{h+1}} \right\}. \end{cases}$$

Ce n'est pas tout. La lettre x étant générale peut être remplacée par une caractéristique, et la formule (1) fournit le moyen de trouver l'opération indiquée par une fonction rationnelle et fractionnaire de cette caractéristique. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

§. II.

Substituons d'abord la caractéristique ∂_x à x dans la formule (1), alors, en désignant par φ_x une fonction quelconque de la variable x à laquelle se rapporte le signe ∂_x, on aura

$$(1)\qquad \frac{f\partial_x}{F\partial_x}\, \varphi_x = \sum_{k=0}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=s} \partial_{r_k}^{n_k-1}\, T_k \left\{ \frac{1}{\partial_x - r_k} + \frac{\partial_x^h}{r_k^{h+1}} \right\} \varphi_x\,,$$

et la recherche de l'expression

$$\frac{f\partial_x}{F\partial_x}\, \varphi_x\,,$$

Digitized by Google

sera réduite à la recherche des expressions

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\varphi_x\,,\quad \partial_x^h\,\varphi_x\,.$$

Mais f_x étant une fonction rationnelle et entière de x, on trouvera directement $f\partial_x\ \varphi_x$. Nous faisons donc pour plus de simplicité

$$f_x = 1\,,$$

de sorte qu'on peut prendre $s=0$ et $n_0=0$. Dans ce cas la formule (1) §. I. se réduira à

$$\frac{1}{F_x} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\,\frac{R_k}{x-r_k}\,, \tag{2}$$

et l'équation (1) §. II. deviendra

$$\frac{1}{F\partial_x}\,\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\,R_k\,\frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x\,, \tag{3}$$

R_k et F_x étant déterminés par les équations

$$R_k = \frac{n_k}{\partial_{r_k}^{n_k}\ F_{r_k}}\,, \tag{4}$$

$$F_x = (x-r_1)^{n_1}\,(x-r_2)^{n_2}\ldots(x-r_m)^{n_m}. \tag{5}$$

Posons maintenant

$$y = \frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x\,; \tag{6}$$

on aura

$$(\partial_x - r_k)\ y = \varphi_x\,,$$

ou

$$\partial_x\, y - r_k\, y = \varphi_x\,,$$

équation differentielle à laquelle on satisfait en prenant

$$y = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\ \varphi_x\,dx\,,$$

et substituant cette valeur de y dans l'équation (6) on trouvera

$$\frac{1}{\partial_x - r_k}\,\varphi_x = e^{r_k x}\int e^{-r_k x}\ \varphi_x\,dx.$$

Donc l'équation (3) se changera en

Digitized by Google

$$(7) \qquad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, e^{r_k x} \int e^{-r_k x}\, \varphi_x\, dx,$$

et la recherche de l'expression

$$\frac{1}{F\partial_x}\varphi_x$$

dépendra d'opérations connues.

Les constantes d'intégration sont comprises implicitement dans le second membre de l'équation (7). Pour les avoir explicites, nous rappelons la formule

$$\chi_x \int \psi_x\, dx = \int_x^x \chi_x\, \psi_{x'}\, dx' + \chi_x\, C,$$

x étant une valeur particulière de x, et C désignant une quantité indépendante de x, mais du reste arbitraire et fonction de toutes les variables autres que x qui soient contenues dans la fonction ψ_x. Daprès cela la formule (7) sera mise sous la forme

$$(8) \qquad \frac{1}{F\partial_k}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')}\, \psi_{x'}\, dx' + K,$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, e^{r_k x}\, C,$$

C étant fonction arbitraire de r et k, mais indépendante de x.

D'ailleurs on a suivant une formule connue

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} e^{r_k x}\, CR_k = \sum_{h=0}^{h=n_k} \overset{h}{(n_k-1)}\, \partial_{r_k}^{h} e^{r_k x}\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

ou

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} e^{r_k x}\, CR_k = \sum_{h=0}^{h=n_k} \overset{h}{(n_k-1)}\, e^{r_k x}\, x^h\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

h étant un nombre entier, et $\overset{h}{(n_k-1)}$ étant déterminé par l'équation

$$\overset{h}{(n_k-1)} = \frac{(n_k-1)(n_k-2)\ldots(n_k-h)}{1.2.3.4\ldots\ h}.$$

Or, puisque $\overset{h}{(n_k-1)}$ et R_k sont indépendants de x, et que C représente une quantité arbitraire mais indépendante de x, on substituera simplement C à

$$\overset{h}{(n_k-1)}\, \partial_{r_k}^{n_k-1-h} CR_k,$$

Digitized by Google

e qui fait dépendre C de h: donc on aura

$$\partial_{r_k}^{n_k-1} R_k e^{r_k x} C = \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C,$$

et l'équation (9) se réduit à

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C. \tag{10}$$

Les opérations indiquées dans le second membre de cette équation sont relatives à k et h. D'après ce qui a été dit, la lettre C sera par suite censée fonction de k et h, et pour exprimer cette dépendance, nous remplaçons C par $C_{k,h}$. Avec cette distinction nous substituons la valeur de K de l'équation (10) dans la formule (8), et il viendra

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx' \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} e^{r_k x} x^h C_{k,h}. \end{array}\right. \tag{11}$$

En vertu d'une formule connue, on développera encore la dérivée

$$P = \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx', \tag{12}$$

de manière qu'on ait

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} (n_k-1)^h \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \partial_{r_k}^h \int_x^x e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx',$$

ou

$$P = \sum_{h=0}^{h=n_k} Q_{k,h} \int_x^x (x-x')^h e^{r_k(x-x')} \varphi_{x'}\, dx', \tag{13}$$

en posant, pour abréger,

$$Q_{k,h} = (n_k-1)^h \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k,$$

ou, suivant l'équation (4),

$$Q_{k,h} = (n_k-1)^h n_k \partial_{r_k}^{n_k-1-h} \frac{1}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}. \tag{14}$$

L'équation (13), jointe à l'équation (12), transformera la formule (11) en

Digitized by Google

$$(15)\quad \left\{\frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\sum_{h=0}^{h=n_k}\left\{\begin{matrix} Q_{k,h}\int_x^x (x-x')^h\, e^{r_k(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' \\ + e^{r_k x}\, x^h\, C_{k,h}\end{matrix}\right\}.\right.$$

Les formules (11) et (15) sont générales et subsistent pour toute fonction rationnelle et entière F_x et pour toute fonction φ_x. Elles se simplifieront en attribuant à F_x une forme particulière.

1. Lorsque l'équation

$$F_x = 0,$$

résolue par rapport à x, n'a pas de racines égales, c'est-à-dire qu'on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1,$$

la formule (11) se réduit à

$$(16)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1}\left\{R_k\int_x^x e^{r_k(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' + e^{r_k x}\,C_k\right\}.$$

2. Lorqu'on fait $m=1$ et qu'on substitue simplement n et r à n_1 et r_1, la formule (11) donnera

$$(17)\quad \frac{1}{F\partial_x}\varphi_x = \partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{h=0}^{h=n} e^{rx}\,x^h\,C_h.$$

Or, pour ce cas l'équation (5) se réduit à

$$(18)\quad F_x = (x-r)^n,$$

d'où il suit

$$\partial_x^n\, F_x = n!,$$

et

$$\partial_r^n\, F_r = n!;$$

donc on aura, eu égard à l'équation (4),

$$R_1 = \frac{n}{\partial_r^n\, F_r} = \frac{1}{(n-1)!},$$

puis

$$\partial_r^{n-1} R_1\int_x^x e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^x \partial_r^{n-1}\, e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx'$$
$$= \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx'.$$

Digitized by Google

Cette équation jointe à l'équation (18) change la formule (17) en

$$(19)\quad \frac{1}{(\partial_x - r)^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{r(x-x')}\,\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{h=0}^{h=n} e^{rx}\, x^h\, C_h\,.$$

3. En prenant $r=0$ dans la précédente, on obtient

$$(20)\quad \frac{1}{\partial_x^n}\varphi_x = \int_x^x \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{x'}\,dx' + \sum_{h=0}^{h=n} x^h\, C_h\,,$$

formule par laquelle une intégrale multiple sera ramenée à une intégrale simple.

Il est bon d'observer qu'en résolvant par rapport à u l'équation différentielle

$$F_{\partial_x}\, u = \varphi_x\,,$$

on aura

$$u = \frac{1}{F_{\partial_x}}\,\varphi_x\,,$$

et que par suite la valeur de u sera exprimée par le second membre de la formule (11) ou (15). On voit que cette valeur de u comprend des quantités arbitraires dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. III.

Soit Δ_x un signe d'opération déterminé par l'équation

$$(1)\quad \Delta_x f_x = \frac{f_{x+\varepsilon} - f_x}{\varepsilon}\,.$$

Substituons Δ_x à x dans la formule (2) §. II., et appliquons les opérations à une fonction φ_x. On aura

$$(2)\quad (F_{\Delta_x})^{-1}\,\varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1}\, R_k\, \frac{1}{\Delta_x - r_k}\,\varphi_x\,.$$

Or, en posant

$$y = \frac{1}{\Delta_x - r_x}\,\varphi_x\,,$$

il suit

$$\Delta_x\, y - r_k\, y = \varphi_x\,,$$

Digitized by Google

équation aux différences finies, qui sera verifiée en prenant

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k}(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Sigma (1+\varepsilon r_k)^{-\frac{x}{\varepsilon}} \varphi_x ,$$

ou

$$y = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

x étant une valeur particulière de x, le signe Σ se rapportant à la variable x', dont l'accroissement est représenté par ε, et Π_x étant une fonction qui ne change pas, si l'on attribue à x l'accroissement ε, mais du reste arbitraire et fonction de r et k. On aura par suite

$$\frac{1}{\Delta_x - r_k} \varphi_x = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x ,$$

ce qui change la formule (2) en

$$(3) \quad (F_{\Delta_x})^{-1} \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}} \varphi_{x'} + K,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} R_k \Pi_x .$$

Suivant une formule connue on déduit de celle-ci

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} {}^{h}(n_k-1)\, \partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x$$

et comme on a

$$\partial_{r_k}^{h} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} = x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\,\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}-h} ,$$

il viendra

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \frac{{}^{h}(n_k-1)}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi$$

Or, $\frac{{}^{h}(n_k-1)}{(1+\varepsilon r_k)^h}$ et R_k étant indépendants de x, et Π_x représentant une fonction arbitraire des variables autres que x, on substituera simplement Π_x à

$$\frac{{}^{h}(n_k-1)}{(1+\varepsilon r_k)^h} \partial_{r_k}^{n_k-1-h} R_k \Pi_x ,$$

Digitized by Google

ce qui fait dépendre Π_x de h: donc on aura

$$K = \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_x .$$

C'est cette valeur de K qu'il faut substituer dans la formule (3), et pour mettre en évidence que Π_x dépend de k et h, on pourra écrire $\Pi_{x,k,h}$ au lieu de Π_x. Avec cette distinction il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} (F_{\Delta_x})^{-1}\ \varphi_x = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} \dfrac{\varepsilon R_k}{1+\varepsilon r_k} \sum_{x'=x}^{x'=x} (1+\varepsilon r_k)^{\frac{x-x'}{\varepsilon}}\ \varphi_{x'} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)\ldots(x-\overline{h-1}\varepsilon)(1+\varepsilon r_k)^{\frac{x}{\varepsilon}} \Pi_{x,k,h}. \end{cases}$$

Remarquons qu'on peut faire subir à la formule (4) des transformations et des simplifications semblables à celles que l'on a fait subir à la formule (11) §. II. Observons de plus, qu'en résolvant par rapport à u l'équation aux differences finies

$$F_{\Delta_x}\ u = \varphi_x ,$$

le signe Δ_x étant toujours déterminé par l'équation (1), on aura

$$u = (F_{\Delta_x})^{-1}\ \varphi_x .$$

Donc la valeur de u sera exprimée par le second membre de l'équation (4), et l'on voit qu'elle contiendra des fonctions périodiques dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au dégré de la fonction F_x par rapport à x. Ajoutons qu'en vertu de l'équation (1) le signe Δ_x se réduira au signe ∂_x, lorsqu'on fait

$$\varepsilon = 0,$$

et que par conséquent la formule (4) réproduira la formule (11) §. II.

§. IV.

En adoptant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, et remplaçant x par le signe $\frac{\partial_x}{\partial_y}$ dans la formule (2) §. II., il vient

$$\left(F_{\frac{\partial_x}{\partial_y}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y} .$$

Digitized by Google

Soit $\varphi_{x,y}$ une fonction des variables x, y, auxquelles se rapportent les signes ∂_x, ∂_y. On déduit de l'équation précédente

$$\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\partial_y}{\partial_x - r_k \partial_y} \varphi_{x,y},$$

et, en vertu des principes établis dans le §. II., cette formule sera mise sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')\partial_y}\, \partial_y\, \varphi_{x',y}\, dx',\\ + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h\, e^{r_k x \partial_y}\, C_{y,k,h}.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a généralement

$$(2)\qquad e^{a\partial_\nu}\, \psi_\nu = \psi_{\nu+a},$$

et

$$(3)\qquad \partial_{\nu+a'}^{n}\, \psi_{\nu+a} = \partial_\nu^n\, \psi_{\nu+a},$$

ce qui change la précédente en

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \varphi_{x,y} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \partial_y\, \varphi_{x',y+r_k(x-x')}\, dx'\\ + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h\, C_{y+r_k x,k,h},\end{aligned}\right.$$

formule qui fait voir comment l'opération

$$\left(\frac{F\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1}$$

peut être appliquée a une fonction quelconque de x et y. Posons maintenant

$$(5)\qquad \varphi_{x,y} = \partial_y^{-p} f_{x,y},$$

p étant le degré de F_x par rapport à x. On aura

$$\partial_y\, \varphi_{x',y} = \partial_y^{-(p-1)} f_{x',y},$$

et, en vertu de la formule (20) §. II.,

$$\partial_y\, \varphi_{x',y} = \int_y^y \frac{(y-y')^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dy' + \sum_{h=0}^{h=p-1} y^h\, B_h,$$

y étant une valeur particulière de y, et B_h désignant une quantité

Digitized by Google

indépendante de y, mais du reste arbitraire et fonction de h et x. De plus on tire de la précédente, eu égard à la formule (3),

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_y\, \varphi_{x',\,y+r_k(x-x')} = \displaystyle\int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dy' \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h\, B_h\,. \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $\varphi_{x,y}$ et $\partial_y\, \varphi_{x',\,y+r_k(x-x')}$ tirées des équations (5) et (6) dans la formule (4), il viendra

$$(7)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} F\partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y} = \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'}\, dx'\, dy' \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h\, C_{y+r_k x,\,k,\,h} + H, \end{cases}$$

la valeur de H étant fournie par l'équation

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} [y+r_k(x-x')]^h\, B_h\, dx'.$$

Puis on a

$$[y+r_k(x-x')]^h = \sum_{n=0}^{n=h+1} \binom{n}{h} y^{h-n}\, r_k^n\, (x-x')^n\,,$$

n étant un nombre entier: donc

$$H = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \binom{n}{h} y^{h-n}\, r_k^n\, (x-x')^n\, B_h\, dx'\,,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$(8)\qquad H = \int_x^x \sum_{h=0}^{h=p-1} \sum_{n=0}^{n=h+1} \binom{n}{h} B_h\, y^{h-n}\, (x-x')^n\, N\, dx'\,,$$

ayant fait, pour abréger,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k\, r_k^n\,,$$

ou bien, suivant l'équation (4) §. II.,

$$N = \sum_{k=1}^{k=m+1} n_k\, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^n}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}}\,.$$

Digitized by Google

Mais, en vertu du théorème V. du Nr. XXXV. T. VII. de ce journal, on a

$$\sum_{k=1}^{k=m+1} n_k \, \partial_{r_k}^{n_k-1} \frac{r_k^n}{\partial_{r_k}^{n_k} F_{r_k}} = 0,$$

pour tout nombre entier et positif n inférieur au degré de la fonction F_x diminué de l'unité. On aura par conséquent

$$N = 0,$$

lorsque n sera un nombre entier et positif inférieur à $p-1$. Or, n est non seulement un nombre entier, mais l'équation (8) fait voir que n représentera un des nombres $0, 1, 2, \ldots h$, et h un des nombres $0, 1, 2, \ldots p-2$, de sorte que n sera toujours inférieur à $p-1$. Donc on aura

$$N = 0,$$

et par suite

$$H = 0;$$

ce qui montre que les fonctions arbitraires B_h comprises dans H disparaîtront de la formule (7), laquelle sera en conséquence

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y} \\ = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x \int_y^{y+r_k(x-x')} \frac{[y-y'+r_k(x-x')]^{p-2}}{(p-2)!} f_{x',y'} \, dx' dy \\ \qquad + \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=0}^{h=n_k} x^h \, C_{y+r_k x, k, h} \, . \end{array} \right.$$

Remarquons que lorsque l'équation aux dirivées partielles

$$\partial_y^p \, F\frac{\partial_x}{\partial_y} u = f_{x,y},$$

dans laquelle $\partial_y^{-p} \, F\frac{\partial_x}{\partial_y}$ représente une fonction homogène du degré p par rapport aux caractéristiques ∂_x, ∂_y, sera résolue par rapport à u, il viendra

$$u = \left(F\frac{\partial_x}{\partial_y}\right)^{-1} \partial_y^{-p} f_{x,y},$$

d'où il suit que la valeur de u sera exprimée par le second

Digitized by Google

membre de la formule (9). Ajoutons que cette valeur de u comprend des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

ou égal au degré de la fonction F_x par rapport à x.

§. V.

La formule (1) §. IV. n'est qu'un cas particulier de la formule plus générale

$$(1) \qquad \left(F\begin{matrix}\partial_x \\ \nabla\end{matrix}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,..} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \frac{\nabla}{\partial_x - r_k \nabla} \varphi_{x,y,z,..},$$

∇ étant une fonction des signes $\partial_y, \partial_z, \ldots$, et $\varphi_{x,y,z,\ldots}$ une fonction des variables x, y, $z,..$, auxquelles se rapportent les signes $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \ldots$. Cette formule se déduit de la formule (2) §. II. en substituant le signe ∂_x à x et appliquant les opérations à la fonction $\varphi_{x,y,z,..}$. D'après ce qui a été dit dans le §. II. on en déduit

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(F\begin{matrix}\partial_x \\ \nabla\end{matrix}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,..} &= \sum_{k=1}^{k=m+1} \partial_{r_k}^{n_k-1} R_k \int_x^x e^{r_k(x-x')\nabla}{}_{\nabla}\, \varphi_{x',y,z}\, dx' \\ &+ \sum_{k=1}^{k=m+1} \sum_{h=1}^{h=n_k} x^h\, e^{r_k x \nabla}\, C, \end{aligned} \right.$$

C étant indépendant de x, mais du reste arbitraire et fonction de k, h, y, z,... . Cette formule fera dépendre l'opération

$$\left(F\begin{matrix}\partial_x \\ \nabla\end{matrix}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z\ldots}$$

d'une opération de la forme

$$(3) \qquad e^{\alpha\nabla} f_{y,z,..} .$$

Lorsque le signe ∇ représente une fonction du premier degré par rapport aux caractéristiques $\partial_y, \partial_z, \ldots$, soit

$$\alpha_\nabla = \alpha\partial_y + \beta\partial_z + \ldots,$$

on aura

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z} = e^{\alpha\partial_y + \beta\partial_z + \ldots} f_{y,z,..} = f_{y+\alpha,z+\beta,..} .$$

Mais le signe ∇ passant le premier degré, il ne sera plus possible d'exprimer l'expression (3) en forme finie. Toutefois, en réduisant en série, on a généralement

Digitized by Google

$$e^{\omega} = \sum_{q=0}^{q=s} \frac{\omega^q}{q!} + \omega^s \int_0^1 \frac{(1-\nu)^{s-1}}{(s-1)!} e^{\nu\omega}\, d\nu,$$

q étant un nombre entier, et s un nombre entier et positif qu'on peut faire accroître jusqu'à l'infini: d'où il suit

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots} = \sum_{q=0}^{q=s} \frac{\alpha^q \nabla^q}{q!} f_{y,z,\ldots} + S, \tag{4}$$

dans laquelle

$$S = \alpha^s \nabla^s \int_0^1 \frac{(1-\nu)^{s-1}}{(s-1)!} e^{\nu\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots}\, d\nu.$$

On ne saura donc déterminer généralement la valeur de l'opération $e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots}$ pour toute fonction $f_{y,z,\ldots}$ et pour toutes les valeurs qu'on attribue aux variables y, z,.. Mais la fonction $f_{y,z,\ldots}$, étant rationnelle et entière par rapport à $y, z, \ldots$, ou du moins développable en série convergente pour toute valeur des variables $y, z, \ldots$, on aura

$$S = 0,$$

lorsqu'on attribue à s une valeur infiniment grande, ce qui change l'équation (4) en

$$e^{\alpha\nabla} f_{y,z,\ldots} = f_{y,z,\ldots} + \frac{\alpha}{1!} \nabla f_{y,z,\ldots} + \frac{\alpha^2}{2!} \nabla^2 f_{y,z,\ldots} + \ldots,$$

formule qui, jointe à la formule (2), fera connaître la valeur de l'expression

$$\left(F\frac{\partial_x}{\nabla}\right)^{-1} \varphi_{x,y,z,\ldots}.$$

Dans quelques cas on parvient même à déterminer l'expression (3) à l'aide d'intégrales définies. En effet, partant de l'équation

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du,$$

et remplaçant u par $t-\mu$, on en conclut

$$e^{\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, e^{2t\mu}\, dt,$$

en supposant que μ ne soit pas infini, ou bien, en supposant que le produit

$$e^{-t^2}\, e^{2t\mu}$$

soit nul pour $t = \pm\infty$. Puis on a pareillement

$$e^{\nu^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, e^{2u\nu}\, du,$$

Digitized by Google

et par suite

$$e^{\mu^2}\, e^{\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, e^{2t\mu}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, e^{2u\nu}\, du,$$

ou

$$e^{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2t\mu}\, e^{2u\nu}\, dt\, du,$$

et ainsi de suite. En posant, pour fixer les idées,

$$\mu = \alpha\,\partial_y\,, \quad \nu = \beta\,\partial_z\,,$$

et appliquant les opérations à une fonction de y et z, on tire de la précédente

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)}\, e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z}\, dt\, du,$$

ou

$$e^{\alpha^2\partial_y^2+\beta^2\partial_z^2} f_{y,z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} f_{y+2\alpha t,\, z+2\beta u}\, dt\, du.$$

Ajoutons toutefois que, d'après ce qu'on vient de dire, cette formule subsistera seulement, lorsque l'expression

$$e^{-(t^2+u^2)}\; e^{2\alpha t\partial_y}\, e^{2\beta u\partial_z} f_{y,z}\,,$$

ou

$$e^{-(t^2+u^2)}\; f_{y+2\alpha t,\, z+\beta u}\,,$$

s'évanouira pour $t=\pm\infty$ et $u=\pm\infty$.

Digitized by Google

XLV.

Ein paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

Die durch Gauss begründete Theorie der complexen Zahlen würde nach unserer Ueberzeugung gewiss eine viel schnellere Anerkennung und Verbreitung gefunden haben, wenn es dem berühmten Geometer gefallen hätte, zugleich recht zahlreiche Anwendungen jener Theorie zu geben, und wir glauben selbst, dass es jetzt noch nicht zu spät sei, solche Anwendungen, so viel sich ihrer darbieten wollen und so einfach sie auch an sich sein mögen, aufzusuchen und bekannt zu machen. Am nächsten liegen die Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, wozu wir bereits Thl. VI. S. 225. des Archivs einen Beitrag zu geben versucht haben; ein paar der einfachsten wollen wir hier noch folgen lassen, indem wir die Voraussetzung machen, dass die Einfachheit der Gegenstände in dem angegebenen Grunde ihre Rechtfertigung finden werde. Vielleicht dürften sie Lehrern zur Benutzung beim Unterricht willkommen sein.

1.

Es sei die Gleichung

$$x^n - a = 0 \qquad (1)$$

gegeben, wo a eine positive, negative oder imaginäre Zahl bedeuten mag, so ist die vollständige Auflösung derselben in der Gleichung

Digitized by Google

$$x = \sqrt[n]{((a))}$$

enthalten. Denn man construire die Zahl a in der Ebene der complexen Zahlen, und sie nehme daselbst die Gestalt an $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo φ einen zwischen 0 incl. und 2π enthaltenen Winkel darstellt; so wird der Gleichung (1) jeder complexe Werth für x genügen, dessen Modulus, zur Potenz n erhoben, $= \varrho$ und dessen Winkel, n mal gesetzt, entweder φ selbst oder einen um ein Vielfaches von 2π davon verschiedenen Werth liefert, d. h. man wird haben

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

wo für k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null gesetzt werden darf. Dass dieser Ausdruck übrigens nur n von einander verschiedene Werthe darstellt, die in der Ebene der complexen Zahlen gleichförmig vertheilt auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$ liegen, ergibt sich aus der Construction des Ausdrucks unmittelbar.

So entsprechen z. B. der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = 0$ zu setzen ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$x'' = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\ ^*),$$
$$x''' = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

welche in der Ebene der complexen Zahlen, Taf. VI. Fig. 4., wo AX die positive reelle und AY die positive imaginäre Einheit bezeichnet, durch die Punkte X, B, C dargestellt werden. Diese Werthe wurden erhalten, indem man $k = 0, 1, 2$ setzte; wollte man $k = 3$ etc. annehmen, so würde man nur wieder zu den nämlichen Punkten der Ebene gelangen.

Oder der Gleichung

$$x^3 + 1 = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = \pi$ zu setzen ist, entsprechen die drei Wurzeln:

---

*) Wir verstehen, nach Cauchy, immer die positive Wurzel, wenn wir ein einfaches Wurzelzeichen setzen.

Digitized by Google

$$x' = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$$
$$x'' = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$x''' = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

in Taf. VI. Fig. 5. *B*, *C*, *D*.

Ebenso entsprechen der Gleichung

$$x^3 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}) = 0,$$

wo $\varrho = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ist, die drei Wurzeln:

$$x' = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9} = 0{,}9397 + i.0{,}3420,$$
$$x'' = \cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9} = -0{,}7660 + i.0{,}6428,$$
$$x''' = \cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9} = -0{,}1736 - i.0{,}9848;$$

in Taf. IV. Fig. 6. *B*, *C*, *D*. In allen diesen Fällen führt jeder der Bögen *XB*, *XC*, *XD*, wenn man ihn von *X* aus dreimal auf der Kreisperipherie abträgt, genau wieder zu demjenigen Punkte derselben, der dem Winkel φ der gegebenen Zahl *a* entspricht, nämlich in Taf. VI. Fig. 4. zu *X*, in Taf. VI. Fig. 5. zu *C*, in Taf. VI. Fig. 6. zu *M*; die Punkte *B*, *C*, *D* selbst aber liegen um je 120 Grade aus einander.

Wenn der Modulus ϱ von *a* verschieden von Eins ist, so geht die vorstehende Operation in einem Kreise vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$ vor sich, worüber es keines Zusatzes weiter bedarf. Ebenso bedarf es kaum der Erinnerung, dass, wenn die complexe Zahl *a* in der Form $\alpha + i\beta$ gegeben ist, man ϱ und φ durch die Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

zu bestimmmen hat. Man vergleiche übrigens den schon angeführten Artikel Thl. VI. S. 225. des Archivs, besonders §. 3. u. §. 4.

2.

Es sei ferner die Gleichung

$$x^3 + qx + r = 0 \qquad (2)$$

gegeben, so werden bekanntlich ihre Wurzeln nach der Cardanischen Regel durch die Gleichung

Digitized by Google

$$x = y + z$$

gegeben, wo y und z an die Bedingungen gebunden sind:

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},\quad z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3},$$

$$yz = -\frac{q}{3};$$

von welchen drei Bedingungsgleichungen die letzte nur aussagt, dass das Product der zusammengehörigen Werthe von y und z reell sein müsse, wenn nämlich, wie wir hier annehmen wollen, die Coefficienten der Gleichung (2) gleichfalls reell sind.

Die Werthe von y^3 und z^3 werden reell oder imaginär, je nachdem

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \geqq -\left(\frac{r}{2}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{q}{3}\right)^3 < -\left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

die beiden ersten von jenen Bedingungsgleichungen reduciren sich demnach im ersten Falle auf die Formen

$$y^3 = A,\quad z^3 = B;$$

im zweiten Falle auf die Formen

$$y^3 = A + iB,\quad z^3 = A - iB.$$

In beiden Fällen lässt sich demnach die Aufsuchung der drei Werthe, deren sowohl y als z fähig ist, immer nach der vorhin angegebenen Behandlung der Gleichung (1) leisten, und es tritt mithin der sogenannte Casus irreducibilis hier nicht in den Rang eines Ausnahmefalls, sondern es wird ihm im Geiste der Theorie der complexen Zahlen genau die nämliche Behandlung zu Theil, wie jedem andern in der Cardanischen Formel enthaltenen Falle.

Statt die bekannten allgemeinen Formeln zu entwickeln, die uns keine bestimmten Constructionen gestatten würden, ziehen wir es vor, die Sache an numerischen Beispielen zu erläutern.

Es sei 1) gegeben:

$$x^3 - 18x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{-180},\quad z^3 = -6 - \sqrt{-180},$$
$$= -6 + i.13{,}416,\quad = -6 - i.13{,}416;$$

welche beiden complexen Werthe in Taf. VI. Fig. 7. construirt sind, wo AX die Richtung der positiven reellen und AY die Richtung der positiven imaginären Zahlen bezeichnet; $AB = -6$, $BC = i.13{,}416$, $BD = -i.13{,}416$. Um von hieraus zu den Formen

$$y^3 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^3 = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

überzugehen, hat man

$$\varrho = \varrho' = \sqrt{6^2 + 13{,}416^2} = 14{,}696;$$

$$\cos\varphi = -\frac{6}{14{,}696}, \quad \sin\varphi = \frac{13{,}416}{14{,}696}, \quad \varphi = 114^\circ\,5'\,42'';$$

$$\cos\varphi' = -\frac{6}{14{,}696}, \quad \sin\varphi' = -\frac{13{,}416}{14{,}696}, \quad \varphi' = 245^\circ\,54'\,18'';$$

welche Grössen gleichfalls in der Figur sichtbar sind, nämlich $AC = \varrho$, $XAC = \varphi$, $AD = \varrho'$, $XAD = \varphi'$.

Die Werthe von y und z selbst finden sich nun nach Anleitung der oben gegebenen Auflösung der Gleichung (1). Man construirt aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AE = \varrho^1 = 2{,}449$ einen Kreis und schneidet auf dessen Peripherie von E aus sowohl von EF ein Drittel $= EL$, als auch von EG ein Drittel $= EL'$ ab; alsdann geben die Punkte L und L' resp. zwei Werthe y' und z' von y und z; und geht man von diesen Punkten um je 120° und 240° weiter, so erhält man die beiden andern Werthe von y so wie von z, nämlich y'' und y''' in M und N, und z'' und z''' in M' und N'. Diese sechs Punkte liegen, wovon man sich leicht überzeugen kann, symmetrisch zu beiden Seiten der Achse AX; nämlich es entsprechen einander L und N', M und M', N und L'.

Um endlich x zu finden, hat man diejenigen Werthe von y und z zusammen zu suchen, deren Product reell ist. Aber zwei imaginäre Zahlen geben nur dann ein reelles Product, wenn die Summe ihrer Winkelzahlen Null oder ein beliebiges Vielfaches von π ausmacht *); folglich lehrt ein Blick auf die Figur, dass man x zusammenzusetzen habe

$$\text{entweder aus } L \text{ und } N', \quad x' = y' + z''';$$
$$\text{oder aus } M \text{ und } M', \quad x'' = y'' + z'';$$
$$\text{oder aus } N \text{ und } L', \quad x''' = y''' + z'.$$

Folglich hat man unmittelbar in Betracht der symmetrischen Lage jener Punkte

---

*) Man kann dies analytisch beweisen, indem das Product

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \varrho\varrho'(\cos\overline{\varphi+\varphi'} + i\sin\overline{\varphi+\varphi'})$$

nur dann reell wird, wenn $\sin\overline{\varphi+\varphi'} = 0$ ist. Aber auch auf geometrischem Wege ergibt es sich leicht, indem die mit dem einen Factor nach Vorschrift des andern Factors vorzunehmende Drehung genau die Achse der reellen Zahlen überführen muss.

Digitized by Google

$$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi}{3} = 2 . 2{,}449 . \cos 38^\circ 1' 54'' = 3{,}8587,$$

$$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} = 2 . 2{,}449 . \cos 158^\circ 1' 54'' = -4{,}5433,$$

$$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} = 2 . 2{,}449 . \cos 278^\circ 1' 54'' = 0{,}6845.$$

Es sei 2) gegeben

$$x^3 + 18x + 12 = 0,$$

so hat man

$$y^3 = -6 + \sqrt{252}, \quad z^3 = -6 - \sqrt{252},$$
$$= 9{,}874 \qquad = -21{,}874;$$

welche beiden reellen Werthe durch die Punkte B und C, Taf. VI. Fig. 8., der Achse der reellen Zahlen dargestellt werden mögen, indem $AB = 9{,}874$ und $AC = -21{,}874$. Will man dieselben unter den Formen

$$y^3 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^3 = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

darstellen, so hat man zu setzen

$$\varrho = 9{,}874, \quad \varrho' = 21{,}874;$$
$$\varphi = 0, \qquad \varphi = \pi.$$

Die Werthe von y finden sich nun nach dem Obigen, indem man aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AD = \varrho^{\frac{1}{3}} = 2{,}1453$ einen Kreis construirt und diesen von D aus in drei gleiche Theile theilt; die Theilpunkte D, E, F entsprechen alsdann den drei Werthen y', y'', y''' von y.

Ebenso finden sich die Werthe von z, wenn man gleichfalls aus A einen Kreis mit dem Halbmesser $AG = \varrho'^{\frac{1}{3}} = 2{,}7967$ construirt und diesen von H aus in drei gleiche Theile theilt; hier entsprechen die Theilpunkte J, H, K den drei Werthen z', z'', z''' von z.

Die zusammengehörigen Werthe von y und z, deren Summe x ausmacht, sind hier wieder durch die Bedingung charakterisirt, dass ihr Product reell sein soll. Mit Rücksicht darauf, dass nach dem Obigen in diesem Falle die Summe der Winkelzahlen von y und z Null oder ein Vielfaches von π betragen muss, ist also x zusammenzusetzen

entweder aus D und H, $x' = y' + z''$;
oder aus E und J, $x'' = y'' + z'$;
oder aus F und K, $x''' = y''' + z'''$;

folglich erhält man unmittelbar aus der Figur

Digitized by Google

$$x' = \varrho^{\frac{1}{3}} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \pi = -0{,}6514,$$

$$x'' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin \frac{2\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin \frac{\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 + i\,.\,4{,}2799,$$

$$x''' = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \cos \frac{5\pi}{3} + i\,(\varrho^{\frac{1}{3}} \sin \frac{4\pi}{3} + \varrho'^{\frac{1}{3}} \sin \frac{5\pi}{3})$$
$$= 0{,}3257 - i\,.\,4{,}2799.$$

Welche Abkürzungen sich bei dieser Rechnung anbringen lassen, und wie sich daran eine allgemeine Behandlung der Cardanischen Regel knüpfen lässt, das ist ohne Mühe klar. Bemerken wollen wir nur noch, dass, so wie in der symmetrischen Lage der Werthe von y gegen die von z in Taf. VI. Fig. 7. der Grund zu erkennen ist, wesshalb bei der Addition die rein imaginären Theile verschwanden und alle drei Werthe von x reell wurden, ebenso in der Verletzung dieser Symmetrie in Taf. VI. Fig. 8. der Grund gesucht werden muss, wesshalb hier die imaginären Theile in zwei Fällen stehen bleiben und nur Ein reeller Werth von x erscheint. Wenn die beiden Kreise in Taf. VI. Fig. 8. einander decken, während alles übrige ungeändert bleibt, d. h. wenn $y^3 = -z^3$, so tritt eine symmetrische Lage jener Werthe gegen die Achse AY ein, und es verschwinden mithin aus den Werthen von x die reellen Theile; doch ist dieser Fall der stillschweigenden Voraussetzung entgegen, dass $r \gtrless 0$ sein soll.

3.

Man hat eine Formel, vermittelst deren man die Quadratwurzel aus einer complexen Zahl $a+ib$ auf algebraischem Wege findet, nämlich

$$\sqrt{(a+ib)} = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)\right)} + i\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)\right)}. \qquad (3)$$

Diese Formel finden wir durch geometrische Betrachtung wie folgt.

Wir übertragen die complexe Zahl $a+ib$ auf die Form $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, indem wir setzen

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

so werden nach Vorschrift der Gleichung (1) die beiden Werthe von $\sqrt{((a+ib))}$ dargestellt durch

$$\varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) \text{ und } \varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\frac{\varphi}{2}+\pi + i\sin\frac{\varphi}{2}+\pi),$$

Digitized by Google

welche in den einen Ausdruck

$$\sqrt{((a+ib))} = \pm \varrho^{\frac{1}{2}} (\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2})$$

zusammengefasst werden können. Hierin sind nur für $\cos\frac{\varphi}{2}$ und $\sin\frac{\varphi}{2}$ die bekannten Ausdrücke durch $\cos\varphi$ an die Stelle zu setzen, um zu der Gleichung (3) zu gelangen. Man hat

$$2\cos(\tfrac{\varphi}{2})^2 = 1+\cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\varrho\cos(\tfrac{\varphi}{2})^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},$$

$$\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)\right)};$$

$$2\sin(\tfrac{\varphi}{2})^2 = 1-\cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\varrho\sin(\tfrac{\varphi}{2})^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

$$\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)\right)};$$

und durch Substitution dieser beiden Werthe für $\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}$ und $\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$ entsteht uumittelbar die obige Formel. Man überzeugt sich auch leicht, dass trotz der mehrfachen doppelten Zeichen, welche durch die Rechnung hineingekommen sind, die Formel (3) dennoch nur zwei Werthe enthält; denn die beiden Theile auf der rechten Seite der Gleichung (3) müssen einerlei oder verschiedene Zeichen besitzen, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Wollte man eine ähnliche algebraische Formel für Cubikwurzelausziehung haben, so würde man setzen

$$\sqrt[3]{((a+ib))} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}),$$

$$\text{und} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}),$$

$$\text{und} = \varrho^{\frac{1}{3}} (\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}):$$

und hier würde es nothwendig werden, für $\cos\frac{\varphi}{3}$ und $\sin\frac{\varphi}{3}$ Ausdrücke durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ an die Stelle zu setzen. Aber

Digitized by Google

solche Ausdrücke existiren nicht; denn die Auflösung der bekannten Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos\varphi = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\sin\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{4}\sin\varphi = 0$$

liefert nach der Cardanischen Regel

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{((\cos\varphi + i\sin\varphi))} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{((\cos\varphi - i\sin\varphi))},$$

$$\sin\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{2i}\sqrt[3]{((\cos\varphi + i\sin\varphi))} - \frac{1}{2i}\sqrt[3]{((\cos\varphi - i\sin\varphi))};$$

und diese Ausdrücke fordern genau wieder die Auflösung desjenigen Problems, von dessen Lösung wir ausgegangen sind, so dass wir uns im Cirkel bewegt haben.

Aber man erkennt leicht, dass diese Schwierigkeit mit jener andern zusammenhängt, dass man nicht im Stande ist, durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen; — denn wäre eine Construction zu diesem Zwecke vorhanden, so brauchte man ihr nur mit der Rechnung zu folgen, um auch für jenen Fall die gesuchte Formel zu erhalten; — und es zeigt sich somit, wie die Unauflösbarkeit des berühmten Problems von der Trisectio anguli unmittelbar die Unausführbarkeit der algebraischen Cubikwurzelausziehung aus complexen Zahlen zur Folge hat, ja mit ihr bei unserer geometrischen Auffassung der complexen Zahlen eines und dasselbe ist.

Digitized by Google

XLVI.

Ueber die geometrische Darstellung complexer Functionen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

1.

Wenn man sich von dem Laufe einer Function $y = f(x)$, wo y und x nur reeller Werthe fähig sind, ein anschauliches Bild entwerfen will, so pflegt man in einer Ebene die Werthe von x und y als rechtwinklige Abscissen und Ordinaten zu construiren und die Endpunkte dieser letzteren durch einen Zug zu verbinden, der sodann die geometrische Darstellung jener Function abgiebt. Diese Veranschaulichung hört aber auf anwendbar zu sein, sobald für x und y auch imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, und so pflegt man z. B. überall, wo für gewisse reelle Werthe von x die Werthe von y ins Imaginäre fallen, die betreffende Curve als geschlossen anzusehen und darüber hinaus von einer geometrischen Darstellung der gegebenen Function nicht weiter zu reden. So schätzbar nun aber — und zwar nicht für Lernende allein — selbst zur Lösung rein analytischer Fragen jenes geometrische Hülfsmittel ist, eben so wichtig wird die Frage, ob und wie dasselbe auch auf imaginäre Functionen Ausdehnung finden könne: eine Frage, welche in der von Gauss gegebenen Möglichkeit, imaginären Zahlen eine geometrische Bedeutung abzugewinnen, eine befriedigende Antwort zu versprechen scheint. Wir wollen nachstehend einige Untersuchungen darüber anstellen, wie weit man hierin gelangen kann, und welche Anwendungen sich daraus sowohl für die analytische Geometrie, als auch rückwärts für die Theorie der complexen Zahlen ziehen lassen.

2.

Wollte man unter der Voraussetzung, dass sowohl für x als auch für y imaginäre Werthe zugelassen werden sollen, allgemein

die Aufgabe stellen, die Function $y = f(x)$ nach Analogie der reellen Functionen geometrisch zu construiren, so ist nicht schwer zu übersehen, dass dieser Aufgabe in ihrem vollen Umfange nicht Genüge geleistet werden kann Denn offenbar würde man als Analogon der Abscissen-Achse in der Ebene, hier die Ebene der complexen Zahlen — gleichsam eine Abscissen-Ebene — anzusehen haben, als Analogon der Ordinaten-Achse aber eine mit jener rechtwinklig verbundene zweite Ebene der complexen Zahlen, — eine Ordinaten-Ebene, — zu welcher sodann durch den Endpunkt einer jeden Abscisse eine Parallele gelegt werden könnte, die zu dem festzulegenden Punkte hinführte. Welche Lage man nun auch der Ordinaten-Ebene geben wollte, so würde dennoch immer zwar zu jedem complexen Coordinatenpaar ein bestimmter Punkt des Raumes, aber nicht umgekehrt zu jedem Punkte des Raumes ein bestimmtes Paar, sondern eine unendliche Menge von Paaren complexer Coordinaten gehören; und damit ist die Unzulänglichkeit dieser geometrischen Versinnlichung hinreichend dargethan. Wenn man nun die Ueberlegung macht, dass zwei complexe Coordinaten jederzeit vier von einander unabhängige reelle Grössen enthalten, während deren drei schon zur Festlegung eines Punktes im Raume hinreichen, so liegt der Schluss nahe, dass erst in einem Raume von vier Dimensionen ausführbar sein würde, was uns der thatsächlich vorhandene Raum von drei Dimensionen versagt.

Aber die genannte Unausführbarkeit zieht noch eine andere Folge nach sich. Nimmt man nämlich für den Augenblick einen Raum von vier Dimensionen als zulässig an, so kann man in demselben ebenso, wie in der Ebene die beiden reellen Coordinaten x und y durch die einzige complexe Zahl

$$x + iy$$

dargestellt werden, auch die beiden complexen Coordinaten $x = x' + ix''$ und $y = y' + iy''$ in die eine — wir möchten sagen hypercomplexe Zahl zusammenfassen

$$x' + ix'' + j(y' + iy''),$$

wo $j^2 = i^2 = -1$ sein muss, indem j eine neue imaginäre Einheit bezeichnet, die den rechtwinkligen Uebergang aus der complexen Abscisse in die complexe Ordinate zu vermitteln hat. Dieses findet eine merkwürdige Bestätigung durch eine Untersuchung von Hamilton*). Derselbe stellt nämlich, um aus der Ebene der complexen Zahlen in den Raum überzugehen, hypothetisch die dreitheilige Form auf

$$a + ib + jc,$$

als deren Modulus die positive Quadratwurzel aus $a^2 + b^2 + c^2$ anzusehen ist, und gelangt durch arithmetische Operationen an

*) S. d. Abhandlung: „On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra. By Sir W. R. Hamilton" in dem Philosophical Magazine für 1844 und 1845, wo dieselbe bis jetzt noch nicht geschlossen ist.

Digitized by Google

dieser Form, und mit Festhaltung des Gesetzes, dass der Modulus eines Products gleich dem Producte der Moduli der Factoren sein müsse, zu dem Resultate, dass jedes Product sich unter der viertheiligen Form

$$a + ib + jc + kd$$

darstelle, wo man $ij = -ji = k$ und $k^2 = -1$ zu setzen und die positive Quadratwurzel aus $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ als Modulus derselben anzusehen habe. Das Rechnen mit diesen viertheiligen Formen (Quaternions) liefert aber wieder nur viertheilige Formen, deren Entwickelung den Gegenstand der angeführten Abhandlung ausmacht, und damit scheint in der That unsere oben aufgestellte Form einer hypercomplexen Zahl, als nächster Fortschritt von der complexen Zahl aus, so wie die Forderung eines Raumes von vier Dimensionen zur Ausführung der Operationen an diesen Zahlen, vollkommen gerechtfertigt zu sein.

3.

Aus dem Vorstehenden lässt sich ohne Mühe der Schluss ziehen, dass der Raum von drei Dimensionen in allen denjenigen Fällen zur geometrischen Construction der Function $y = f(x)$ hinreichend sein muss, wo entweder nur x, oder nur y imaginäre Werthe annehmen kann, während die andere Veränderliche reell bleibt.

Es sei erstens nur x imaginärer Werthe fähig, so wird man die Ebene der complexen Zahlen als Ebene der x, und eine im Nullpunkte derselben errichtete unbegränzte Normale als Achse der y anzusehen haben. Jedem complexen Werthe von x gehört sodann vermöge der Gleichung $y = f(x)$ ein bestimmter Punkt des Raumes zu, und umgekehrt, und das Continuum aller dieser Punkte von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ bildet eine Fläche, welche mithin das geometrische Bild der gegebenen Function darstellt.

Es sei zweitens nur y imaginärer Werthe fähig, so wird eine beliebige im Raume gezogene Gerade die Achse der x, und eine im Nullpunkte derselben normal damit verbundene Ebene der complexen Zahlen die Ebene der y abgeben. Hier gehört jedem reellen Werthe von x ein bestimmter Punkt des Raumes zu, und umgekehrt, und das Continuum aller der Function $y = f(x)$ entsprechenden Punkte von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ bildet eine Linie, welche als das geometrische Bild der gegebenen Function anzusehen sein wird.

Setzt man im ersten Falle $x = x' + ix''$, so dass mithin die Achse der x' als Achse der reellen Zahlen und die Achse der x'' als Achse der imaginären Zahlen in der Ebene der x betrachtet wird, so hat man

$$y = f(x' + ix'')$$

Digitized by Google

oder, wie man im Geiste der analytischen Geometrie schreiben würde,

$$y = F(x', x'')$$

als Gleichung der resultirenden Fläche

Setzt man ebenso im zweiten Falle $y = y' + iy''$ und zerfällt $f(x)$ in die beiden Theile $\varphi(x) + i\psi(x)$, so sind gleichfalls im Geiste der analytischen Geometrie

$$y' = \varphi(x), \quad y'' = \psi(x)$$

die beiden Gleichungen der entstehenden Linie.

4.

Es liegt auf der Hand, dass die beiden angegebenen Constructionsmethoden auch dann noch anwendbar bleiben, wenn für beide veränderliche x und y imaginäre Werthe zugelassen werden, aber zugleich eines von den vier Bestimmungsstücken dieser beiden complexen Werthe in der Construction unbeachtet bleiben darf. Mit Hülfe dieser Bemerkung sind wir im Stande, die Mehrzahl der bis jezt gegebenen Beweise des Satzes:

> dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann,

an dem Faden der genannten Constructionsmethoden systematisch zu reproduciren.

Es sei die Function $y = f(x)$ von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

und man erhalte durch die Substitution

$$x = p + iq = r(\cos t + i \sin t)$$

das Resultat

$$y = P + iQ = R(\cos T + i \sin T),$$

so ist zu beweisen, dass man durch schickliche Wahl von x zu dem Resultate $y = 0$, d. h. entweder

$$R = 0,$$

wobei T jeden beliebigen Werth haben kann, oder gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gelangen könne.

Digitized by Google

Beweis von Cauchy *).

Am nächsten dürfte es liegen, da in dem geforderten Endresultate der Werth von T gleichgültig ist, die Grösse

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

als Function von x zu construiren, wobei nach der ersten der obigen Constructionsmethoden zu verfahren sein würde. Die entstehende Fläche liegt, da R nur positiv ist, vollständig auf Einer Seite der Ebene der x; ferner, wenn x über eine gewisse Grösse hinaus wächst, so entfernt sie sich immer weiter von der Ebene der x; folglich muss sie in der Nähe des Nullpunkts dieser Ebene nothwendig wenigstens Ein Minimum besitzen.

Dass nun dieses Minimum nicht von Null verschieden sei, wird von Cauchy auf rein analytischem Wege gezeigt. Wie man zu demselben Resultate auch durch eine geometrische Betrachtung gelangen könne, bei welcher der bis dahin vernachlässigte Werth von T wieder in die Construction hineingezogen wird, haben wir in einem früheren Artikel zu zeigen gesucht; doch gehört diese Betrachtung im Grunde nicht hieher, weil sie das bisherige geometrische Bild verlässt, und findet besser weiter unten ihren Platz.

Dritter Beweis von Gauss **).

Nicht so unmittelbar scheint es sich darzubieten, die Grösse

$$T = \text{arc } tg\left(\left(\frac{Q}{P}\right)\right)$$

als Function von x nach der ersten Methode zu construiren, welche Grösse nämlich für den in Frage stehenden Fall durch die Bedingung charakterisirt wird, dass sie eines jeden beliebigen (reellen) Werthes muss fähig sein. Im Allgemeinen ist T eine vielförmige Function von x, der für jeden Werth des x unendlich viele um je π von einander verschiedene Werthe zukommen; folglich entsprechen im Allgemeinen jeder complexen Abscisse unendlich viele um je π von einander verschiedene Ordinaten, und die resultirende Fläche besteht demnach aus einem Systeme über einander liegender Schichten, die um einen Abstand von je π, diesen im Sinne der Ordinaten gemessen, von einander entfernt sind. Nur für solche Werthe von x, welche $f(x) = 0$ machen, muss nach dem oben Gesagten die ganze Ordinate in die Fläche hineinfallen; von welcher eigenthümlichen Beschaffenheit der Fläche man sich etwa dadurch ein Bild machen kann, dass man sie mit einer Schraubenfläche vergleicht, welche sich um jene Ordinate wie um eine Spindel herumwindet; oder auch so, dass jede einzelne Schicht

---

*) Analyse algébrique. Chap. X.

**) Commentationes soc. reg. Gotting. recentiores. Tom. III.

Digitized by Google

der Fläche an dieser Stelle das Ansehen eines Wasserwirbels oder Wasserstrudels erhält. Die Existenz solcher Stellen der Fläche wären also nachzuweisen.

Zum Behufe dieser Nachweisung führt Gauss die genannte Eigenthümlichkeit auf die analytische Thatsache zurück, dass an den betreffenden Stellen die Grösse

$$V = \frac{\partial^2 T}{\partial r \,.\, \partial t}$$

unendlich gross wird, und beweist nun, dass, wenn man für r einen hinlänglich grossen Werth r_0 an die Stelle setzt, die Gleichung

$$\int_0^{r_0} \partial r \int_0^{2\pi} V \partial t = \int_0^{2\pi} \partial t \int_0^{r_0} V \partial r$$

aufhört richtig zu bleiben, dass mithin V innerhalb der Gränzen der Integration eine Unterbrechung der Continuität erleiden muss, welche sodann unmittelbar die verlangte Folge nach sich zieht.

Erster Beweis von Gauss *).

Zieht man statt R und T, welche in den beiden vorhergehenden Beweisen betrachtet wurden, die beiden Grössen P und Q in Betracht, und construirt dieselben als Functionen von x gleichfalls nach der ersten der in §. 3. angegebenen Constructionsmethoden, so erhält man zwei Flächen, von denen leicht nachgewiesen werden kann, dass sie beide die Ebene der x schneiden.

Die Gleichungen der beiden Durchschnittscurven sind

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

und es kommt mithin jetzt noch darauf an zu zeigen, dass beide Curven auch einander schneiden müssen, damit man gleichzeitig habe $P=0$ und $Q=0$. Dazu führt aber eine specielle Betrachtung der beiden Curven selbst, wie sie Gauss a. a. O. anstellt

Beweis von Dealna **).

Um die complexe Zahl y nach der zweiten Constructionsmethode des §. 3. in einer Ebene für sich dargestellt zu erhalten, dürfte der einzige brauchbare Weg darin bestehen, dass man die Achse der x als Achse der r ansieht und zugleich für jeden Werth von r den Winkel t (der in der Construction nicht sichtbar wird) alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Alsdann erhält man als geometrisches Bild der gegebenen Function nicht eine Linie,

---

*) Demonstratio nova Theorematis etc. Helmstadii. 1799.

**) Crelle's Journal. 20. Band. S. 337.

Digitized by Google

wie in §. 3., sondern jedem einzelnen Werthe von r entspricht schon in der zugehörigen Ordinaten-Ebene eine geschlossene Curve, deren Radius vector $= R$ und Elongation $= T$ ist, und das Continuum aller dieser Curven von $r = 0$ bis $r = \infty$ bildet eine krumme Fläche, die eine Art von kegelförmigem Raum umschliesst. Dieser Raum ist im Sinne der wachsenden r offen, und läuft mit $r = 0$ in einen Punkt aus, dessen Lage auf der Ebene der y durch das letzte Glied a_n der Gleichung $f(x) = 0$ festgestellt wird.

Der in Frage stehende Beweis verlangt nun die Nachweisung, dass die entstandene Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, und dieses wird nachgewiesen sein, sobald sich zwei zur Achse der r normale Schnitte jener Fläche angeben lassen, von denen der eine ganz ausserhalb der Achse liegt, der andere aber diese Achse umschliesst. Als den einen Schnitt kann man aber die Spitze der kegelförmigen Fläche für $r = 0$ ansehen, welche niemals mit der Achse zusammenfallen kann; und den andern weist Deahna dadurch nach, dass für ein hinlänglich grosses r der Werth von $\frac{\partial T}{\partial t}$ stets positiv bleibt, mithin T zugleich mit t wächst, und folglich, während t von 0 bis 2π sich ändert, T gleichfalls das nämliche Intervall durchlaufen muss.

Der hier angegebenen Form des Beweises können wir sogleich noch eine andere Fassung desselben zur Seite stellen, durch welche wir wieder auf den Beweis von Cauchy zurückgeführt werden. Um nämlich zu zeigen, dass die genannte Fläche nothwendig Einen Punkt mit der Achse der r gemein haben muss, nehmen wir willkürlich einen ausser der Achse liegenden Punkt in jener Fläche an; und können wir nun nachweisen, dass, wie auch dieser Punkt gewählt sein mag, man immer einen zweiten Punkt jener Fläche angeben kann, der der Achse näher liegt, so ist gleichfalls der in Rede stehende Satz bewiesen. Diese Nachweisung haben wir aber auf geometrischem Wege Th. VI. Nr. XXXV. des Archivs geliefert, indem unsere dortige Ebene der complexen Zahlen als identisch mit der jetzigen Ebene der y angesehen werden kann, nachdem auf diese die beiden betrachteten Punkte der krummen Fläche projicirt worden sind.

Die Reihe dieser Beweise scheint uns, so weit die geometrische Darstellung der Sache in Betracht gezogen wird, ein vollständig in sich abgeschlossenes Ganzes zu bilden, wovon wir namentlich das als Beweis anführen möchten, dass wir in der That den Beweis von Deahna auf dem oben angegebenen Wege selbstständig gefunden und erst hinterher uns überzeugt haben, dass dieser Beweis im Wesentlichen nicht neu war.

5.

Die analytische Geometrie beschäftigt sich in ihrem planimetrischen Theile mit Linien in der Ebene, und in ihrem stereometrischen Theile mit Linien im Raume und mit Flächen; sie drückt jede Linie in der Ebene durch eine Gleichung zwischen zwei

Digitized by Google

Veränderlichen aus, jede Linie im Raume durch zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen, jede Fläche endlich durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen. Gestützt auf die in §. 3. entwickelten Constructionsmethoden sind wir aber jetzt im Stande, in jenen drei Fällen die betreffende Linie oder Fläche immer durch Eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen

$$y = f(x)$$

darzustellen, und zwar bedeutet diese Gleichung entweder eine Linie in der Ebene, oder eine Linie im Raume, oder eine Fläche, jenachdem x und y reell sind, oder nur x, oder nur y reell ist.

Was zunächst die analytische Möglichkeit der beiden letzten Fälle betrifft, so wird die Linie im Raume offenbar nur dadurch zu Stande kommen können, dass die Function $f(x)$ entweder complexe Constanten in sich schliesst, oder Operationen angezeigt enthält, deren Resultate gleichfalls complexe Zahlen sind. So ist z. B.

$$y = ax + b,$$

wenn a und b complexe Zahlen sind, aber x nur reeller Werthe fähig sein soll, die allgemeine Gleichung einer geraden Linie im Raume; und ebenso ist

$$y = \sqrt[3]{((ax^2))},$$

wo a reell sein mag oder nicht, die Gleichung eines Systems von drei congruenten ebenen Curven, deren Ebenen einander in der Achse der x unter Winkeln von 120° schneiden.

Eine Fläche dagegen würde dadurch entstehen müssen, dass die Function $f(x)$ mit der complexen Veränderlichen x nur solche Operationen vorzunehmen forderte, welche stets ein reelles Resultat geben. Dies lässt sich aber durch keine der bekannten Operationen allgemein leisten, weil jede Operation an einer complexen Zahl im Allgemeinen wieder eine complexe Zahl liefert; es wird jederzeit nur eine gewisse Gruppe complexer Werthe für x angegeben werden können, für welche $f(x)$ reell wird; und da diese Werthe von x in der Ebene der x im Allgemeinen eine Linie bilden werden, so stellt in dieser Beschränkung die Gleichung $y = f(x)$ auch nur eine Linie im Raume dar. Man durfte in der That kein anderes Ergebniss erwarten, da diese Auffassung der Linie im Raume sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass die Coordinaten vertauscht sind.

Es sei z. B.

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ &= (a' + ia'')(x' + ix'') + b' + ib'', \end{aligned}$$

so hat man, damit y reell werde, die Bedingungsgleichung

Digitized by Google

$$a' x'' + a'' x' + b'' = 0.$$

und sodann

$$y = a' x' - a'' x'' + b',$$

welche beiden Gleichungen zwischen den drei reellen Veränderlichen x', x'', y eine gerade Linie im Raume darstellen. Wollte man aber die gegebene Gleichung für x auflösen, so würde man haben

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-b}{a} \\ &= \frac{y-b'-ib''}{a'+ia''} \\ &= \frac{(y-b')a'-a''b''}{a'^2+a''^2} - i\,\frac{(y-b')a''+a'b''}{a'^2+a''^2}, \end{aligned}$$

folglich, indem man $x = x' + ix''$ setzt,

$$x' = \frac{(y-b')a'-a''b''}{a'^2+a''^2},$$

$$x'' = \frac{(y-b')a''+a'b''}{a'^2+a''^2}$$

als die beiden Gleichungen der geraden Linie im Raume, welche, wie sich leicht nachweisen lässt, mit den beiden zuerst gefundenen Gleichungen zwischen x', x'', y identisch sind.

Wir können hieraus allgemein den Schluss ziehen, dass jede Gleichung zwischen einer reellen und einer complexen Veränderlichen

$$F(x, y) = 0$$

stets eine Linie im Raume bedeutet, und zwar stets die nämliche Linie, man mag y als Function von x ansehen oder umgekehrt; sobald nur bestimmt angegeben ist, welche der beiden Veränderlichen reell und welche imaginär sein soll. Eine Vertauschung in dieser letzteren Beziehung wird im Allgemeinen eine andere Linie hervorbringen. Am bequemsten aber bleibt es in allen Fällen, die imaginäre Veränderliche als Function der reellen aufzufassen und zu construiren, wie wir es anfangs gethan haben, weil man alsdann in einer einzigen Gleichung ausgesprochen erhält, wozu man sonst deren zwei nöthig haben würde.

Was nun aber die bis hierher noch unerledigte Frage nach der Gleichung einer Fläche betrifft, welche für jeden complexen Werth, den man dem x beilegen mag, stets nur einen reellen Werth für $y = f(x)$ hervortreten lassen soll, so gelangt man zu derselben nur durch Einführung einer neuen Art von Function, welche eben durch die hier geforderte Eigenschaft charakterisirt

Digitized by Google

wird. Die Grundformen dieser Functionen sind schon in §. 4. bei den dort construirten Flächen in Anwendung gekommen; es sind folgende vier:

$$y = \text{Mod. } x\,,$$
$$y = \text{Arc. } x\,,$$
$$y = \text{Coëff. real. } x\,,$$
$$y = \text{Coëff. imag. } x\ ^{*})\,;$$

welche dadurch complicirter werden können, dass man statt x eine beliebige complexe Function von x und statt y eine beliebige reelle Function von y an die Stelle setzt. So würde z. B. die allgemeine Gleichung der Ebene durch

$$y = \text{Coëff. real. } (ax+b)$$

dargestellt werden können, wo a und b allgemein complexe Zahlen bezeichnen; denn diese Gleichung löst sich auf in

$$y = \text{Coëff. real. } \{(a'+ia'')(x'+ix'')+b'+ib''\}$$
$$= a'x'-a''x''+b''\,,$$

welches die gewöhnliche Form dieser Gleichung ist.

Hiernach können wir also allgemein sagen, dass, obgleich eine Gleichung zwischen zwei complexen Veränderlichen

$$F(x,y)=0$$

an und für sich einer geometrischen Deutung nicht fähig ist, dennoch, wenn man sie für eine der Veränderlichen auflöst, und statt dieser complexen Veränderlichen nur einen ihrer reellen Bestandtheile in Betracht nimmt, die Gleichung stets eine Fläche bedeute: jedoch im Allgemeinen eine verschiedene Fläche, jenachdem man die eine oder die andere Veränderliche als abhängige Veränderliche ansieht.

6.

Gestützt auf die hier entwickelten Grundgesetze ergiebt sich nun eine neue und höchst eigenthümliche Behandlung der Objecte der analytischen Geometrie, welche nicht nur der bisherigen analytischen Geometrie vollkommen parallel läuft, sondern auch in mehr als einer Hinsicht durch Einfachheit und Eleganz ihrer Ent-

*) Es sei $x = x'+ix'' = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist Mod. $x=\varrho$, Arc. $x=\varphi$, Coëff. real. $x=x'$, Coëff. imag. $x=x''$. Wir haben diese Bezeichnungen ihrer leichten Verständlichkeit wegen gewählt, obgleich sie sich wenig durch Einfachheit auszeichnen.

wickelungen solche Vorzüge besitzt, dass wir hoffen dürfen, sie bald in den Unterricht und die betreffenden Lehrbücher aufgenommen zu sehen.

Untersuchen wir, um an einem einfachen Beispiele den Geist dieser neuen Behandlung anschaulich zu machen, die Bedeutung einer Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei Veränderlichen

$$Ay + Bx + C = 0,$$

so können 1) für reelle Werthe der Coefficienten A, B, C auch die Veränderlichen x und y im einfachsten Falle nur reeller Werthe fähig sein, und die Gleichung stellt in diesem Falle eine gerade Linie in der Ebene xy dar, wie bekannt.

Werden dagegen 2) für A, B, C auch complexe Werthe zugelassen, so kann die Gleichung nur bestehen, wenn von den beiden Veränderlichen x und y mindestens die eine gleichfalls complexe Werthe annehmen darf. Es sei y diese Veränderliche, so findet man durch Auflösung für y

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

wofür man zur Abkürzung schreiben kann

$$y = ax + b,$$

wo a und b im Allgemeinen wieder complexe Zahlen sind. Zur Construction dieser Gleichung legen wir nun eine Achse der x und eine Ebene der y zum Grunde; dass die Gleichung alsdann aber eine gerade Linie im Raume darstellt, lässt sich genau eben so zeigen, wie man es in der Ebene zu thun pflegt.

Es ist nämlich der Quotient $\frac{y-b}{x} = a$, also constant; folglich bezeichnet

$$y - b = ax,$$

wo für den Augenblick $y-b$ als Ordinate angesehen werden mag, eine durch den Nullpunkt des Systems gehende gerade Linie, die in einer durch die x Achse gelegten Ebene zu Stande kommt, welche gegen die Ebene xy' eine Neigung = Arc. a besitzt; die Neigung dieser Linie gegen die x Achse selbst wird durch einen Winkel bestimmt, dessen trigonometrische Tangente = Mod. a ist. Dieser letzte Winkel kann, da Mod. a stets positiv ist, nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ enthalten sein; doch liegt darin keine Beschränkung, da Arc. a eines jeden Werthes zwischen 0 und 2π fähig ist.

Die Gleichung

$$y = ax + b$$

Digitized by Google

selbst stellt nun eine Parallele mit jener Geraden dar, welche durch einen Punkt der Ebene der y führt, dessen complexe Coordinate $= b$ ist.

Nimmt man $B=0$, so liefert die Gleichung

$$y = b$$

eine zur x Achse parallele Gerade, und ist ausserdem $C=0$, mithin

$$y = 0,$$

so fällt die Gerade mit der x Achse zusammen.

Ist aber $A=0$, so kann die Gleichung

$$Bx + C = 0$$

mit der hier geforderten Beschränkung, dass x nur reeller Werthe fähig sein soll, nur noch bestehen, wenn $\frac{C}{B}$ reell ist; sie bezeichnet aber unter dieser Voraussetzung nicht mehr eine Gerade, sondern eine zur Achse der x normale Ebene, welche diese Achse in dem Punkte $x = -\frac{C}{B}$ schneidet; mithin die Ebene der y selbst, wenn $C=0$ und folglich $x=0$ ist. Dieser Ausnahmefall gehört indessen streng genommen nicht hieher, da hier die von vorn herein vorausgesetzte Möglichkeit, y als abhängige Veränderliche anzusehen, aufgehoben ist.

Werden für die Coefficienten A, B, C reelle oder complexe Werthe gesetzt, so kann

3) die Gleichung

$$Ay + Bx + C = 0$$

als solche auch noch bestehen, wenn für beide Veränderliche x und y complexe Werthe zugelassen werden; soll aber die Gleichung in diesem Falle einer geometrischen Deutung fähig sein, so muss man sie für eine der Veränderlichen auflösen und von dieser Veränderlichen sodann nur einen ihrer reellen Bestandtheile in Betracht ziehen. Es sei y diese Veränderliche, so kann man als einfachste Formen der resultirenden Function — insofern nämlich die Abhängigkeit zwischen y und x noch durch eine lineare Gleichung dargestellt werden soll — ansehen

$$y = \text{Coëff. real. } (ax + b)$$

und

$$y = \text{Coëff. imag. } (ax + b),$$

wo $a = -\frac{B}{A}$ und $b = -\frac{C}{A}$ im Allgemeinen noch complexe Zahlen sein werden. Beide Gleichungen construiren wir für eine

Digitized by Google

Ebene der x und eine Achse der y; dass die durch diese beiden Gleichungen dargestellten Flächen aber Ebenen sind, beweisen wir wie folgt.

Betrachtet man zunächst die erste Gleichung

$$y = \text{Coëff. real. } (ax+b),$$

so zieht man aus der Natur dieser Gleichung unmittelbar den Schluss, dass die Grösse Coëff. imag. $(ax+b)$ jeden beliebigen reellen Werth muss annehmen können, während x alle complexen Werthe in der Ebene der x durchläuft; setzt man aber, indem w eine willkürliche reelle Constante bedeutet,

$$\text{Coëff. imag. } (ax+b) = w,$$

so wird durch die Beschränkung, welche man hiemit den Werthen von x auferlegt, der Umfang der obigen Gleichung aufgehoben, und durch die Vereinigung beider Gleichungen entsteht

$$y + iw = ax + b,$$

welches die Gleichung einer geraden Linie ist, die mithin mit allen ihren Punkten in der obigen Fläche liegt. Bringt man diese Gleichung auf die früher betrachtete Form, wo die complexe Coordinate als Function der reellen aufgefasst wurde, so hat man

$$x = \frac{1}{a}y + \frac{iw-b}{a},$$

und hier erkennt man aus dem Coefficienten $\frac{1}{a}$ die Lage der geraden Linie und aus dem Coefficienten $\frac{iw-b}{a}$ ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene der x.

Lässt man nun w sich ändern, so nimmt diese gerade Linie successiv andere, der ursprünglichen parallele Lagen an, indem nur die Lage ihres Durchschnittspunkts mit der Ebene der x sich ändert; und bezeichnet man mit x_0 alle der Annahme $y=0$ entsprechenden Werthe von x, so hat man

$$x_0 = \frac{iw-b}{a}$$

als Gleichung der Linie der Durchschnittspunkte jener Geraden mit der Ebene der x. Diese Gleichung aber ist, wegen der Willkürlichkeit von w, identisch mit der folgenden:

$$\text{Coeff. real. } (ax_0+b) = 0,$$

und bezeichnet demnach eine gerade Linie in der Ebene der x, deren Coordinaten der reelle Coefficient x' und der imaginäre

Digitized by Google

Coefficient x'' der complexen Zahl $x = x' + ix''$ sind *). Man kann mithin in der durch die Gleichung

$$y = \text{Coëff. real. } (ax + b)$$

dargestellten Fläche unzählig viele gerade Linien angeben, die einander parallel sind und deren Durchschnittspunkte mit der Ebene der x wieder eine gerade Linie bilden; jene Fläche ist folglich eine Ebene.

Dass man ebenso die Bedeutung der zweiten Gleichung

$$y = \text{Coëff. imag. } (ax + b)$$

nachweisen kann, liegt auf der Hand; diese Gleichung stellt also gleichfalls eine Ebene dar.

Setzt man $B = 0$, so nehmen beide Gleichungen die Formen an

$$y = \text{Coëff. real. } b, \quad y = \text{Coeff. imag. } b,$$

und jede stellt in diesem Falle eine zur Ebene der x parallele Ebene dar; und ist ausserdem $C = 0$, folglich

$$y = 0,$$

so hat man die Ebene der x selbst. Dies ist genau derselbe Fall, der oben bei der Discussion der geraden Linie unter der Annahme $A = 0$ eintrat; denn dort hatten die Buchstaben x und y die umgekehrte Bedeutung von ihrer jetzigen.

Nehmen wir aber hier $A = 0$, so zerfällt die Gleichung

$$Bx + C = 0$$

sofort in die beiden

$$\text{Coëff. real. } (Bx + C) = 0,$$
$$\text{Coëff. imag. } (Bx + C) = 0;$$

von denen jede eine durch die Achse der y gelegte Ebene darstellt.

7.

Der Gang unserer Untersuchung hat uns von vorn herein gleichsam von selbst darauf geführt, bei der Betrachtung der Linie stets von einer Achse der x und einer Ebene der y; dagegen bei der Betrachtung der Fläche von einer Ebene der x und einer Achse der y zu sprechen. Obgleich diese Ver-

*) Beiläufig erhalten wir hier noch ein neues Mittel, um die Gleichung einer Linie in der Ebene darzustellen, worauf wir jedoch gegenwärtig nicht weiter eingehen wollen.

Digitized by Google

tauschung der Coordinaten allerdings einiges Unbequeme hat, namentlich sobald man Betrachtungen der einen Art in solche der andern Art hineinziehen will, so wollen wir ihr dennoch für unsern gegenwärtigen Zweck bis zu Ende treu bleiben.

Untersuchen wir nun, um von unsern zuletzt gewonnenen Resultaten einige Anwendung zu machen, zunächst die Lage zweier geraden Linien gegen einander, deren Gleichungen seien

$$y = ax + b,$$
$$y = cx + d;$$

so wird die Existenz eines Durchschnittspunktes beider Linien an die Bedingung gebunden sein, dass die gleichzeitige Gültigkeit beider Gleichungen nothwendig für die Veränderliche x einen reellen Werth zu liefern habe. Da nun die Gleichsetzung $y=y$ liefert

$$x = \frac{d-b}{a-c},$$

so ist

$$\text{Coëff. imag.} \left(\frac{d-b}{a-c}\right) = 0$$

die gesuchte Bedingungsgleichung; und wenn diese erfüllt ist, so sind

$$x = \frac{d-b}{a-c} \text{ und } y = \frac{ad-bc}{a-c}$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes.

Jene Bedingungsgleichung wird z. B. erfüllt, wenn alle Constanten reell sind, wie bekannt; ferner wenn man hat $d=b$, denn alsdann schneiden sich beide Gerade in der Ebene der y; sie wird auch erfüllt, falls man die Sache so ansehen will, wenn man hat $a=c$, denn alsdann sind beide Gerade einander parallel. Ist gleichzeitig $d=b$ und $a=c$, so decken die Linien einander.

Um den Winkel λ zu finden, den jene beiden geraden Linien mit einander einschliessen, denken wir uns zu beiden durch den Nullpunkt des Systems Parallelen gelegt; ausserdem werde aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $=1$ eine Kugelfläche construirt, auf welcher sowohl die Durchschnittspunkte jener beiden Parallelen als auch der Durchschnittspunkt der positiven Seite der Achse der x vorkommen. Alsdann ist der gesuchte Winkel λ Seite eines sphärischen Dreiecks; und setzt man

$$a = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$c = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi');$$

so wird

$$\cos\lambda = \cos(\operatorname{arc\,tg}\varrho).\cos(\operatorname{arc\,tg}\varrho') + \sin(\operatorname{arc\,tg}\varrho)\sin(\operatorname{arc\,tg}\varrho')\cos(\varphi-\varphi')$$

oder

$$\cos\lambda = \frac{1+\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')}{\sqrt{1+\varrho^2}\,.\,\sqrt{1+\varrho'^2}}.$$

Sollen beide Linien auf einander rechtwinklig stehen, so hat man $\cos\lambda = 0$, folglich

$$\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi') = -1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$a'c' + a''c'' = -1,$$

wenn $a = a' + ia''$ und $c = c' + ic''$ gesetzt wird.

Um hievon eine Anwendung zu machen, wollen wir die Aufgabe lösen: durch den Nullpunkt des Systems normal zu der Geraden

$$y = ax + b$$

eine Ebene zu legen.

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} y &= cx \\ &= (c' + ic'')x \end{aligned}$$

eine durch den Nullpunkt des Systems gelegte Gerade, so wird diese in der gesuchten Ebene enthalten sein, wenn man gleichzeitig hat

$$a'c' + a''c'' = -1.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichung eine der beiden Unbestimmten c' und c'', z. B. die erste, so erhält man

$$a'y + x = iac''x,$$

und da hier c'' noch jedes beliebigen reellen Werthes kann fähig sein, insofern die Gerade $y = cx$ eine beliebige Lage innerhalb der gesuchten Ebene haben darf, so umfasst die Gleichung

$$\text{Coëff. real.}\ \frac{a'y+x}{ax} = 0$$

alle Lagen der Geraden $y = cx$, welche dieselbe normal zu der Geraden $y = ax + b$ annehmen kann, und ist folglich die Gleichung der gesuchten Ebene. Man kann dieselbe, um die reelle

Digitized by Google

Coordinate x als solche getrennt hervortreten zu lassen, auch auf die Form bringen *)

$$\text{Coëff. real.}\left(\frac{a'y}{a}\right) = -x\,.\,\text{Coëff. real.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Hätte man oben c'' statt c' eliminirt, so würde man als Gleichung der Ebene schliesslich erhalten haben

$$\text{Coëff. imag.}\left(\frac{ia''y}{a}\right) = x\ \text{Coëff. imag.}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Beide Gleichungen aber sind identisch, denn sie lassen sich auf die Form

$$x = -(a'^2 + a''^2)\,.\,\text{Coëff. real.}\left(\frac{y}{a}\right)$$

zurückführen.

Man kann hieraus einen Schluss ziehen, welcher der Discussion der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

in §. 6. (wo die Coordinaten die umgekehrte Bedeutung haben wie vorhin) zur Ergänzung dienen kann. Fällt man nämlich auf diese Ebene aus dem Nullpunkte des Systems ein Perpendikel, so bezeichnet Mod. a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen dieses Perpendikel mit der Achse der y einschliesst; und π — Arc. a den Neigungswinkel, welchen eine durch dieses Perpendikel und die Achse der y gelegte Ebene mit der Ebene $x'y$ bildet. Folglich ist zugleich Mod. a die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Ebene

$$y = \text{Coëff. real.}\,(ax + b)$$

mit der Ebene der x; und $\frac{\pi}{2}$ — Arc. a derjenige Winkel, welchen die Schnittlinie jener Ebene mit der Ebene der x in dieser Ebene mit der reellen Achse der x' einschliesst. Die Gleichung jenes Perpendikels selbst aber wird

$$x = -(a'^2 + a''^2)\,\frac{y}{a},$$

wo y seine reelle und x seine complexe Coordinate bezeichnet.

---

*) Durch Anwendung der Gleichungen Coëff. real. $(A \pm B) =$ Coëff. real. $A \pm$ Coëff. real. B; Coëff. real. $\frac{A}{n} = \frac{1}{n}$ Coëff. real. A, wenn n reell ist, etc. Diese und ähnliche Gleichungen lassen sich leicht aus der Natur der hier eingeführten Function nachweisen.

Digitized by Google

Die Lagenverhältnisse von Ebenen lassen sich auf die Lagenverhältnisse der auf ihnen errichteten Perpendikel zurückführen, sind jedoch auch einer unabhängigen Entwickelung fähig. Beides weiter auszuführen unterlassen wir hier, da, wie wir glauben, die bisherigen Andeutungen schon hinreichend den Geist der neuen Behandlung der analytischen Geometrie zu erkennen geben, welches allein der Zweck dieses Aufsatzes sein soll.

8.

Will man nach den hier aufgestellten Principien die geometrische Bedeutung einer algebraischen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei Veränderlichen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

untersuchen, so wird man wieder zu unterscheiden haben, ob die unabhängige Veränderliche, z. B. x, nur die Reihe der reellen Zahlen, oder ob sie die Ebene der complexen Zahlen zu durchlaufen als fähig angesehen werden soll. Im ersten Falle werden die reellen oder complexen Werthe der abhängig Veränderlichen y eine Linie der zweiten Ordnung, — im zweiten Falle dagegen wird sowohl der reelle, als der imaginäre Coefficient der abhängig Veränderlichen y, jeder für sich, eine Fläche der zweiten Ordnung festlegen. Die Coefficienten der obigen Gleichung, A, B, C etc., dürfen dabei entweder reelle oder selbst complexe Zahlen sein.

Wir hoffen diesen Gegenstand bei einer andern Gelegenheit weiter auszuführen, und heben hier nur folgenden einzelnen Fall heraus. Wenn nämlich alle Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Zahlen sind und die unabhängig Veränderliche x gleichfalls nur die Reihe der reellen Zahlen durchlaufen darf, so können dennoch, da die Gleichung vom zweiten Grade ist, für y schon complexe Werthe eintreten, und die Curve bleibt mithin nicht in Einer Ebene.

Nehmen wir z. B. die Gleichung der Ellipse in ihrer einfachsten Gestalt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b die beiden Halbachsen der Ellipse bezeichnen, und betrachten y als Function von x; so haben wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

und hier bleibt y reell, so lange $x^2 < a^2$ ist, und wird dagegen imaginär, nämlich von der Form

$$y = \pm i \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

Digitized by Google

sobald $x^2 > a^2$ wird. Nehmen wir also, wie früher, zu der Achse der x eine Ebene der y, und bezeichnen in letzterer mit y' die Achse der reellen und mit y'' die Achse der imaginären Zahlen, so erhalten wir vermöge jener Gleichung eine Curve, die von $x=-a$ bis $x=a$ ganz in der Ebene xy' liegt, in den Punkten $x=\pm a$ die Achse der x durchschneidet, und von hier an, nämlich von $x=a$ bis $x=\infty$ und von $x=-a$ bis $x=-\infty$, ganz in die Ebene xy'' hineinfällt. Jenen ersten Theil der Curve nennt man Ellipse, diesen letzten Hyperbel, und es zeigt sich mithin, dass von unserm hier entwickelten Standpunkte aus Ellipse und Hyperbel nur Theile einer und der nämlichen Curve sind, welche man vollständig erhält, wenn man alle Werthe von y für $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ in Betracht zieht. Zugleich ist hieraus auf der Stelle klar, mit welchem Rechte man die Hyperbel eine Ellipse mit imaginärer Nebenachse, oder auch die Ellipse eine Hyperbel mit imaginärer Nebenachse nennen könne; denn die letztere Benennung ist dadurch gerechtfertigt, dass die vorstehende Betrachtung auch von der Gleichung der Hyperbel hätte ihren Auslauf nehmen können.

Dem Kreise gehört hiernach eine gleichseitige Hyperbel mit gleicher Hauptachse als nothwendige Ergänzung zu, welche mit ihm die Achse der x gemeinschaftlich besitzt, aber in einer zu der Ebene des Kreises normalen Ebene liegt.

Die Gleichung der Parabel

$$y = \pm \sqrt{px}$$

liefert, wenn p als positiv vorausgesetzt wird, reelle Werthe für positive x und imaginäre Werthe von der Form

$$y = \pm i\sqrt{-px}$$

für negative x. Sie erstreckt sich mithin gleichfalls von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, und zwar besteht sie aus zwei congruenten Theilen, von denen der eine von $x=0$ bis $x=+\infty$ ganz in die Ebene xy', der andere aber von $x=0$ bis $x=-\infty$ ganz in die Ebene xy'' hinein fällt. Von diesen beiden Theilen wird gewöhnlich schon jeder für sich eine Parabel genannt, während sie hier erst zusammengenommen die vollständige Curve ausmachen.

Allgemein kann man hieran die Bemerkung knüpfen, dass, wenn

$$F(x, y) = 0$$

eine algebraische Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y bezeichnet, die in dieser Gleichung enthaltene Curve stets sich von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ erstrecken muss; denn es ist bewiesen (vergl. §. 4.), dass für jeden Werth von x sich stets ein complexer Werth von y muss angeben lassen, welcher der Bedingung der Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt. Es kann mithin bei unserer Auffassung der Sache keine im Sinne der x geschlossene algebraische Curve geben.

Digitized by Google

Dieselbe Bemerkung lässt sich auch auf diejenigen Flächen übertragen, welche in einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen enthalten sind. Beide Bemerkungen zusammen genommen aber können als der geometrische Ausdruck des in §. 4. behandelten algebraischen Fundamental-Theorems angesehen werden.

XLVII.

Zur Entwickelung in Reihen und Summirung der Reihen.

Von dem

Herrn Doctor Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 1.

Der Bruch

$$\frac{1}{a-x}$$

giebt, wenn man theilt, die Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\ldots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)},$$

und wir wollen $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ das allgemeine Glied dieser Reihe nennen, so dass die Reihe dargestellt werden kann durch

$$\sum_{0}^{n}\frac{x^n}{a^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-x}.$$

Das Ergänzungsglied erzeugt durch fortgesetzte Division die weiteren Glieder der Reihe. $\frac{1}{a-x}$ soll der erzeugende Bruch für die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{a^{n+1}}$ ist, heissen. Eben so

Digitized by Google

wird $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}$ der erzeugende Bruch sein für die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^{n+r+1}}{a^{n+r+1}}$. Man hat offenbar

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}$$

und

$$\frac{1}{a-x} - \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)} = \sum_0^n \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1$, so ist offenbar

$$\frac{1}{a-x} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Hat man allgemein den Bruch

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n},$$

so entsteht durch Division eine Reihe von folgender Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

deren allgemeines Glied $A_n x^n$ ist. Hat man bei dem Gliede $A_n x^n$ den Rest R_n, so ist das Ergänzungsglied

$$\frac{R_n}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n},$$

und es ist genau

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \frac{R_n}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}.$$

Hier ist $\frac{1}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$ der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$ ist; desgleichen aber ist $\frac{R_n}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$ der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1} x^{n+r+1}$ ist, wenn hier n unveränderlich, r veränderlich $(0, 1, 2, \ldots)$ ist. Heisst also K der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$, K' der erzeugende Bruch der Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1} x^{n+r+1}$ ist, so ist genau

$$K - K' = \sum_0^n A_n x^n.$$

Verschwände das Ergänzungsglied für ein unendlich grosses n,

Digitized by Google

oder, was das Nämliche ist, wäre die Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$ ist, konvergent, so hätte man ganz genau

$$K = \sum_0^\infty A_n x^n.$$

Hat man also eine Reihe, von der man weiss, dass sie durch Division entstanden ist,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

und man verlangt die Summe der $r+1$ ersten Glieder, oder

$$\sum_0^r A_n x^n,$$

so suche man den erzeugenden Bruch für die Reihe, deren allgemeines Glied $A_n x^n$, und den für die Reihe, deren allgemeines Glied $A_{n+r+1} x^{n+r+1}$ ist; sind K und K' diese beiden Brüche, so ist genau

$$K - K' = \sum_0^r A_n x^n, \qquad (1)$$

welche Formel eine merkwürdige, höchst einfache Summirungsmethode in sich schliesst.

Wir werden nun im Folgenden zu zeigen suchen, auf welche Weise man den erzeugenden Bruch bestimmen kann, und alsdann die gefundenen Formeln zur Reihensummirung anwenden.

§. 2.

Vor Allem wollen wir die Gestalt der Reihe untersuchen, die aus dem Bruche

$$\frac{1}{(a-x)^m}$$

entsteht.

Nach dem, was man in §. 1. gesehen, hat sie die Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Soll diese Reihe wirklich durch Division aus dem Bruche $\frac{1}{(a-x)^m}$ entstanden sein, so muss sie die Eigenschaft haben, dass, wenn sie beliebig weit fortgeführt und mit $(a-x)^m$ multiplizirt wird, alle Glieder des Produktes, die Potenzen von x enthalten, verschwinden, und das x nicht enthaltende Glied $= 1$ sei.

Wird die Reihe nur bis zum Gliede $A_n x^n$ fortgeführt, so werden im Produkte diejenigen Potenzen von x, deren Exponent $> n$, nicht verschwinden, alle andern aber werden verschwinden, n mag

Digitized by Google

nun sein, was es will. Nun lässt sich leicht einsehen, dass es eine einzige Reihe giebt, die diese Eigenschaft hat. Denn gäbe es eine andere

$$A'_0 + A'_1 x + A'_2 x^2 + \ldots + A'_n x^n + \ldots$$

und man multiplizirte sie mit $(a-x)^m$, setzte alsdann die Gleichungen an, die sich aus den angeführten Bedingungen ergeben, so würde man eine Reihe Gleichungen des ersten Grades erhalten, aus denen $A'_0, A'_1, A'_2, \ldots A'_n \ldots$ bestimmt werden könnten, und man sieht leicht ein, dass diese Werthe mit $A_0, A_1, \ldots A_n, \ldots$ zusammenfallen.

Nun behaupte ich aber, die Reihe

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^m} + m\,\frac{x}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^{m+2}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{x^3}{a^{m+3}} + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots.n}\cdot\frac{x^n}{a^{m+n}} \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

habe diese Eigenschaft, sei also die Reihe, welche durch die verlangte Division entstanden.

Denn es ist allgemein

$$(a-x)^m = a^m - ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 - \ldots . (-1)^m x^m .$$

Multiplizirt man nun die Reihe (1) mit $(a-x)^m$, so ist das Glied des Produktes, das die Potenz x^n enthält:

$$\frac{1}{a^n}\left\{\begin{aligned} &\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} - m\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} \\ &\qquad + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-2)} - \ldots\ldots \end{aligned}\right\}.$$

Ist $n < m$, so ist das letzte Glied dieser Reihe:

$$(-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n};$$

für $n = m$ ist es:

$$(-1)^m;$$

und für $n > m$:

$$(-1)^m \frac{m(m+1)\ldots(m+n-m-1)}{1.2\ldots(n-m)} = (-1)^m \frac{m(m+1)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-m)}.$$

Nun folgt aus Archiv. Thl. I. Nr. X. S. 72. (12) für $k=1$, $p=n$, $m=m$, $n=-m$, dass im ersten Falle die Reihe

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} - m\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots = (m-m)_n = 0.$$

Dasselbe gilt auch für den zweiten und dritten Fall. Es ist nämlich allgemein:

$$(m-\overset{1}{m})_n = 0 = \overset{1}{m}_n + \overset{1}{m}_{n-1}(-\overset{1}{m})_1 + \overset{1}{m}_{n-2}(-\overset{1}{m})_2 + \ldots + \overset{1}{m}_1(-\overset{1}{m})_{n-1} + (-\overset{1}{m})_n.$$

Im ersten Falle ist diese Reihe vollgliederig, im zweiten ebenfalls, im dritten aber ist, da

$$(-\overset{1}{m})_r = \frac{(-m)(-m+1)(-m+2)\ldots(-m+r)}{1.2\ldots r},$$

für $r \gtrless m$, $(-\overset{1}{m})_r = 0$, was auf unsern Satz zurückkommt. Das allgemeine Glied der aus dem Bruche $\frac{1}{(a-x)^m}$ entstehenden Reihe ist also

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{x^n}{a^{m+n}} = \overset{1}{m}_n \frac{x^n}{a^{m+n}},$$

und man erhält die Reihe, wenn man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt, dabei aber $\overset{1}{m}_0 = 1$ annimmt (M. s. die vorher angeführte Abhandlung im ersten Theile.).

Das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

entstehenden Reihe ist folglich

$$A\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n,$$

und das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{A}{a-bx}$$

entstehenden Reihe:

$$A\ \frac{b}{a^{n+1}}\ x^n$$

Umgekehrt auch wird eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$A \cdot \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}} x^n$$

ist, zum erzeugenden Bruch haben:

$$\frac{A}{(a-bx)^m}.$$

Digitized by Google

§. 3.

Ist ein Bruch zusammengesetzt aus der (algebraischen) Summe einer Reihe von Brüchen, welche die Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

haben, so ist das allgemeine Glied der aus ihm hervorgehenden Reihe offenbar gleich der (algebraischen) Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, die durch Division aus den einzelnen Brüchen erzeugt werden. Und umgekehrt, ist das allgemeine Glied ein Inbegriff einer Reihe Formen der Gestalt

$$A.\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{b^n}{a^{m+n}}x^n,$$

so ist der erzeugende Bruch auch ein Inbegriff einer Reihe von Brüchen der Gestalt

$$\frac{A}{(a-bx)^m}$$

§. 4.

Das in §. 2. Aufgeführte gilt offenbar auch für den Fall, dass A und a imaginär sind.

Sei also $A=R(\cos T+i\sin T)$, $a=r(\cos t+i\sin t)$, so ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T+i\sin T)}{[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$R(\cos T+i\sin T).\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{b^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{x^n}{(\cos(m+n)t+i\sin(m+n)t)}$$

$$=\frac{Rb^nx^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\cos T+i\sin T}{\cos(m+n)t+i\sin(m+n)t}=$$

$$\frac{Rb^nx^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}[\cos((m+n)t-T)-i\sin((m+n)t-T)].$$

Dessgleichen ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche

$$\frac{R(\cos T-i\sin T)}{[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m}$$

entstehenden Reihe:

$$\frac{Rb^nx^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}[\cos((m+n)t-T)+i\sin((m+n)t-T)].$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\frac{R(\cos T+i\sin T)}{[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m}+\frac{R(\cos T-i\sin T)}{[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m}$$

ein reeller Bruch, dessen Nenner:

$$(r^2-2brx\cos t+b^2x^2)^m\,,$$

und dessen Zähler:

$$\begin{aligned}&R(\cos T+i\sin T)\,[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m\\+\;&R(\cos T-i\sin T)\,[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m\,,\end{aligned}$$

welche Grösse reell ist.

Das allgemeine Glied der aus diesem Bruche entstehenden Reihe ist somit:

$$\frac{2Rb^nx^n}{r^{m+n}}\cdot\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}\cos((m+n)t-T).$$

Und umgekehrt gehört zu einem solchen allgemeinen Gliede ein erzeugender Bruch:

$$\frac{\left\{\begin{aligned}&R(\cos T+i\sin T)\,[r(\cos t-i\sin t)-bx]^m\\+\;&R(\cos T-i\sin T)\,[r(\cos t+i\sin t)-bx]^m\end{aligned}\right\}}{[r^2-2brx\cos t+b^2x^2]^m}.$$

Für $m=1$ ist das allgemeine Glied:

$$\frac{2Rb^nx^n}{r^{n+1}}\cos((n+1)t-T),$$

und der erzeugende Bruch:

$$2R\,\frac{r\cos(T-t)-bx\cos T}{r^2-2brx\cos t+b^2x^2}.$$

Diese Andeutungen mögen genügen. Wir wenden uns nun zu Summirungen, wie sie durch die entwickelten Formeln möglich werden, und deren Prinzip in §. 1. erläutert wurde. Es werden also hier eine Reihe Beispiele folgen.

§. 5.

1) Es sei das allgemeine Glied einer Reihe $(2.4^n+3)x^n$, und man verlange die Summe

$$\sum_0^r(2.4^n+3)x^n.$$

Digitized by Goog

Das allgemeine Glied zerfällt in $2.4^n x^n$ und $3.x^n$. Betrachtet man den ersten Theil, so ist in §. 2. $A=2$, $b=4$, $a=1$, $m=1$, also der erzeugende Bruch $\frac{2}{1-4x}$; dessgleichen ist der erzeugende Bruch von $3.x^n$ hier $\frac{3}{1-x}$; also ist

$$K\ (\S.\ 1.) = \frac{2}{1-4x} + \frac{3}{1-x} = \frac{5-14x}{1-5x+4x^2}.$$

Für K' ist das allgemeine Glied: $2.4^{n+r+1}\,x^{n+r+1}+3x^{n+r+1}$, also der erzeugende Bruch

$$K' = \frac{2.4^{r+1}x^{r+1}}{1-4x} + \frac{3x^{r+1}}{1-x} = \frac{(2.4^{r+1}+3)x^{r+1}-(2.4^{r+1}+12)x^{r+2}}{1-5x+4x^2}.$$

Mithin ist

$$K-K' = \sum_0^n (2.4^n+3)x^n = \frac{5-14x-(2.4^{r+1}+3)x^{r+1}+(2.4^{r+1}+12)x^{r+2}}{1-5x+4x^2}.$$

Diese Grösse wird für $x=1$: $\frac{\text{Null}}{\text{Null}}$; ihr wahrer Werth ist alsdann:

$$\frac{-14-(r+1)(2\,4^{r+1}+3)+(r+2)(2.4^{r+1}+12)}{3}.$$

Dessgleichen wird sie $\frac{0}{0}$ für $x=\frac{1}{4}$ oder $4x=1$; ihr wahrer Werth ist alsdann:

$$\frac{-14-(r+1)(2.4^{r+1}+3).\frac{1}{4^r}+(r+2)(2.4^{r+1}+12).\frac{1}{4^{r+1}}}{-5+2}$$
$$= \frac{14.4^{r+1}+(r+1)(2.4^{r+1}+3).4-(r+2)(2.4^{r+1}+12)}{3\,.\,4^{r+1}},$$

wie man findet, wenn man Zähler und Nenner nach x differenzirt und dann $x=\frac{1}{4}$ setzt.

2) Man soll die Summe

$$\sum_0^r \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n$$

angeben. Für diesen Fall ist in §. 2.: $A=1$, $b=1$, $a=1$, $m=3$, also

$$K = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Digitized by Google

Das allgemeine Glied der durch K' entstehenden Reihe ist

$$\frac{(n+r+2)(n+r+3)}{1.2}x^{n+r+1}$$

$$=\left[\frac{n^2+(2r+5)n+(r+2)(r+3)}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)+(2r+5-3)(n+1)+r^2+3r+4}{1.2}\right]x^{n+r+1}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^{n+r+1}+\frac{2r+2}{1.2}(n+1)x^{n+r+1}+\frac{r^2+3r+4}{1.2}x^{n+r+1};$$

folglich der erzeugende Bruch

$$K'=\frac{x^{r+1}}{(1-x)^3}+(r+1)\frac{x^{r+1}}{(1-x)^2}+\frac{r^3+3r+4}{2}\cdot\frac{x^{r+1}}{1-x}$$

$$=\frac{x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})-x^{r+2}(r^2+4r+5)}{(1-x)^3}+\frac{\frac{r^2+3r+4}{2}x^{r+3}}{(1-x)^3}.$$

Mithin

$$\sum_0^r\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^n=$$

$$\frac{1-x^{r+1}(4+\frac{5r+r^2}{2})+x^{r+2}(r^2+4r+5)-x^{r+3}(\frac{r^2+3r+4}{2})}{(1-x)^3}.$$

3) Es soll die Summe $\sum_0^r x^n\cos nt$ angegeben werden.

Nach §. 4. ist hier $R=1$, $b=1$, $r=1$, $T=t$, also

$$K=\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x^{n+r+1}\cos(n+r+1)t$ als allgemeines Glied ist $R=b=r=1$, $T=-(rt)$, mithin

$$K'=\frac{\cos(r+1)t-x\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}x^{r+1},$$

folglich

$$\sum_0^r x^n\cos nt=\frac{1-x\cos t-x^{r+1}\cos(r+1)t+x^{r+2}\cos rt}{1-2x\cos t+x^2}.$$

Für $x=1$ ist

Digitized by Google

$$1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\ldots+\cos rt$$

$$=\frac{1-\cos t+\cos rt-\cos(r+1)t}{2-2\cos t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos rt-\cos(r+1)t}{1-\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2r+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t},$$

wie bekannt.

4) Es sei

$$\sum_{0}^{r}[2(3n^2-1)2^n+12n]x^n$$

anzugeben.

Es ist

$$2(3n^2-1)2^n+12n\cdot$$

$$=3\cdot 2^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}-2^{n+1}\cdot 9(n+1)+2^{n+2}+12(n+1)-12,$$

also

$$[2(3n^2-1)2^n+12n]x^n$$

$$=12\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\cdot 2^n x^n-18\cdot(n+1)2^n x^n+4\cdot 2^n x^n+12\cdot(n+1)x^n-12x^n,$$

folglich

$$K=\frac{12}{(1-2x)^3}-\frac{18}{(1-2x)^2}+\frac{4}{1-2x}+\frac{12}{(1-x)^2}-\frac{12}{1-x}.$$

Das allgemeine Glied $A_{n+r+1}x^{n+r+1}$ (§. 1.) ist hier:

$$[6(n+r+1)^2-2](2x)^{n+r+1}+12(n+r+1)x^{n+r+1},$$

oder wenn man $r+1=p$ setzt:

$$[12\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}+(12p-18)(n+1)+4+p^2-12p](2x)^n\cdot(2a)^p$$
$$+(12(n+1)-12)x^p x^n+12p\cdot x^p x^n;$$

also

$$K'=\frac{12\cdot(2x)^p}{(1-2x)^3}+\frac{(12p-18)(2x)^p}{(1-2x)^2}+\frac{4+p^2-12p}{1-2x}\cdot(2x)^p$$
$$+\frac{12\cdot x^p}{(1-x)^2}-\frac{12\cdot x^p}{1-x}+\frac{12p\cdot x^p}{1-x}=$$

$$(2x)^{r+1}\left[\frac{12}{(1-2x)^3}+\frac{12r-6}{(1-2x)^2}+\frac{r^2-10r-7}{1-2x}\right]+x^{r+1}\left[\frac{12}{(1-x)^2}+\frac{12r}{1-x}\right].$$

Digitized by Google

Die verlangte Summe ist nun $K-K'$.

Weitere Beispiele zu geben, halten wir für unnöthig. Wir haben nur auf diese Summirungsweise aufmerksam machen wollen, da ihr Gang ein einfacher und klarer ist. Es liessen sich noch mancherlei Formeln daraus ableiten, auf welche wir vielleicht später zurückkommen werden.

XLVIII.

Beiträge zu den Elementen der Geometrie.

Von

Herrn Rudolf Wolf,

Docenten der Mathematik und Archivar der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft zu Bern.

I.

Wenn ich mich längst zu der sich immer mehr Bahn brechenden Ansicht bekenne, dass die künstlichen Schranken zwischen einzelnen Theilen der Geometrie zusammenbrechen müssen, insofern diese Wissenschaft in ihrer innern Gliederung fortschreiten soll, — so halte ich namentlich dafür, dass die ebene Geometrie der Raumgeometrie durch eine gleichmässigere Behandlung beider näher zu bringen ist, und ich gebe mich der Hoffnung hin, dem mathematischen Publikum binnen Kurzem einen betreffenden Versuch vorlegen zu können. Folgendes möge zur Probe dienen.

Wie der Flächenberechnung in der Ebene der Satz: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Flächeninhalt, zu Grunde liegt, so gründet sich die Körperberechnung auf den Satz: Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich gross oder haben gleichen Rauminhalt. Für ersteren Satz wüsste ich keinen klareren Beweis zu geben, als den von Gerwien, wie er

Digitized by Google

in Archiv. Thl. IV. S. 237. angedeutet wurde; da er sich aber nicht auf den Raum ausdehnen lässt, so muss ich ihn dennoch verwerfen. Ebensowenig kann ich den von Euklid oder Legendre beibehalten, da ich es für unwissenschaftlich halte, die Berechnung von Dreieck und Tetraeder auf die Berechnung von Parallelogramm und Parallelepipedum zu gründen. Ich habe nun für das Dreieck folgenden Beweis adoptirt. Ich lasse ein Dreieck der Fläche nach entstehen, indem sich eine Gerade parallel zu einer seiner Seiten fortbewegt, während ihre veränderlichen Grenzpunkte in den beiden andern Seiten bleiben, — zeige dann (mit Hülfe der bei meinem geometrischen Systeme unmittelbar aus den Congruenzsätzen hervorgehenden Aehnlichkeitssätze), dass für Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe die Erzeugende in gleichen Abständen von den Spitzen gleich lang ist, und schliesse aus der fortwährenden Gleichheit der Erzeugenden auf die Gleichheit des Erzeugten. — Für die folgenden Flächensätze die gewöhnlichen Beweise beibehaltend, bin ich so in den Stand gesetzt, die entsprechenden Raumsätze auf ganz analoge Weise zu erledigen.

a) Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich. — Wenn (Taf. VI. Fig. 9.) $abc = hik$ und $do \parallel tu$, so ist T. $abcd$ = T. $hiko$. Denn ist $vw \parallel tu$, so hat man, da parallele Schnitte eines Tetraeders ähnlich sind, $efg \sim abc$ und $lmn \sim hik$, folglich auch, wenn rg, cp, kq und ns senkrecht zu den Dreiecksseiten gezogen sind, $rgf \sim pcb$ und $smn \sim qik$. Aus diesen ähnlichen Dreiecken folgen die Proportionen:

1) $gr : cp = gf : cb = ef : ab$ 2) $sn : kq = nm : ki = lm : hi$.

Da ferner parallele Ebenen parallele Kanten bilden, also $ef \parallel ab$ und $lm \parallel hi$ sein muss, so verhalten sich

3) $ef : ab = ed : ad$ 4) $lm : hi = lo : ho$.

Endlich schneiden parallele Ebenen proportional, also verhält sich auch

5) $ed : ad = lo : ho$.

Die Verbindung dieser fünf Proportionen gibt die zwei neuen

$$ef : ab = lm : hi \qquad gr : cp = sn : kq,$$

aus deren Multiplication

$$ef . gr : ab . cp = lm . sn : hi . kq \text{ oder } \Delta efg : \Delta abc = \Delta lmn : \Delta hik$$

folgt. Nun ist nach der Voraussetzung $\Delta abc = \Delta hik$, also muss auch $\Delta efg = \Delta lmn$ sein. Es kann sich aber der Rauminhalt eines Tetraeders dadurch erzeugen, dass sich eine Ebene parallel einer Seitenfläche fortbewegt, während ihre veränderlichen Grenzlinien in den drei andern Seitenflächen bleiben. Da nun für zwei Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe die Erzeugende in gleichen Distanzen von der Spitze nach dem Bewiesenen immer gleiche Grösse hat, so müssen auch die erzeugten Tetraeder gleiche Grösse haben, w. z. b. w.

Digitized by Google

b) **Tetraeder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Basen.** — Wenn $dh \parallel ik$ (Taf. VI. Fig. 10.) und $abc : efg = m : n$, so verhält sich auch T. $abcd$: T. $efgh = m : n$. Denn theilt man die Basen : ab in m unter sich gleiche Theile und ef in n unter sich gleiche Theile, und verbindet die Theilpunkte je mit den Spitzen c und g, so hat man offenbar abc und efg in m und n auch unter einander gleiche Theile getheilt. Jeder dieser Theile bestimmt mit der zu ihm gehörenden Spitze d oder h ein Tetraeder, und alle diese Tetraeder haben gleichen Inhalt, weil sie bei gleicher Höhe äquivalente Grundflächen haben. Es verhalten sich also die ganzen Tetraeder wie die Zahlen m und n, welche die in ihnen enthaltenen kleinen Tetraeder zählen, w. z. b. w.

c) **Tetraeder von gleicher Basis verhalten sich wie ihre Höhen.** — Ist (Taf. VI. Fig. 11.) $abc = efg$, so sollen sich die Tetraeder $abcd$ und $efgh$ wie ihre Höhen verhalten. Um dies zu beweisen, nehmen wir ein Tetraeder $iklm$ zu Hülfe, welches mit $abcd$ gleiche Höhe habe (so dass $dm \parallel rs$), während $ilm \parallel egh$ und $ikl \cong egf$. Dieses Tetraeder hat mit $abcd$ nach der Voraussetzung gleiche Höhe und äquivalente Grundfläche, also gleichen Inhalt. Denkt man sich nun $efgh$ so in $iklm$ gelegt, dass die gleichen Grundflächen zusammenfallen, so muss auch wegen des vorausgesetzten Parallelismus egh in ilm fallen; es sind daher die beiden Tetraeder, in Beziehung auf egh und ilm als Grundflächen, von gleicher Höhe, und man hat daher

$$\text{T. } efgh : \text{T. } iklm = egh : ilm = eg \,.\, hq : il \,.\, mo = hq : mo.$$

Zieht man nun die Höhen mn und hp senkrecht auf rs und verbindet no und pq, so muss $no \perp il$ und $pq \perp eg$ stehen, da mo und hq als Dreieckshöhen senkrecht zu il und eg. Es stellen also die Winkel mon und hqp die Neigungen der parallelen Flächen ilm und egh gegen rs vor, sind also gleich; folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke mno und hpq ähnlich, also $hq : mo = hp : mn$. Man hat daher endlich

$$\text{T. } efgh : \text{T. } iklm = hp : mn \text{ oder T. } efgh : \text{T. } abcd = hp : mn.$$

d) **Die Inhalte zweier Tetraeder verhalten sich wie die Producte aus Höhe und Basis.** — Stellen $v_1\, g_1\, h_1$ und $v_2\, g_2\, h_2$ Volumen, Grundfläche und Höhe zweier Tetraeder vor, und ist ferner v_3 gleich dem Inhalte eines Tetraeders der Höhe h_1 und Grundfläche g_2, so hat man nach *b*) und *c*):

$$v_1 : v_3 = g_1 : g_2, \qquad v_3 : v_2 = h_1 : h_2;$$

folglich durch Multiplication:

$$v_1 : v_2 = g_1 \,.\, h_1 : g_2 \,.\, h_2.$$

e) **Wählt man den Inhalt eines Tetraeders, dessen Grundfläche die Basis 1 und Höhe 2 hat, während seine Höhe 3 beträgt, zur Volumeneinheit, — so ist das Volumen jedes Tetraeders gleich dem Drittheile**

Digitized by Google

des Productes aus Basis und Höhe. — Bezeichnen nämlich g und h Basis und Höhe irgend eines Tetraeders v, so hat man nach der getroffenen Wahl und in Folge von d):

$$v:1=g.h:\frac{1.2}{2}.3 \text{ oder } v=\frac{gh}{3}.$$

II.

Meistens wird den Schülern der Uebergang von den ersten Elementen der Geometrie zu den rechnenden Theilen etwas schwer. Die Erfahrung hat mir nun gezeigt, dass diese Schwierigkeiten am leichtesten dadurch gehoben werden, wenn man ihnen die Formeln nicht nur durch Rechnung ableitet, sondern sie ihnen auch durch Construction näher zu bringen sucht, und ihnen durch Hinweisung auf die gleichen Resultate beider Methoden Zutrauen zu dem für sie neuen Verfahren weckt. Ich füge hier einige solche Constructionen bei, von denen ich mir nicht bewusst bin, sie in geometrischen Werken gefunden zu haben.

a) Es soll die Summe oder Diffenz zweier Sinus oder Cosinus in ein Product verwandelt werden. — Man hat offenbar, wenn $af=ad=1$ und $\angle fac=\angle dac$ (Taf. VI. Fig. 12.).

$$\sin\alpha+\sin\beta=fg+de=2.cb=2.ac.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=fg-de=2.ch=2.cd.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=ag+ae=2.ab=2.ac.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=ag-ae=-2hd=-2cd.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

b) Es soll gezeigt werden, dass sich in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente ihrer halben Differenz verhält. Aus der nach Construction und Bezeichnung für sich klaren Taf. VI. Fig. 3. folgt unmittelbar

$$a+b:a-b=y:x=\frac{y}{r}:\frac{x}{r}=\text{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}:\text{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

III.

Bilden drei Seiten eines Tetraeders rechte Winkel mit einander, so heissen sie *Katheten*, die Gegenseite *Hypotenuse*, das Tetraeder *rechtwinklig*. Für jedes

solche rechtwinklige Tetraeder besteht sodann der dem Pythagoräischen Theoreme analoge Satz: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Quadratsumme der Katheten. — Wenn (Taf. VI. Fig. 14.) $\angle ABDC = \angle DABC = \angle ABCD = 90^0$, so folgt, da zwei zu einer dritten senkrechte Ebenen auch eine zu ihr senkrechte Kante haben müssen, dass $\angle(a, b) = \angle(a, c) = \angle(b, c) = 90^0$, und daher

$$ABC^2 = \frac{a^2 b^2}{4},\ ABD^2 = \frac{a^2 c^2}{4},\ BCD^2 = \frac{b^2 c^2}{4}.$$

Zieht man nun $e \perp d$, so folgt $f \perp d$ und $\angle(a, c) = 90^0$, und da nun $b.c = d.e$, so wird

$$ACD^2 = \frac{d^2 f^2}{4} = \frac{d^2(a^2+e^2)}{4} = \frac{d^2}{4}\left(a^2 + \frac{b^2 c^2}{d^2}\right) = \frac{a^2 d^2 + b^2 c^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(b^2+c^2) + b^2 c^2}{4} = ABC^2 + ABD^2 + BCD^2,$$

w. z. b. w.

XLIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgabe aus der Stereometrie.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Unter den Namen der Archimedischen Körper führen einige Lehrbücher der Stereometrie eine Klasse von Polyedern auf, welche von regelmässigen Polygonen verschiedener Art (z. B. Quadraten und gleichseitigen Dreiecken) dergestalt begränzt werden, dass an jeder Ecke gleichviel Polygone von einerlei Art zusammenstossen. Diese Körper, die mithin einen natürlichen Fortschritt von den sogenannten Platonischen Körpern aus bilden, geben Anlass zur Aufstellung folgender Aufgabe mit mehreren Unbekannten:

Digitized by Google

Wie viel regelmässige *p*ecke, *q*ecke, *r*ecke etc. wird ein Polyeder enthalten müssen, wenn an jeder Ecke desselben *a p*ecke, *b q*ecke, *c r*ecke etc. zusammenstossen sollen?

Beispielsweise führen wir an, dass aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken sich nur folgende fünf Archimedische Körper bilden lassen:

1)	2	gleichs.	Dreiecke	3	Quadr.,	an	jeder	Ecke	1	gl. Dr.	2	Qu.
2)	8	„	„	18	„	„	„	„	1	„	3	„
3)	8	„	„	6	„	„	„	„	2	„	2	„
4)	8	„	„	2	„	„	„	„	3	„	1	„
5)	32	„	„	6	„	„	„	„	4	„	1	„

Die Netze dieser Körper zu entwerfen, dürfte für Anfänger eine sehr instructive Uebung abgeben.

Aufgabe aus der Integralrechnung.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

In einem Tonnengewölbe (Halbcylinder), dessen Grundfläche horizontal liegt und dessen normaler Querschnitt eine halbe Ellipse bildet, denjenigen Theil der krummen Oberfläche zu berechnen, welcher von zwei Vertikalebenen, die einander in einem Punkte der Achse des Gewölbes durchschneiden, und von der Grundfläche begränzt wird.

Wir theilen diese Aufgabe mit, weil sich das Resultat auf eine für Praktiker sehr bequeme Gestalt bringen lässt. Bezeichnet man mit a die horizontale, mit b die vertikale Halbachse des normalen Querschnitts, und mit F die horizontale Projection der gesuchten krummen Oberfläche, — welche ein Dreieck bildet, — so ist diese krumme Fläche selbst

$$= kF,$$

wo man den Factor k, der nur noch von dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ abhängig ist, durch eine Integration findet, die auf Logarithmen oder Kreisbögen führt, je nachdem man $a > b$ oder $a < b$ hat. Sie vereinfacht sich für $a = b$, d. h. für Kreisgewölbe, wo man das überraschende Resultat $k = 2$ erhält; in dieser einfachsten Gestalt findet sich die Aufgabe bei Moigno, in dessen musterhafter Darstellung der Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie (Calcul différentiel et intégral. Tome II.).

Digitized by Google

Eine Anzahl Werthe für k haben wir in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$\frac{b}{a}$	k	Diff.	$\frac{b}{a}$	k	Diff.
0,5	1,3802		1,3	2,4102	1387
0,6	1,4944	1142	1,4	2,5506	1404
0,7	1,6145	1201	1,5	2,6925	1419
0,8	1,7394	1249	1,6	2,8358	1433
0,9	1,8681	1287	1,7	2,9801	1443
1,0	2,0000	1319	1,8	3,1254	1453
1,1	2,1346	1346	1,9	3,2715	1461
1,2	2,2715	1369	2,0	3,4184	1469
		1387			

Diese Aufgabe findet Anwendung sowohl zur Berechnung der Oberflächen von Klostergewölben (welche aus lauter Flächenstücken von der angegebenen Gestalt zusammengesetzt sind), als auch von Kreuzgewölben (wo von jedem der sich durchkreuzenden Tonnengewölbe Flächenstücke der angegebenen Art zu subtrahiren sind), und möchte sich desshalb besonders für technische Lehranstalten als Rechnungsbeispiel eignen.

L.

Miscellen.

Professor Frisch in Stuttgart hat sich einer vollständigen Ausgabe von Kepler's Schriften unterzogen und den dazu entworfenen Plan bekannt gemacht. Die Schriften sollen in ihrer ursprünglichen Form chronologisch geordnet erscheinen, begleitet von kurzen erläuternden Anmerkungen. Eine Einleitung wird einen Ueberblick über den Zustand der Mathematik und Naturwissenschaften in der Keplern vorausgegangenen Zeit geben und daran sich Kepler's Leben, mit Rücksicht auf dessen wissenschaftliche Thätigkeit, schliessen. Hierzu steht die Benutzung von Kepler's handschriftlichem Nachlasse, welcher in 22 Foliobänden die Concepte der gedruckten Werke und einen reichhaltigen Briefwechsel, so wie mehrere angefangene astronomische Arbeiten und zerstreute Notizen enthält, zu erwarten. Die Geschichte dieses

Digitized by Google

Nachlasses erzählt v. Murr in seinem Journal für Kunstgeschichte. Thl. 3. S. 727. Dr. Hansch, Collegiat in Leipzig, hatte ums Jahr 1710 die Handschriften um 100 Fl. in Danzig erkauft, und erlangte von dem Kaiser Karl VI. das Versprechen von 4000 Fl. zu der Herausgabe; doch ward ihm nach Ueberreichung des ersten Bandes der Titel eines kaiserlichen Raths und eine goldene Kette verliehen, aber die Unterstützung versagt. In Frankfurt a. M. gedachte er dennoch den Druck zu bewerkstelligen, und verlor darüber seine Collegiatur zu Leipzig. Auch die Ausgabe des liber de calendario Gregoriano. 1726. vermochte nicht die kaiserliche Zusage der Erfüllung näher zu bringen. Die Keplerschen Handschriften waren indessen zu Frankfurt für 828 Fl. versetzt worden, wo sie in Vergessenheit geriethen, bis sie v. Murr im Jahre 1774 für die Akademie in Petersburg erkaufte. Dort ward alsbald ein Plan zur Herausgabe entworfen, blieb aber ohne Ausführung. Vielleicht, dass nun Mitglieder der Akademie in Petersburg mitwirkend eintreten, und das für die Wissenschaft wichtige, das Andenken des grossen Mannes erneuernde Werk vollenden (Jenaische Literatur-Zeitung. 1845. Nr. 194. S. 775.).

Die mathematische Gesellschaft in London.

Gegen Mitte Juni 1845 fand die Einverleibung der seit 1717 bestehenden „Mathematischen Gesellschaft“ in die „Astronomische Gesellschaft“ statt. Dieses Ereigniss ist insofern von Interesse, als die Gründung des erstgenannten Vereins eine ganz auf das Volk und seine Bildung berechnete war. Was heutzutage die sogenannten Mechanic institutions und Lyceums in den englischen Fabrikstädten sich nach vielseitigerer Richtung hin zur Aufgabe stellen, das suchte diese Gesellschaft in besonderm Bezug auf mathematische und physikalische Wissenschaften durch gegenseitigen Unterricht, Vorlesungen und dergleichen zu erreichen. Der Grundsatz, welcher an der Spitze der Gesellschaftssatzungen stand, lautete: „Es ist die Pflicht jedes Mitgliedes, wenn es um Auskunft über eine mathematische oder naturwissenschaftliche Frage von einem Andern angegangen wird, Letzterem in der fasslichsten und deutlichsten Weise, deren es fähig, Aufschluss zu ertheilen.“ Ursprünglich zählte die Gesellschaft 64 Mitglieder, später 81, Quadratzahlen, die als Symbole gelten mochten. Zum grossen Theil bestand sie aus Leuten von niederm Herkommen, die sich aus eigenem Triebe und eigner Kraft zum Denken und Forschen emporgearbeitet, sogenannten Autodidakten, und doch befanden sich Männer darunter, die sich einen europäischen Namen erwarben. So Dollond und Thomas Simpson, welcher Letztere von der Gesellschaft von seinem Webstuhle in Spitalfields hervorgezogen wurde, um in der Woolwich Academy Mathematik zu lehren. Wie heute noch ein grosser Theil der Handwerkervereine in Deutschland, legte man sich bei den Versammlungen.

Digitized by Google

welche gegenseitigen wissenschaftlichen Austausch und Bildung zum Zweck hatten, nicht den mindesten conventionellen Zwang auf. Jedes Mitglied erschien mit seiner Pfeife, hatte seinen Zinnkrug mit Ale vor sich stehen, und brachte Schiefertafel und Griffel mit. Es schien Grundsatz zu sein, bei Erörterung der schwierigsten Fragen dem Satze: „ex fumo dare lucem" buchstäblich Anwendung zu verschaffen Später kamen andere Elemente hinzu, welche im Sinne der geselligen Verfeinererungen Neuerungen machten. An die Stelle des Zinnkrugs trat das Glas und die Pfeife verschwand allmälig; aber mit dem alten Brauch nahm auch die Zahl der Mitglieder ab, und deren kabbalistische Geviertzahl war bald nur eine geschichtliche Denkwürdigkeit. Endlich zählte sie nur noch 19 Mitglieder, nicht mehr Weber und anderes Gewerbsvolk, sondern Mitglieder anderer mit hochklingenden Namen versehener Gesellschaften. Da ihr Fortbestehen unter solchen Umständen nicht mehr möglich war, machte man der Astronomischen Gesellschaft den Vorschlag zur Vereinigung, die ihn bestens aufnahm, da sie sich dadurch ausser der Zunahme ihrer Mitglieder in Besitz der reichen Sammlungen und anderer Mittel der mathematischen Gesellschaft setzte.

Un nouvel observatoire météorologique vient d'être établi sur le sommet du Vésuve; il a été inauguré à l'occasion du dernier congrès des savants italiens, réunis cette année à Naples. Il est placé à l'endroit de la montagne célèbre que l'on nomme Santissimo Salvatore.

Digitized by Google

XXV.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichtsmethode.

Ueber die Beschränkung des mathematischen Unterrichts auf den kurhessischen Gymnasien durch die hohe Ministerial-Verfügung vom 28. Februar 1843, Kurfürstlichem Ministerium des Innern als Denkschrift unterthänig überreicht von Dr. E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Kassel. Marburg 1843. 8.

Die betreffende Ministerialverfügung, von welcher schon im Literarischen Berichte Nr. XVIII. S. 274. die Rede gewesen ist, wird zuerst auf S. 3. vollständig mitgetheilt und dann weiter besprochen, indem der Herr Vf. diese Besprechung auf die drei folgenden Hauptpunkte zurückführt:

„1. Die Beschränkung des mathematischen Unterrichts hinsichtlich der darauf zu verwendenden Zeit steht mit der Beschränkung des äusseren Umfangs durchaus in keinem Verhältniss.

2. Dieses Missverhältniss wird auch durch die Vorschrift über die innere Behandlung der Mathematik nicht allein nicht beseitigt, sondern sogar noch vermehrt.

3. Statt der dermaligen Beschränkung des mathematischen Gymnasialunterrichts hinsichtlich seines äussern Umfangs erscheint vielmehr eine andere im Interesse unserer Gymnasien wünschenswerth; aber auch selbst wenn diese eintreten sollte, bleibt die Wiederherstellung der früheren wöchentlichen Stundenzahl dringendes Bedürfniss.“

Was die unter Nr. 3. angedeutete wünschenswerthe Beschränkung des mathematischen Unterrichts angeht, so betrifft dieselbe die Ausschliessung der Stereometrie, welche nebst der Lehre von den Kegelschnitten und der sphärischen Trigonometrie dem academischen Unterrichte vorbehalten werden soll. Obgleich wir nicht glauben, dass in letzterer Beziehung alle Lehrer der Mathematik dem Herrn Vf. beistimmen werden, da die Stereometrie jedenfalls eine eigenthümliche bildende Kraft besitzt, die nicht leicht jeder Gymnasiallehrer unbenutzt lassen möchte, so ist die Schrift doch

Digitized by Google

durchgängig mit grosser Besonnenheit verfasst, bekundet überall den erfahrenen Lehrer, der sich zu manchem, namentlich zu dem vorher erwähnten Vorschlage, wohl nur durch die Dringlichkeit der Umstände veranlasst und genöthigt gesehen hat, und verdient von allen Lehrern der Mathematik beachtet zu werden.

Als Resultat der ganzen von dem Herrn Vf. angestellten Untersuchung ergiebt sich, dass derselbe an das Hohe Kurfürstlich Hessische Ministerium die Bitte richten zu müssen glaubt, die Verfügung vom 28. Februar 1843 in mehreren wesentlichen Punkten zu modificiren. Dass dies recht bald geschehen möge, wünschen wir mit dem Herrn Vf. im Interesse des mathematischen Unterrichts überhaupt und zum Besten der Kurfürstlich Hessischen Gymnasien insbesondere. Eine Gewährleistung hierfür, und zwar nach unserer Ueberzeugung eine jedenfalls höchst erfreuliche, liegt schon in dem Umstande, dass der Herr Vf. keinen Anstand nehmen zu müssen geglaubt hat, der ihm unmittelbar vorgesetzten höchsten Behörde zwar, wie es sich gebührt und schickt, in ruhigem und ehrerbietigem Tone, aber doch freimüthig und offen, in einer vor das Forum der Oeffentlichkeit gebrachten Schrift entgegen zu treten, was jedenfalls diese hohe Behörde selbst in einem sehr vortheilhaften Lichte erscheinen lässt, und ein erfreuliches Zeichen der Zeit ist.

Arithmetik.

Poinsot: Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. 4. Paris 1845. 8 fr.

(Aus Liouville's Journal besonders abgedruckt.)

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen. Von Dr. Brandis, viertem Lehrer an dem Königlichen Christianeum zu Altona (Programm des Christianeum zu Altona von Ostern 1845). Altona. 1845. 4.

Diese Abhandlung, deren erster Theil jedoch für jetzt nur vorliegt, verdient jedenfalls allgemeiner bekannt und beachtet zu werden. Der Herr Vf. hat in derselben eine Zusammenstellung der verschiedenen allgemeinen Principe, auf welche bis jetzt die Auflösung der numerischen Gleichungen gegründet worden ist, mit deren gehöriger Begründung, zu geben und zugleich die Gränzen ihrer Anwendbarkeit näher zu bestimmen gesucht, namentlich ob dieselben bloss bei der Auflösung der algebraischen oder auch bei der Auflösung der transcendenten Gleichungen anwendbar sind. Dass der Herr Vf. bei den älteren Methoden kürzere Zeit verweilt als bei den neueren, kann nur gebilligt werden, und die ganze Abhandlung wird, wenn sie erst in ihrer Vollendung vorliegt, zugleich eine gute historische Uebersicht über die verschiedenen Auflösungsmethoden der numerischen Gleichungen darbieten. Der

Digitized by Google

so wichtigen Lehre vom Excess der gebrochenen algebraischen Functionen hat der Herr Vf. mit Recht besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und namentlich in dieser Beziehung enthält die Abhandlung auch manches Eigenthümliche, was wir leider hier zwar nicht Alles einzeln namhaft machen können, aber doch nicht unerwähnt lassen dürfen, dass der Herr Vf. mit Hülfe der Lehre vom Excess einen neuen rein analytischen, und selbst für transcendente Gleichungen gültigen Beweis des wichtigen Theorems von Cauchy über die Gränzen der imaginären Wurzeln der Gleichungen gegeben hat. Wir wünschen, dass der Herr Vf. recht bald Gelegenheit finden möge, die Fortsetzung dieser Abhandlung herauszugeben.

Handbuch der mathematischen Analysis von Doctor Oskar Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena. Erster Theil. Algebraische Analysis. Mit zwei Kupfertafeln. Jena. 1845. 8. 2 thlr. 16 ggr.

Vor dem Jahre 1821, wo Cauchy's „Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Ire Partie. Analyse algébrique" erschien, ist es wohl nur wenigen Mathematikern eingefallen, an der völligen Unfehlbarkeit der Lehren der Analysis, und namentlich auch an der völlig allgemeinen Gültigkeit der in derselben gewonnenen Resultate zu zweifeln; ja es hätte wohl geradezu für ein crimen laesae majestatis gegolten, wenn einer sich so etwas hätte wollen in den Sinn kommen lassen, und vollends wenn er solche gefährliche Ideen öffentlich auszusprechen gewagt hätte. Man denke hierbei nur an die combinatorische Analysis und deren Bearbeiter, und erinnere sich u. A., dass noch der verdienstvolle Klügel den polynomischen Lehrsatz „einen hohen Standort, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann" nannte. Das ist nun freilich seit dem Erscheinen des oben genannten wichtigen, und jedenfalls in der Geschichte der Mathematik wahrhaft Epoche machenden Werks von Cauchy, und mehrerer anderer auf dasselbe gefolgter Schriften desselben tiefsinnigen Mathematikers, jetzt in vieler Rücksicht anders geworden, und der oben genannte hohe Standort, von welchem man die Gefilde der Mathematik übersehen kann, ist aus den Werken Cauchy's und allen deren Richtung folgenden neueren analytischen Schriften gänzlich verschwunden.

Frägt man sich nach dem Grunde dieser bei einer Wissenschaft von so hoch gerühmter Strenge, wie die Mathematik, allerdings sehr merkwürdigen Erscheinung, und will auf diese Frage eine ganz unumwundene, auf keiner Selbsttäuschung beruhende Antwort ertheilen, so muss man kurzweg sagen: „dass diese Erscheinung darin ihren Grund hat, weil Cauchy zuerst völlig klar und deutlich gezeigt hat, dass es mit der früher so hoch gerühmten völligen Allgemeinheit der meisten der von den älteren Analytikern aufgestellten Sätze nichts ist, dass diese Sätze vielmehr sehr häufig wesentlichen Einschränkungen unterworfen und nicht selten in sehr enge Gränzen eingeschlossen werden müssen, wenn ihre Anwendung nicht zu unrichtigen oft völlig widersinnigen Resultaten führen soll; dass daher auf diese Weise der wahre materielle Gehalt der Analysis gegen

Digitized by Google

früher sehr vermindert worden und die Anzahl derjenigen Sätze, welche gegenwärtig als völlig fest begründet und namentlich auch rücksichtlich der Zulässigkeit ihrer Anwendung als in völlig bestimmte Gränzen eingeschlossen zu betrachten sind, im Verhältniss zu dem früheren Zustande der Analysis eine sehr geringe ist, dass man aber eben deshalb gerade diese Sätze als kostbare Perlen zu betrachten hat, die man sich durch nichts wieder entreissen lassen darf, vielmehr immer sorgfältiger pflegen und weiter auszubilden suchen muss *); dass man endlich, so wie die Sachen jetzt stehen, die früher grösstentheils gewöhnliche, namentlich eine möglichst grosse Allgemeinheit erstrebende Behandlungsweise der Analysis, insbesondere die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten, verlassen, bei Begründung der analytischen Sätze zu mehr speciellen, jedem einzelnen Falle besonders angepassten Methoden seine Zuflucht nehmen, und dabei sein Augenmerk ganz vorzüglich darauf richten muss — gewissermassen nach Art der griechischen Geometer, welche bekanntlich überall mit der ängstlichsten Sorgfalt und Genauigkeit alle möglichen Fälle streng von einander schieden und jeden derselben einer besonderen Betrachtung unterwarfen —, alle einzelnen Fälle, die bei einem Satze vorkommen können, von einander zu unterscheiden, und bei jedem einzelnen derselben die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit des Satzes zu untersuchen, überhaupt also jederzeit die Gränzen, innerhalb welcher der Satz richtig oder unrichtig ist, bestimmt festzustellen.

Mit diesen wenigen Worten habe ich, so viel es hier der Raum gestattete, den Geist der neueren Analysis in der ihr vorzüglich durch Cauchy gegebenen gegenwärtigen Gestalt zu charakterisiren gesucht. Dass dieselbe in Rücksicht auf eine gewisse Eleganz und die Allgemeinheit der Behandlungsweise der älteren Analysis nachsteht, will ich gern zugeben, und auch einräumen, dass überhaupt die wahre Behandlungsweise der Analysis noch nicht gefunden ist, so wie auch, dass es wohl möglich sein dürfte, mehrere der älteren Methoden zu grösserer Strenge zu erheben, welches zu versuchen — was unter allen Bedingungen mit Dank aufzunehmen ist — jedenfalls eine sehr würdige Aufgabe für jeden Mathematiker ist; eben so entschieden muss ich aber behaupten, dass von der neueren Analysis in Rücksicht auf die Feststellung der gewonnenen Resultate auf völlig sicheren Grundlagen, auf gehörige Einschränkung derselben zwischen bestimmten Gränzen und auf die dadurch bedingte vollständige Sicherstellung vor Fehlgriffen in deren Anwendung, überhaupt also auf eine wahrhaft strenge, von jedem

*) Ungefähr mit den letzteren, hier übrigens nur aus dem Gedächtnisse niedergeschriebenen Worten, äusserte sich vor Kurzem gegen den Unterzeichneten in einem Briefe auch ein demselben befreundeter trefflicher schwedischer Mathematiker, Herr Professor Malmsten in Upsala, der mit der älteren und neueren Analysis in gleichem Grade vertraut ist.

Digitized by Google

Zweifel freie Begründung der Sätze, welche den eigentlichen materiellen Inhalt der ganzen Wissenschaft bilden, die ältere bei Weitem überflügelt wird, und dass in allen diesen Beziehungen die ältere Analysis im Verhältniss zur neueren eigentlich nur als ein Spiel mit Formen zu betrachten ist, welches durchaus keine wahrhaft innere Ueberzeugung von der unumstösslichen Richtigkeit der gewonnenen Resultate zu gewähren geeignet ist, und dieselbe in der That auch fast nie gewährt. Hierbei hat man auch, was die Methode betrifft, nicht zu übersehen, dass die Beweise in der neueren Analysis häufig ein Werk des grössten Scharfsinns sind, dass jeder in seiner Eigenthümlichkeit oft ein besonderes Kunstwerk ist, und eben so sehr wie die Entwickelungsmethoden der älteren Analysis, rücksichtlich ihrer allgemeinen Anwendbarkeit, in seiner eigenthümlichen Gestaltung durch grosse Eleganz sich auszeichnet und anzieht. Man hat diese Beweise hin und wieder nicht mit dem Namen Kunstwerke, sondern mit dem Namen Kunststücke zu benennen beliebt. Dies können sich aber alle diejenigen Mathematiker, denen der in den Schriften der griechischen Geometer herrschende Geist nicht fremd geworden ist, gern gefallen lassen; denn sind die Beweise der neueren Analysis Kunststücke, und entbehren dieselben eines gewissen durchgreifenden Princips, so ist noch vielmehr die ganze griechische Mathematik ein Kunststück zu nennen. Der Geist der neueren Analysis und der Geist der griechischen Mathematik ist nach meiner vollkommensten Ueberzeugung, wie ich schon oben andeutete, im Wesentlichen ganz ein und derselbe, was gewiss bei jedem in der Strenge der Griechen aufgewachsenen und erstarkten Mathematiker der ersteren nur zur Empfehlung gereichen kann.

Ganz in dem so eben näher charakterisirten Geiste der neueren Analysis ist das vorliegende Werk des Herrn Doctor Schlömilch verfasst, und verbreitet sich hauptsächlich über die folgenden Gegenstände. Einleitung. — Von den veränderlichen Grössen und den Functionen im Allgemeinen. (In diesem mit Recht sehr ausführlichen Kapitel hat der Herr Vf. die wichtigsten Grundlagen der ganzen Wissenschaft zusammengefasst und sich dabei der grössten Deutlichkeit und Anschaulichkeit befleissigt, deshalb auch öfters geometrische Darstellungen zu Hülfe genommen. Dass in diesem Kapitel vorzüglich auch von der Continuität und Discontinuität der Functionen, von den Gränzen u. s. w. gehandelt worden ist, versteht sich von selbst.). — Bestimmung der Natur verschiedener Functionen aus gegebenen Eigenschaften derselben (Auflösung der Gleichungen $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $f(x).f(y)=f(x+y)$, $f(x)+f(y)=f(xy)$, $f(x).f(y)=f(xy)$. Die Wichtigkeit der Auflösung solcher Functionsgleichungen, welche zur allgemeinen Charakterisirung der eigentlichen Natur der Functionen sehr geeignet sind, kann nach unserer Meinung nicht genug hervorgehoben werden, und verdient, dass sich die Analytiker noch mehr als bisher geschehen mit derselben beschäftigen. Deshalb hat auch der Herr Vf. mit Recht auf dieselben ein besonderes Gewicht gelegt.). — Bestimmung der Natur der Functionen aus gegebenen speciellen Werthen derselben (Hier vorzüglich auch vom Interpolationsproblem). — Von den endlichen und unendlichen Reihen (Hier natürlich hauptsächlich von der Convergenz und Divergenz der Reihen und von den Rechnungen mit unendlichen Reihen). — Das Bino-

Digitized by Google

mialtheorem. — Die Exponentialreihe. — Die logarithmischen Reihen. — Die Reihen für den Sinus und Cosinus. — Potenzen mit unmöglichen Grundzahlen (Theoreme von Moivre und Cotes. Auflösung der reinen Gleichungen). — Die Exponentialgrössen und Logarithmen mit imaginären Exponenten. — Die goniometrischen und cyklometrischen Functionen mit imaginären Variabeln. — Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. — Reihen für den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens. — Reihen für die cyklometrischen Functionen. — Die goniometrischen Functionen unter der Form von Producten. — Verschiedene Relationen für goniometrische Functionen (Hier auch von den Bernoullischen Zahlen und den Sekanten-Coefficienten und deren Beziehungen zu einander). — Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche. — Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche (Dass der Herr Vf. in diesen beiden Kapiteln auch die Theorie der Kettenbrüche, wobei zugleich von der Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolphschen Zahl gehandelt wird, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hat, verdient besondere Anerkennung). — Schlussbetrachtung.

Aus dieser Uebersicht des Inhalts ergiebt sich, dass das Werk sich fast über alle Gegenstände der algebraischen Analysis (jedoch mit Ausschluss der allgemeinen Theorie der Gleichungen) verbreitet, und wir können dasselbe einem Jeden, wer sich mit der neueren algebraischen Analysis gründlich bekannt zu machen Beruf und Veranlassung findet, wegen seiner Deutlichkeit aus Ueberzeugung empfehlen, und hegen die Hoffnung, dass dasselbe überhaupt zur weiteren Verbreitung der neueren Ansichten und zu der richtigen Würdigung derselben, zugleich aber auch überhaupt zur Beförderung wahrhaft gründlicher analytischer Studien Vieles beitragen wird. Der Herr Vf. hat nach einer möglichst systematischen Darstellung gestrebt; hat alle Grundbegriffe und Sätze möglichst anschaulich zu machen und durch geeignete allgemeine Betrachtungen, wohin namentlich die Vorrede und die Schlussbetrachtung gehören, ein grösseres Licht über das eigentliche Wesen der Wissenschaft und ihrer Methode zu verbreiten gesucht; hat endlich das Imaginäre überall, wo seine Einmischung als fremdartig erscheint, zu vermeiden sich angelegen sein lassen, und darin öfters zu eigenthümlichen Entwickelungen und Darstellungen Veranlassung finden müssen, welche von seinem, schon durch viele frühere Arbeiten hinreichend bewährten Scharfsinn ein neues erfreuliches Zeugniss ablegen.

Gewünscht hätten wir, dass der Herr Vf. auch die im Geiste der neueren Analysis noch sehr wenig untersuchte Theorie der Facultäten aufgenommen hätte, welche wir bei dieser Gelegenheit überhaupt der Aufmerksamkeit der Mathematiker empfehlen möchten. Denn sobald der Exponent keine positive ganze Zahl ist, sind wir in diesem Theile der Analysis jedenfalls noch sehr im Unklaren. Unter mehreren anderen Fragen, die man sich hier vorlegen kann, wollen wir wegen Beschränktheit des Raumes jetzt nur die eine nach der Anzahl der verschiedenen Werthe, die eine Facultät mit gebrochenem Exponenten haben kann, und nach der vollständigen Bestimmung dieser sämmtlichen verschiedenen Werthe hervorheben, welche sich nach unserer Meinung hier eben so gut wie die analoge Frage bei den Potenzen, die in der Auflösung der

Digitized by Google

reinen Gleichungen bekanntlich bereits ihre vollständige Beantwortung gefunden hat, aufgeworfen werden kann.

Der Fortsetzung dieses auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Werks sehen wir mit Verlangen entgegen.

Folgende Druckfehler sind noch in demselben zu verbessern: S. 18. Z. 1. v. o. l. AB statt OB. — S. 171. Z. 11. v. o. l. $+m_4$ statt $-m_4$.

G.

Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen. Ein Handbuch für Staatsmänner, Cameralisten, Kaufleute, Juristen, Forstmänner, Oeconomen u. s. w. von Dr. L. Oettinger, Grossherzogl. Badischem Hofrath und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B. Braunschweig. 1845. 8. 1 thlr. 20 ggr.

Der Hauptinhalt dieses neuen Werks über die sogenannte politische Arithmetik ist folgender: Rechnung mit einfachen Zinsen. — Rechnung mit Zinses-Zinsen. — Verhältniss zwischen der Rechnung mit einfachen Zinsen und der mit Zinses-Zinsen und Anwendungen. — Ueber die Berechnung des Interusuriums. — Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. — Ueber Lotterie-Anlehen und Lotterien. — Von der Sterblichkeit. — Berechnung der Leibrenten, Lebensversicherungen, Wittwenpensionen u. s. w. — Taf. I—X.

Unter den jetzigen deutschen Mathematikern ist der Herr Vf. des vorliegenden Werks derjenige, welcher seine Aufmerksamkeit am meisten der sogenannten politischen Arithmetik zugewandt, und diese Wissenschaft auch schon durch verschiedene eigene Untersuchungen gefördert hat. Das vorliegende Werk enthält die wichtigsten älteren Untersuchungen und mehrere der neuen Untersuchungen des Herrn Vfs. in systematischem Zusammenhange und in der Form eines für Vorlesungen bestimmten Compendiums, in welcher Beziehung dasselbe auch nach unserer Ueberzeugung alle Empfehlung verdient. Ueberhaupt aber werden alle auf dem Titel genannte Personen, unter Voraussetzung hinreichender mathematischer Vorkenntnisse, die sich jedoch mit geringer Ausnahme durchaus nicht über die elementaren Theile hinaus zu erstrecken brauchen, vielfache Belehrung und Unterstützung bei ihren praktischen Rechnungen aus demselben schöpfen können. Die Wissenschaft von allen früheren unrichtigen Ansichten sorgfältig zu sichten, hat der Herr Vf. eifrig gestrebt, und hat u. A. auch der Beantwortung der Frage: in welchen Fällen die Rechnung mit einfachen Zinsen oder die Rechnung mit Zinses-Zinsen in Anwendung gebracht werden müsse, besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Die verschiedenen Ansichten über das Interusurium sind im vierten Kapitel mit steter Berücksichtigung des Juridischen bei dieser Frage sehr vollständig entwickelt, und die angehängten Tafeln, unter denen ausser den verschiedenen Sterblichkeitstafeln auch mehrere zweckmässig eingerichtete Tafeln zur Erleichterung der Rechnung mit Zinses-Zinsen sich finden, sind so eingerichtet, dass sie die Rechnung mit Logarithmen grösstentheils überflüssig machen. Das Aeussere dieses Werks, dem wir möglichst grosse Verbreitung unter dem betreffenden Publikum wünschen, ist in jeder Beziehung vorzüglich.

Digitized by Google

Sammlung von mathematischen, namentlich von Differential- und Integralformeln, nebst den Gleichungen etc. jener krummen Linien, die am häufigsten Anwendung finden. Von Joh. Andr. Schubert, Professor der mathem. Wissensch. an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Zweite unveränderte Ausgabe. Dresden und Leipzig. 1845. 8. 16 ggr.

Diese Sammlung kann neben andern Sammlungen dieser Art beim Unterrichte als Sammlung von Uebungsbeispielen und Praktikern zum Nachschlagen in den gewöhnlichen Fällen der Praxis hin und wieder gute Dienste leisten, ohne dass sie sich durch eine besondere Vollständigkeit oder irgend eine sonstige Eigenthümlichkeit auszeichnete. Die beigebrachten Differentialformeln sind nur die ganz gewöhnlichen und allgemein bekannten, und Beispiele für die so wichtige Bestimmung der Reste der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe fehlen leider auch in dieser Sammlung gänzlich. Auch die in jeder Beziehung so höchst wichtigen allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Reste in ihren verschiedenen Formen sind nicht einmal aufgenommen, was einen neuen, sehr unerfreulichen Beweis liefert, dass die neueren, so überaus wichtigen Fortschritte der Analysis in Deutschland bis jetzt eine verhältnissmässig nur sehr geringe Verbreitung gefunden haben. Ein Grund, warum der Herr Vf. statt des allgemein eingeführten Differentialzeichens d sich überall des Zeichens δ bedient, ist durchaus nicht abzusehen, und muss namentlich deshalb getadelt werden, weil das Zeichen δ bekanntlich schon längst eine andere sehr bestimmte, bereits allgemein recipirte Bedeutung in der Variationsrechnung gefunden hat. Dergleichen Gewohnheiten führen nur zu Verwirrung in der Wissenschaft. Die Sammlung der Integralformeln ist mit Recht die reichhaltigste.

Rühlmann, M., logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. 3te verb. Stereotypausg. 16. Dresden. 1845. 12 ggr.

Geometrie.

Klinkhardt, E., Leitfaden für den Unterricht in den Elementen der ebenen Geometrie und in der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie auf Gymnasien und Gewerbschulen. gr. 8. mit 4 Figurentafeln. Lindau 1845. 16 ggr.

De Sex Första Böckerna af Euclidis Elementa jemte Planimetri och Stereometri, utgifne af P. R. Bråkenhjelm. Örebro 1845. 8. b. 2 Rdr. 16 sk. (Boktr. förl.)

Lefebure de Fourcy, Lehrbuch der descriptiven Geometrie, nebst einer, die Theorie der Ebene und geraden Linie im Raume enthaltenden Einleitung. Aus dem Franz. nach der 4. Ori-

Digitized by Google

ginalauflage übers. v. Heinrich v. Bünau. gr. 8. mit 34 Figurentafeln in 4. Chemnitz 1845. 1 thlr. 21 ggr.

Hymers, J., Treatise on Conic Sections, and the Application of Algebra to Geometry. 3d edit. revised and enlarged. 8vo. Cambridge 1845. 9 sh.

Mossbrugger, L., analytische Geometrie des Raumes, mit Berücksichtigung der neueren geometrischen Verwandtschaft und der zur grösseren Verständigung des Werkes erforderlichen Entwickelungen aus der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Selbststudium. Mit 8 lith. Tafeln. gr. Lex. 8. Aarau 1845. 4 thlr.

(Eine ausführlichere Anzeige dieses Werks werden wir sogleich geben, wenn es in unsere Hände gelangt sein wird, was jetzt noch nicht der Fall ist.)

Ueber die tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung. Von Dr. Aloys Mayr, Prof. der Mathematik und Astronomie an der Universität zu Würzburg. Würzburg 1845. 4. 16 ggr.

In dem Vorworte zu dieser schon im Literarischen Berichte Nr. XXIV. S. 361. vorläufig angezeigten Schrift sagt der Herr Vf. „dass er diese Untersuchungen über die Flächen (wobei er vorzüglich die noch weniger bekannten Eigenschaften der windschiefen Flächen hervorhebt) nicht sowohl um ihrer Resultate willen angestellt habe, weil diese zum Theil schon bekannt seien, als vielmehr um zu zeigen, welche endlichen geometrischen Grössen das erste, zweite, dritte und die höheren Differenziale der Coordinaten, der Bogen, der Flächen u. s. w. seien, wobei es sich ihm nur um die Wahrheit in der Sache des Differenzial-Calculs handele, die für Einige sehr wenig, für Andere hingegen, die den hohen Sinn für Wissenschaft und Wahrheit bewahrt haben, sehr Viel, ja Alles sei und sein werde. Daher habe er mit der Erklärung des wahren Wesens der Differenzialrechnung diese Untersuchungen begonnen, und die Differenzialien selbst, nicht etwa bloss die Differenzial-Quotienten, als endliche, berechnenbare und construirbare Grössen nachgewiesen, und dies so weit ausgeführt, dass keinem Mathematiker, der in diese wahrlich sehr leichten Ableitungen eindringe, ein Zweifel übrig bleiben könne, wie die übrigen hier nicht untersuchten Differenzialien geometrischer und mechanischer Grössen als endliche und berechnenbare Grössen gefunden und bewiesen werden können."

Praktische Geometrie.

Wünsch, J. L., Sammlung von Beispielen aus der praktischen Geometrie für Real- und Sonntagsgewerbschulen. Nördlingen 1844.

Castle, H. J., Treatise on Land Surveying and Levelling; with copious Field Notes, Plans, and Diagrams, containing the Chain and Theodolite Surveying of this Country, Surveying of Woods by the Circumferentor in New-Countries, a Practical Course

Digitized by Google

of Railwag Levelling, with Field Notes and Drawings of the requisite Sections and Cross Sections: together with several Practical Formulae for each Work, the Theory and Practice of Running Out Curves, and the Mode of Staking out the Side Stakes, accompanied with Introductory Chapters on the Mathematical Principles of each, and the necessary Tables of Logarithms for Working the Problems; intended as a complete Vade-Mecum of Field-Work to the Young Surveyor. London 1845. 8. cloth 12 sh.

Trigonometrie.

Köcher, Dr. Fr. O., Grundzüge der ebenen Trigonometrie Ein Leitfaden beim Unterricht in derselben. Verbess. Ausgabe. gr. 8. Breslau 1845. 6 ggr.

Mechanik.

Earnshaw, S., Treatise on Statics, containing the Theory of the Equilibrium of Forces, and numerous Examples illustrative of the general Principles of the Science. 3d edit., enlarged, 8. Cambridge 1845. 10 sh.

Ehrenstam, J. F., Första grunderna till Mekaniken. Efter vullständiga Läroböcker sammandragne. Andra Uppl. 4. Gefle. 1845. $\frac{3}{8}$ Rdr.

Praktische Mechanik.

Demme, Der prakt. Maschinenbauer. 20. Liefer. 8. Quedlinburg. 1845. 2 thlr. 16 ggr.

Sonnet, H., Recherches sur le mouvement uniforme des eaux dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts. en ayant égard aux différences de vitesse des filets. 4. Paris 1845.

Moseley, H., Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architektur. Aus dem Engl. von H. Scheffler. 3., 4 Lief. gr. 8. Braunschweig. 1845. 1 thlr.

Optik.

Doppler, A. Chr., Zwei Abhandlungen aus dem Gebiete der Optik. gr. 4. Prag 1845. 8 ggr.

Digitized by Google

Doppler, A. Chr., Ueber die wesentliche Verbesserung der katoptrischen Mikroskope. gr. 4. Prag 1845. 12 ggr.

Astronomie.

Doppler, A. Chr., Ueber die bisherigen Erklärungsversuche des Aberrationsphänomens. gr. 4. Prag 1845. 8 ggr.

Papanti, Ferd., Soluzione del famoso problema di longitudine chronometrica astronomica.

Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1845, calcolate dall'ab Giov. Capelli e da Curzio Buzzetti. Con appendice, memorie ed osservazioni astronomiche. Mit 2 Tafeln Abbildungen. Mailand 1845. Inhalt des Appendix: Analisi di alcune equazioni trascendenti di Paolo Frisiani; Osservazioni della prima cometa di 1844, da Franc. Carlini.

Physik.

Lehrbuch der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung, von Johann August Grunert. Erster Theil. Mit sechzehn Figurentafeln. Leipzig. 1845.

In dem Lehrbuche der Physik, dessen erster Theil jetzt dem Publikum vorliegt, habe ich eine mathematische Darstellung der Physik zu geben versucht, so weit dies mit Hülfe der Lehren der Elementar-Mathematik möglich ist, und habe mich dabei möglichster Strenge befleissigt. Der Inhalt des ersten Theils ist folgender: Einleitung. — Von den Körpern überhaupt. — Von den mechanischen Wissenschaften im Allgemeinen; Grundbegriffe der Statik oder der Lehre vom Gleichgewichte. — Von dem Gleichgewichte zwischen Kräften, die an einem festen Systeme von Punkten wirken. — Vom Schwerpunkte. — Von der Reibung oder von der Friction. — Von den einfachen Maschinen (Hebel, schiefe Ebene, Rad an der Welle, Keil, Schraube, Seilmaschine, Gelenk oder Kniepresse). Von einigen zusammengesetzteren Maschinen (verschiedene Winden und Haspel, Rollenzug, Flaschenzug, Schraube ohne Ende, Wagenwinde, Räderwerk). — Von der Wage (und deren verschiedenen Arten). — Von der Stabilität. — Von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung (mit Einschluss der zusammengesetzten Bewegung). — Von der stetig gleichförmig beschleunigten Bewegung überhaupt und von den Gesetzen des Falls schwerer Körper insbesondere. — Die Ballistik oder die Lehre von der Wurfbewegung. — Von dem Falle schwerer Punkte auf geraden

und krummen Linien. — Die Lehre vom einfachen oder mathematischen Pendel (wobei in strenger elementarer Darstellung nicht bloss wie gewöhnlich bis zum ersten, sondern bis zum zweiten Gliede der aus der höheren Mechanik bekannten unendlichen Reihe fortgegangen wird). — Von den Quantitäten der Bewegung, von d'Alemberts allgemeinem Princip der Mechanik, und von der Atwoodschen Fallmaschine. — Von der Schwingungsbewegung fester Körper um feste horizontale Axen, von den Momenten der Trägheit und von dem zusammengesetzten oder physischen Pendel. — Versuche mit dem Pendel und Resultate, welche sich aus denselben ziehen lassen. (Anhang: Vom Reversionspendel und einigen bei Pendelversuchen überhaupt nothwendigen Correctionen und Reductionen). — Von der gleichförmigen Bewegung im Kreise und von der Schwungkraft im Kreise. (In einem Anhange zu diesem Kapitel sind einige von gewissen bestimmten Voraussetzungen ausgehende, was man bei diesem Anhange ja nicht unbeachtet lassen darf, elementare Betrachtungen über die Schwere im Allgemeinen und die Pendellängen auf der sphäroidischen Erde, und über deren Abplattung angestellt, welche nur einen Vorschmack von den diese Gegenstände betreffenden höheren Untersuchungen geben sollen, aber in der Art und Weise, wie sie hier angestellt worden sind, und unter den Voraussetzungen, welche denselben ausdrücklich zu Grunde gelegt worden sind, wohl als völlig streng betrachtet werden dürfen. Einen höheren Zweck hat dieser Anhang durchaus nicht.). — Von der Centralbewegung und von den Centralkräften im Allgemeinen. (In diesem Kapitel bin ich bis zu dem Gesetze der allgemeinen Schwere fortgegangen, und habe eine möglichst deutliche und strenge, aber ganz elementare Darstellung desselben zu geben versucht.). — Die Lehre vom Stosse. I. Gesetze des Stosses unelastischer Körper. II. Gesetze des Stosses elastischer Körper. — Von der Wärme. (Allgemeine Wirkungen der Wärme, Thermometer und dessen verschiedene Arten, Correction des Thermometers, Pyrometer und dessen verschiedene Arten, Maximum- und Minimum-Thermometer, Thermometrographen, Ausdehnungs-Coefficienten und deren Bestimmung, rostförmige Compensationspendel und deren Berechnung, Metall-Thermometer von Jürgensen oder Holtzmann, Winnerl und Breguet, Benutzung desselben Princips zur Compensation der Uhrpendel und der Chronometer, Quecksilberpendel und deren genaue Berechnung, specifische und relative Wärme, Mischungsmethode, Schmelzungsmethode mit Einschluss der latenten Wärme und des Eiscalorimeters, Abkühlungsmethode oder Erkaltungsmethode, Benutzung der specifischen Wärme der Metalle zur Bestimmung sehr hoher Temperaturen. Wärmequellen, strahlende Wärme, Differentialthermometer und deren verschiedene Arten, Intensität der Wärme, verschiedene Versuche). — Von dem Gleichgewichte tropfbarer Flüssigkeiten oder die ersten Gründe der Hydrostatik (in ziemlich ausführlicher Darstellung, namentlich auch von schwimmenden Körpern und vom Metacentrum). — Von den Capillaritätserscheinungen. — Einige der wichtigsten Gesetze der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten oder die ersten Gründe der Hydraulik (Stromquadrant). — Von den ausdehnsamen Flüssigkeiten. (Hierbei natürlich in ausführlicher Darstellung von den verschiedenen Arten des Barometers und der Luftpumpe, auch von

Digitized by Google

den verschiedenen Luftarten und deren Entwickelung, Eudiometer). — Von der Verdunstung. — Von der Hygrometrie. — Von dem Höhenmessen mit dem Barometer. — Von der Bestimmung des specifischen Gewichts. (Völlig strenge und sorgfaltige mathematische Darstellung dieser höchst wichtigen Lehre, mit fortwährender Berücksichtigung der nöthigen Correctionen und Reductionen).

Alle diese Gegenstände sind einer so viel als möglich strengen, aber völlig elementaren mathematischen Betrachtung unterworfen worden, und den ganzen übrigen Theil der Physik, nämlich die Lehre von der Electricität, dem Galvanismus, Magnetismus, Electromagnetismus, die Lehre vom Schall und vom Lichte wird nebst einer kurzen Darstellung der Meteorologie und der im Luft-Kreise vorkommenden Licht-Erscheinungen der hoffentlich bald erscheinende zweite Theil dieses Werks enthalten.

Weil ich der Meinung bin, dass Niemand physikalischen Unterricht ertheilen sollte, der sich nicht vorher mit einer solchen streng mathematischen, aber elementaren Darstellung der Physik, wie dieselbe in dem vorliegenden Werke zu geben versucht worden ist, vertraut gemacht hat, worüber ich mich in der Vorrede ausführlicher ausgesprochen habe, so gehört es natürlich nicht zu meinen geringsten Wünschen, dieses Werk namentlich auch von angehenden Lehrern der Physik nicht unbeachtet gelassen zu sehen. Dass in demselben mehr als in den meisten andern Lehrbüchern der Physik über Maschinenlehre u. dgl. vorkommt, hat seinen Grund zum Theil darin, weil dieses Werk zugleich auch die dritte Abtheilung meines Lehrbuchs der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt bildet; ausserdem halte ich aber solche mehr praktische Dinge auch für allgemein lehrreich, und würde dieselben auch ohne den vorher erwähnten, mehr speciellen Zweck nicht von der Aufnahme in dieses Lehrbuch der Physik ausgeschlossen haben. G.

Müller, Dr. F., Grundzüge der Krystallographie. Mit 123 in den Text eingedruckten Holzschnitten. 8. Braunschweig. 1845. 12 ggr.

Haldat, Histoire du magnétisme dont les phénomènes sont rendus sensibles par le mouvement. In 8. plus une pl. Nanci. 1845.

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Quetelet, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont, Conservator der Königl. Sternwarte bei München.

Jahrgang 1844. XI. Heft. Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Frühlings-Aequinoctiums 1844 von Brüssel, Rennes, Lyon, Valenciennes, Alais, Dijon, Toulouse, Greenwich, Luzern, Utrecht, Amsterdam, Deventer, Leuwarden, Gröningen, Prag, Angers, Thouarcé, Cracau, Lemberg, Marseille, Frankfurt am Main, Parma, Mailand, Genua, Triest, Florenz, Neapel, Aoste, Mästricht, Warschau, Rom, St. Etienne, München. — Meteorologische Beobachtungen in Leipzig im Jahre 1843 von Hrn. Prof. Möbius. — Meteorologische Uebersicht der Witterung in Aschaffenburg 1843 von Hrn. Prof. Dr. Kittel. — Kurze Beschreibung der Sternwarte des

Digitized by Google

Hrn. Freiherrn v. Senftenberg in Senftenberg, von dem Conservator Hrn. Prof. Hackel. — Température elévée éprouvée à Parme depuis le 8 jusqu' au 17 de Juin 1844, avec les résultats des quatorzes années précédentes 1830—1843. Note communiquée par M. A. Colla, Directeur de l'Observatoire de l'université. — Beobachtungen des meteorologischen Vereins im Grossherzogthume Baden, zusammengestellt und mitgetheilt von Hrn. Ph. Stieffel, Prof. an der Polytechnischen Schule in Carlsruhe. — Magnetische Terminbeobachtungen in Kremsmünster 1842 und 1843 von Hrn. M. Koller, Director der Sternwarte. — Zusammenstellung der im Jahre 1842 in Hohenpeissenberg, Landsberg, München, Dilingen, Gunzenhausen, Burglengenfeld, Ansbach, Neustadt an der Aisch, Würzburg, Hof, Cronberg und Stuttgart beobachteten starken und anhaltenden Winde. — Zusammenstellung der im Jahre 1843 in Hohenpeissenberg, München, Dilingen, Gunzenhausen, Burglengenfeld, Ansbach, Neustadt an der Aisch, Stuttgart, Carlsruhe, Hof, Bensberg und Cronberg beobachteten starken und anhaltenden Winde. — Observationes meteorologicae in Specula Mediolanensi institutae a Joh. Capelli, II. Astronomo Adjuncto. — Vermischte Nachrichten.

Jahrgang 1844. Heft XII. Magnetische und meteorologische Beobachtungen, angestellt an der Königl. Sternwarte bei München während der Monate April, Mai und Juni 1844. — Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Sommer-Solstitiums 1844 von Alais, Dijon, Leuwarden, Utrecht, Deventer, Amsterdam, Gröningen, Frankfurt am Main, Valenciennes, Toulouse, Luzern, Thouarcé, Lyon, St. Etienne, Mont Pilat, Greenwich, Prag, Senftenberg, Parma, Mailand, Genua, Florenz, Triest, Genf, St. Bernard, Aosta, Marseille, Cracau, Lemberg, Warschau, Bern, Gent, Luxemburg, Makerstoun, Kremsmünster, München. — Nachtrag zum Frühlings-Termin 1844 von Genf, St. Bernard, Bern, Gent, Luxemburg, Makerstoun, Kremsmünster. — Stündliche Beobachtungen zur Zeit des Herbst-Aequinoctiums 1844 von Brüssel, Toulouse, Thouarcé, Alais, Genève, St. Bernard, Parma, Triest, Genua, Florenz, Bologna, Mailand, Luzern, Frankfurt a. M., Cracau, Amsterdam, Gröningen, Deventer, Utrecht, Leuwarden, Faulhorn, Valenciennes, Sexfontaines (haute Marne), Kremsmünster, Prag, Senftenberg, Bern, Gent, Rom, Neapel, Aosta, Madrid, Lausanne, Domaine de Rousseau, München, Marseille. — Nachtrag zum Frühlingstermin 1844 von Lausanne, Kremsmünster, Paris. — Nachtrag zum Sommer-Solstitium 1844 von Brüssel, Rom, Lausanne, Domaine de Rousseau. — Vermischte Nachrichten: Resultate der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen an der Sternwarte in Cracau im Jahre 1844 von Hrn. Prof. Weisse, Director der Sternwarte. — Altitudes géodésiques de quelques points de la Bavière au dessus du niveau moyen de l'océan à Brest etc. Par M. le Commandant Delcros. — Perturbations magnétiques observées dans la déclinaison à l'observatoire de Parme (Italie) pendant les mois d'Avril, Mai, Juin et Juillet 1844. — Temperatur der Quellen in der Umgegend von Dillingen von Hrn. Polak, k. Lyceal-Professor in Dillingen. — Ueber den Hagel in Steiermark von Dr. Wilh. Gintl, k. k. Professor der Physik zu Grätz. — Beobachtungen angestellt zu Mittenwald vom qu. k. Oberbeamten Wagner, berechnet von Hrn. Prof. Meister im Sep-

Digitized by Google

tember des Jahres 1844. — Resultate der Barometer- und Thermometer-Vergleichungen, welche auf der im Jahre 1843 durch Kärnten, Istrien, Ober-Italien, Tyrol, Salzburg, Ober-Oesterreich und Böhmen unternommenen Reise ausgemittelt worden sind, von Dr. Wilh. Gintl, k. k. Prof. der Physik in Grätz. — Sechste Fortsetzung der Beiträge des Hrn. Sabine zum Erdmagnetismus. — Magnetische Beobachtungen in Toronto 1840—1843.

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXIII. February 1845. I. On the Theory of Linear Transformations (Cayley). — II. On Magic Squares (Moon). — III. On the Theory of Developments. Part I. (Boole). — IV. Demonstration of a Fundamental Proposition in the Mechanical Theory of Electricity (W. Thomson). — V. On the Reduction of the General Equation of Surfaces of the Second Order (W. Thomson). — VI. On Certain Integral Transformations (Bronwin). — VII. On Certain Continued Fractions (Percival Frost).

Bei der Universität zu Lund sind neuerlich die folgenden akademischen Schriften erschienen:

Första Capitlet af allmän Storhetslära. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i. Math. Resp. Carl Oskar Ruth. Lund 1845. 4.

Prolegomena om Addition. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i. Math. Resp. Corfitz Aug. Beckfriis. II. Lund 1845. 4.

Prolegomena om Multiplication. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i Math. Resp. Carl Erik Schweder III. Lund 1845. 4.

Fortsatta Prolegomena om Multiplication. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Prof. i Math. Resp. Gustaf Wilh. Joh. v. Düben. IV. Lund 1845. 4.

Method att utdraga, hwilken rot som helst ur en reel binom. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill. Math. Prof. Resp. Carl Gust. Leijonhufwud. Lund 1845. 8.

Utkast till en allmän theori för binomiska imaginära rötter. Akademisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Professor Resp. Gust. Maur. Posse. Lund 1845. 8.

Om imaginära rötters utdragning. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Math. Elof Wilh. Widegren. Lund 1845. 8.

Om imaginära Cubikrötters utdragning. Academisk Afhandling. Präs. Carl Joh. Hill, Resp. Claes August Nerman. Lund 1845. 8.

Arithmetisk Lösning af Casus irreducibilis. Akademisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Christopher Eckerbom. Lund 1845. 8.

Betraktelser öfwer den så kallade Casus irreducibilis. Academisk Afhandling. Präs. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Prof. Resp. Thure Martin Bååth. Lund 1845. 8.

Om Cartesii och Fouriers teckenreglor. Akademisk Afhandling. Praes. Carl Joh. Hill, Resp. Carl Albin Holmberg. Lund 1845. 8.

De Axiomate ad theoriam parallelarum stabiliendam pertinente disputatio. Präs. Mag. Carl Joh. D:s Hill, Math. Prof. Reg & Ord. Resp. Carol. Ad. Th. Lindwall. P. III. Lundae 1845. 4.

Lemmata ad theoriam parallelarum stabiliendam idonea. Präs. Carol. Joh. D:s Hill. Resp. Bened. Nicol. Ad. Lindvall. P. IV. Lundae 1845. 4. med 1 tab.

Conatus Euclidaei axiomatis XII. probandi antiqui. Präs. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Elis Maur. Ullman. P. V. Lundae 1845. 4.

Ueber die Theorie der Parallelen hat Herr Professor Hill zu Lund auch die folgende lesenswerthe Schrift herausgegeben:

Conatus Theoriam linearum parallelarum stabiliendi praecipui, quos recensuit novisque superstruxit fundamentis atque auxit Car. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Lundae 1844. 4.

Theoria linearum aequidistantium. Präs. Mag. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Adolph R. Åberg. P. VII. Lundae 1845. 4.

Theoria linearum connormalium. Präs. Mag. Carol. Joh. D:s Hill, Math. Prof. Resp. Esaias Laur. Palm. P. VIII. Lundae 1845. 4.

Portatif Apparat för bestämmandet af fasta kroppars längdförändringar till följe af förändrad temperatur. Akademisk Afhandling. Präs. Dr. A. W. Ekelund, Prof. i Fysiken, L. K. W. A.; Förf. J. G. M. v. Gegerfelt. Lund 1845. 8. med 1 plansch.

Ich erlaube mir, die geehrten Leser des Archivs auf den diesem Hefte beigelegten, das Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller, Prof. der Physik und Technologie an der Univ. zu Freiburg i. B. als zweite umgearbeitete und vermehrte Aufl. der Bearbeitung von Pouillet's Lehrbuch der Physik. 2 Bde. betreffenden Prospectus aufmerksam zu machen. G.

Digitized by Google

XXVI.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Elemente der niederen Analysis. Bearbeitet von J. Rogg, Professor der Mathematik am obern Gymnasium in Ehingen. Mit drei Figurentafeln. Ulm. 1845. 1 thlr.

Der Titel dieser Schrift scheint nicht ganz glücklich gewählt zu sein, und könnte leicht einen von dem wirklichen Inhalte derselben verschiedenen Inhalt erwarten lassen. Dieselbe enthält nämlich die gewöhnlichen Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra bis inclusive zu den quadratischen Gleichungen; dann die Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra, sowie auch der gemeinen Arithmetik auf die ebene Geometrie; hierauf die ebene Trigonometrie; und endlich in einem Anhange eine etwas weitere Ausführung der ebenen Trigonometrie, die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, die Lehre von den figurirten Zahlen, das Wichtigste aus der Combinationslehre, die Methode der unbestimmten Coefficienten und deren Anwendung auf die Entwickelung der gewöhnlichen Functionen in Reihen: alles recht deutlich und klar, mehrfach durch Beispiele erläutert, aber ohne besondere Eigenthümlichkeiten, die hier hervorgehoben zu werden verdienten. Druck und Papier sind sehr gut, und ersterer empfiehlt sich namentlich durch seine Zierlichkeit.

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Oldenburg. 1845. 8. 1 thlr. 8 ggr.

Dieses wohl schon aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannte Lehrbuch entspricht nach unserer Ueberzeugung seinem auf dem Titel angegebenen Zwecke auf eine vorzügliche Weise, indem es die Lehren der gemeinen Arithmetik, der Buchstabenrechnung und der Elemente der Algebra mit ungemeiner Deutlichkeit vorträgt und durch eine ziemlich grosse Anzahl zweckmässig gewähl-

Digitized by Google

ter Beispiele praktisch erläutert, weshalb wir dasselbe auch vorzüglich allen denen, welche die Mathematik zu irgend einem praktischen Zwecke erlernen, empfehlen. In der Lehre von den Gleichungen ist der Herr Verf. mit Recht nur bis zu den quadratischen Gleichungen fortgegangen, da die cubischen Gleichungen doch im Ganzen nur wenige Anwendung finden, und den Beschluss der Schrift macht die Lehre von den Progressionen, von den Logarithmen und die Zinseszinsen-Rechnung. Ungern haben wir die Lehre von den Kettenbrüchen vermisst, da dieselben auch bei praktischen Geschäften oft vortreffliche Dienste leisten können, und eben so wünschenswerth würde uns, schon der sogenannten zusammengesetzten Alligationsrechnung wegen, wenigstens eine kurze Anleitung zur Auflösung unbestimmter Aufgaben gewesen sein, welche der Herr Vf. bei einer wohl zu erwartenden dritten Auflage seiner verdienstlichen Schrift zweckmässig noch einverleiben dürfte. In einem Anhange sind mehrere, vorzugsweise ein theoretisches Interesse in Anspruch nehmende Lehren etwas weiter erläutert worden, nämlich die Lehre von den Zahlensystemen, Einiges aus der Zahlenlehre, die Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine Brüche, die Theorie des Positiven und Negativen, die ausführlichere Theorie der Proportionen, über das sogenannte arithmetisch-geometrische Mittel zweier Zahlen *), eine weitere Ausführung der Lehre von der Elimination, die Theorie des Imaginären mit Rücksicht auf die neueren Ansichten von Gauss über diese Lehre, über das Unendlich-Kleine und Unendlich-Grosse, u. s. w.

Bobillier, Principes d'algèbre. Nouvelle édition. In 8. Chalons-sur-Saône et Paris. 1845. 4. 50.

Entdeckung einer numerischen General-Auflösung aller höhern endlichen Gleichungen von jeder beliebigen algebraischen oder transcendenten Form von A. F. Vogel, Mathematiker zu Leipzig. 1845. 8. 16 ggr.

Der Herr Vf. dieser Schrift scheint mit den neueren, und selbst auch mit den älteren Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen wenig oder gar nicht bekannt zu sein; sonst würde er dieselbe wahrscheinlich nicht geschrieben haben.

Malmstén, C. J., in solutionem aequationum algebraicarum disquisitio. P. 1—4. 4. Upsala. 1845.

(Wir bedauern, diese Schrift noch nicht zu Gesicht bekommen zu haben.)

J Differenziali delle funzioni algebriche e trascendenti si deducono dall'unica legge di derivazione che si manifesta nelle funzioni stresse, pochi cenni di Francesco d. r. Bourelly. Padova. 1844. In 8.

Politische Arithmetik. Anleitung zur Kenntniss und Uebung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen. Ein Handbuch für Staatsbeamte und Ge-

*) M. s. Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. II. S. 824.

Digitized by Google

schäftsmänner. Von L. C. Bleibtreu, Professor an der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Erste Abtheilung. Heidelberg. 1845. 8. 1 thlr. 4 ggr.

Dieses, wie es scheint, vorzugsweise auf das praktische Bedürfniss berechnete Buch enthält in seiner bis jetzt vorliegenden ersten Abtheilung nach einer kurzen Einleitung über den Begriff der politischen Arithmetik oder Staatsrechenkunst Folgendes: I. Maass- und Gewichtswesen (hier auch vom Nonius, Comparator u. dgl.) II. Finanzwesen. 1. Geldwesen. Erste Abtheilung. Münzen. Erster Abschnitt. Silbermünze. Zweiter Abschnitt. Goldmünze. Dritter Abschnitt. Platinmünze. Vierter Abschnitt. Kupfermünze. Fünfter Abschnitt. Handelswerth der Münzen. Sechster Abschnitt. Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuss. Siebenter Abschnitt. Valvation der Münzen. Zweite Abtheilung. Gold und Silber in Barren. 2. Von den Wechseloperationen. 3. Vom einfachen Zins. 4. Staatsschuldentilgung. 5. Vom Verkehr mit Staatspapieren. 6. Oeffentliche Glücksspiele. III. Zahlenverhältnisse der Bevölkerung. IV. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des menschlichen Lebens. V. Anstalten, welche auf die menschliche Sterblichkeit gegründet sind. 1. Leibrenten und Lebensversicherungs-Anstalten. (Hiermit schliesst die bis jetzt vorliegende erste, bis S. 272. reichende Abtheilung.)

Ueber das bei allen diesen Gegenständen vorkommende eigentlich Praktische oder Technische enthält diese Schrift, wie es uns scheint, viel Lehrreiches, und mehr als sonst in anderen Schriften dieser Art vorkommt. Von analytischen Entwickelungen sind nur die unbedingt nöthigsten gegeben worden. Die letzteren finden aber die Leser unter den neuesten Schriften über politische Arithmetik in hinreichender Vollständigkeit in dem schon im Literarischen Berichte Nr. XXV. S. 371. empfohlenen Buche von Oettinger.

Montag, J. B., Wie mittelst nachstehender höchst einfacher Rechenmaschine oder Rechenscheibe auf mechanischem Wege und ohne die geringste Kenntniss vom Einmal-Eins zu haben das Facit von Additions-, Subtractions-, Multiplications-, Divisions- und Regeldetri-Aufgaben stets richtig und leicht aufgefunden wird. Erfurt 1845. 8. 6 ggr.

Geometrie.

Oppermann, L., Elementair Plangeometri. Copenhagen. 1845. 8. 1 Rbd. 32 Sk.

Laffitte, C., Essai d'une Démonstration du Postulatum d'Euclide, pouvant servir de supplément aux divers cours de géo-

Digitized by Google

métrie qui fondent la théorie des parallèles sur ce Postulatum. In 8. plus une pl. Paris. 1845.

Lehrbuch der vergleichenden Geometrie oder neue bewährte Methode, die Lehren der Stereometrie in natürlicher Ordnung mit denen der Planimetrie, zugleich in paralleler Weise, darzustellen, von A. Mahistre, Licentiat und Professor der Mathematik an der Normalschule zu Chartres. Aus dem Französischen übersetzt und mit Aufgaben vermehrt von A. Lorey, Kandidat der Theologie und Vorsteher der Realschule zu Weimar. Mit 8 lithogr. Figurentafeln. Weimar 1845. 8.

Dieses Buch ist eine Uebersetzung der folgenden Schrift: Les analogies de la géométrie élémentaire, ou la géométrie dans l'espace, ramenée à la géometrie plane: par A. Mahistre. 2e. édit. Paris 1844. Bekanntlich hat man in neuerer Zeit mehrfach versucht, die zwischen der sogenannten Planimetrie und Stereometrie noch bestehende Scheidewand aufzuheben, und diese beiden Theile der Geometrie als ein wissenschaftlich geordnetes Ganze vorzutragen. Dass man diesen Bemühungen Beifall geben muss, versteht sich von selbst; und eben so leicht ist ersichtlich, dass dieselben, gehörig eingeleitet, zu einem günstigen Resultate führen müssen, da ja doch am Ende die Planimetrie als ein specieller Fall in der Stereometrie, d. h. in der Wissenschaft vom Raume überhaupt, enthalten sein muss. In der in einer deutschen Uebersetzung vorliegenden Schrift des Herrn Mahistre ist, wie man durch deren Titel *) leicht zu glauben veranlasst werden könnte, der so eben kurz angedeutete höhere wissenschaftliche Gesichtspunkt jedoch keineswegs festgehalten worden, indem dieselbe eigentlich nur als ein Lehrbuch der ebenen Geometrie zu betrachten ist, in welchem den einzelnen Kapiteln unter der Ueberschrift von Analogien die entsprechenden Lehren der Stereometrie angehängt worden sind, so dass also in diesem Buche die letztere Wissenschaft nicht als der in wissenschaftlicher Rücksicht höher stehende, die Planimetrie mit umfassende Theil der Geometrie oder der Wissenschaft vom Raume überhaupt, sondern gewissermaassen nur als ein Anhang zur Planimetrie erscheint. Können wir nun auch aus diesen Gründen der vorliegenden Schrift eine höhere wissenschaftliche Bedeutung nicht beilegen, so ist doch auf der anderen Seite nicht zu verkennen, dass bei dem ersten geometrischen Unterrichte es allerdings lehrreich für den Anfänger sein muss, wenn bei dem Vortrage der Planimetrie ihm sogleich gezeigt wird, dass damit die Wissenschaft vom Raume noch keineswegs abgeschlossen ist, sondern dass es noch andere den vorgetragenen analoge Sätze für den Raum überhaupt giebt, welche erstere gewissermaassen in sich schliessen, wobei man sich aber doch auch ja in Acht nehmen mag, dass in den Köpfen der noch rohen Anfänger nicht eine so leicht mögliche Verwirrung entstehe und die Bestimmtheit und

*) Der Titel des französischen Originals spricht den Zweck des Verfassers bestimmter aus.

Digitized by Google

Klarheit der Begriffe verloren gehe. Dieser letztere mehr methodische Zweck scheint dem Verf. auch lediglich bei der Abfassung seiner Schrift vorgeschwebt zu haben, und von dieser Seite muss dieselbe also auch vorzüglich von den Lesern beurtheilt werden.

Ins Einzelne hier einzugehen ist keine Veranlassung vorhanden, da wir viele sonstige Eigenthümlichkeiten oder besonders bemerkenswerthe neue Sätze und Beweise in der Schrift gefunden zu haben uns nicht erinnern, indem dieselbe überhaupt nur die ganz gewöhnlichen Lehren der Planimetrie und Stereometrie enthält. Es fehlen selbst manche Sätze, die zu interessanten Analogien zwischen der Planimetrie und Stereometrie hätten Veranlassung geben können, wie z. B. das Eulersche Theorem von den Polyedern. Gegen die Strenge der Beweise würden wir Manches einzuwenden haben, wenn uns hier ein grösserer Raum verstattet wäre. Bemerken wollen wir daher nur ganz im Allgemeinen, dass wir den strengen Begriff der Gränze und eine durchgreifende Anwendung der Gränzenmethode in dieser Schrift nirgends gefunden haben. Wie man aber ohne diese, für die gesammte Mathematik so höchst wichtige Methode eine strenge Darstellung in der Geometrie und in der Mathematik überhaupt erringen will, ist uns wenigstens unbegreiflich. Natürlich steht und fällt mit derselben auch die strenge Darstellung der Lehre von den Verhältnissen incommensurabler Grössen. Umgangen hat der Vf. die Gränzenmethode durch das gleich zu Anfang eingeschaltete zweite Kapitel: von den unendlich kleinen Grössen und vom Maasse der Grössen überhaupt. Aber gleich der sogenannte Lehrsatz in §. 14.: Zwei endliche Grössen können als einander gleich betrachtet werden, wenn ihr Unterschied unendlich klein ist, und noch mehr der Beweis desselben: In der That wird man zwischen diesen beiden Grössen durchaus keine Ungleichheit aufstellen können, so klein man dieselbe auch annehmen mag, womit die ganze Sache abgethan wird, möchte doch viele Anfänger stutzig machen, und bei manchem weiter Denkenden die so hoch gerühmte Strenge der Geometrie in Misscredit bringen.

Abgesehen hiervon kann aber das Buch seiner oben angegebenen allgemeinen Tendenz wegen minder geübten Lehrern manchen Nutzen und manche Belehrung gewähren, und empfehlen wir es denselben daher zur Beachtung; gehörig mathematisch durchgebildete Lehrer, wie sie in jetziger Zeit zur Freude eines Jeden, der an dem Gedeihen des mathematischen Unterrichts wahrhaften Antheil nimmt, wohl bei Weitem die meisten deutschen höheren Lehranstalten besitzen, werden aber in diesem Buche schwerlich etwas finden, was sie sich nicht selbst auf der Stelle mit Leichtigkeit zu entwickeln im Stande sein sollten. Durch den reichhaltigen Anhang von Formeln und Beispielen zur Berechnung von Linien, Flächen und Körpern (S. 247—S. 332.) hat der Herr Uebersetzer den Werth des Buchs als Unterrichtsmittel, namentlich für die eine mehr realistische Richtung habenden Elementarschulen, erhöhet.

Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie für die obern Klassen höherer Lehranstal-

Digitized by Google

ten, nebst einem Uebungsaufgaben und Excurse enthaltenen Anhange. Von Dr. August Wiegand, Lehrer der Mathematik und zweitem Collegen an der Realschule im Waisenhause zu Halle. Mit zwei Kupfertafeln. Halle. 1845. 8. 12 ggr.

Die frühern Theile dieses Lehrbuchs sind im Liter. Ber Nr. XIX. S. 289. und Nr. XXII. S. 336. angezeigt. Die dort gerühmte Deutlichkeit gilt auch von dem vorliegenden Theile. Der so leicht zu beweisende Eulersche Satz von den Polyedern ist mit Recht in die Stereometrie selbst aufgenommen, und der Anhang enthält noch manches Lehrreiche und den Zwecken des Unterrichts Förderliche, sowie das Buch überhaupt einen erfahrenen und sich dem Unterrichte mit Liebe hingebenden Lehrer bekundet.

Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive nebst deren Anwendung auf die konstruktive Auflösung von Aufgaben über räumliche Verwandtschaften der Affinität, Collineation etc. Systematisch geordnet und gelöst von Leopold Mossbrugger, Professor an der Kantonsschule zu Aarau. Mit 58 lithographirten Tafeln (in einer besonderen zweiten Abtheilung). Zürich. 1845. 4. 4 thlr. 4 ggr.

In der Vorrede sagt der Herr Vf.:

„Das Ziel, welches ich bei der Bearbeitung dieses Werkchens im Auge hatte, ist ein zweifaches, nämlich:

1. Soll der verhältnissmässig geringe Vorrath von Aufgaben im Gebiete der Géométrie descriptive nicht nur durch neue, bisher noch ungedruckte Aufgaben vergrössert werden, sondern bei deren Auflösung soll immer die rein geometrische Construktion vorherrschend und der mechanische Theil der Zeichnungslehre als untergeordnet erscheinen. 2. Soll dies Werkchen dazu dienen, Resultate und Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes, besonders jene über die neuern Verwandtschaften der Affinität, Collineation, Reciprocität mehr unter construktive Anschauungsformen zu bringen, und so die beiden nach einem Ziele strebenden Zweige der Mathematik, die analytische Geometrie des Raumes und die Géométrie descriptive, welche bisher strenge von einander getrennt wurden, einander näher zu bringen.“

Dass man beiden Zwecken seinen vollen Beifall geben muss, versteht sich von selbst, und eben so wenig ist zu verkennen, dass der Herr Vf. namentlich dadurch, dass er die neueren geometrischen Verwandtschaften in den Kreis seiner construktionellen Entwickelungen — man möge uns diesen Ausdruck, der aber in der That nicht ganz unpassend zu sein scheint, verzeihen — gezogen hat, der descriptiven Geometrie in mehrfacher Beziehung eine neue Seite abgewonnen hat, weshalb wir glauben, dass das Werk angelegentlich zu weiterer Beachtung empfohlen zu werden verdient.

Der Druck und die von dem Herrn Zeichnungslehrer Belliger ausgeführten Zeichnungen, die bei einem Werke dieser Art natürlich von besonderer Bedeutung sind, lassen in keiner Beziehung etwas zu wünschen übrig.

Digitized by Google

Analytische Geometrie des Raumes mit Berücksichtigung der neueren geometrischen Verwandtschaften und zur grössern Verständigung des Werkes erforderlichen Entwickelungen aus der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Selbststudium. Von L. Mossbrugger, Professor an der Kantonsschule in Aarau. Mit acht lithographirten Tabellen. Aarau. 1845. 8. 4 thlr.

Dieses zugleich eine nicht geringe Anzahl dem Herrn Verf. eigenthümlicher Untersuchungen, auf welche in der Vorrede besonders hingewiesen worden ist, enthaltende Handbuch der analytischen Geometrie des Raumes ist jedenfalls eins der ausführlichsten und vollständigsten Bücher dieser Art, welche wir gegenwärtig besitzen, und wird von keinem sich für diese Studien Interessirenden entbehrt werden können. Wir wollen daher im Folgenden den allgemeinen Inhalt desselben etwas näher angeben.

Einleitung. Ueber die Gleichung der Geraden, des Kreises und der Linien des zweiten Grades, nebst deren Discussion. Erstes Kapitel. Betrachtung der Punkte und geraden Linien im Raume. Zweites Kapitel. Von der Ebene und der Verbindung derselben mit Linien und Ebenen. (In diesen beiden Kapiteln kommt ein reicher Schatz von Aufgaben vor, und viele, welche sich in den sonstigen Lehrbüchern der analytischen Geometrie nicht finden; namentlich enthält das zweite Kapitel auch Vieles über die regulären Körper und über die eckigen Körper überhaupt.) Drittes Kapitel. Von der Coordinaten-Veränderung. (Hierbei auch die Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.) Viertes Kapitel. Geometrische Verwandtschaften. *A.* Ebener Systeme. *B.* Betrachtung der geometrischen Verwandtschaften räumlicher Systeme. (Dieses Kapitel ist eins der reichhaltigsten im ganzen Buche.) Fünftes Kapitel. Von den Cylinder-Flächen. Sechstes Kapitel. Von den Kegelflächen. Siebentes Kapitel. Von der Kugelfläche. Achtes Kapitel. Verwandlung der allgemeinen Gleichung der Flächen in solche Formen, die zu Untersuchungen tauglich sind, und von der Beziehung der Oerter der Mittelpunkte zu den Flächen selbst. (Der ganze Inhalt dieses Kapitels kann als dem Herrn Vf. eigenthümlich betrachtet werden.) Neuntes Kapitel. Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades. Zehntes Kapitel. Von den Diametral-Ebenen und der Reduction der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades auf ihre einfachen Formen. (Auch in diesem Kapitel findet sich vieles dem Herrn Vf. Eigenthümliche.) Eilftes Kapitel. Bestimmung der Eigenschaften der Flächen, welche einen Mittelpunkt haben. Zwölftes Kapitel. Ueber die geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Flächen des zweiten Grades. (Auch dieses Kapitel ist dem Herrn Vf. ganz eigenthümlich.) Dreizehntes Kapitel. Geometrische Oerter. Vierzehntes Kapitel. Von den Durchschnitten der Flächen des zweiten Grades, insbesondere in ebenen Curven. Anwendungen dieser Sätze auf Aufgaben und Beispiele. Fünfzehntes Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades, in Beziehung auf ihre gegenseitigen Verwandtschaften.

Digitized by Google

Wir empfehlen dieses Werk nochmals nicht bloss allen denen, welche sich ausführlicher über die neueren Fortschritte der analytischen Geometrie, belehren wollen, sondern auch allen denen, welche Stoff zu eigenen Uebungen und Untersuchungen suchen.

Praktische Geometrie.

Gaultier, L., Notions de géométrie pratique. Nouvelle édition. In 12. Paris. 1845.

Catonnet, A. J., Traités completes théoriques et pratiques de l'arpentage, de la géodésie moderne etc. Seconde édition. In 12. plus des pl. Amiens. 1845. 3. 50.

Pezelt, Der kleine katadioptrische Kathetometer nebst Anleitung zum Gebrauch desselben. Mit 4 Lithogr. gr. 8. Pesth. 1845. 1 thlr. 4 ggr.

Beuther, Fr., Kurze Anweisung zur Linearperspective, mit den nöthigen praktischen Vortheilen, bei deren Anwendung für die ausübende Zeichenkunst. 2. revid. mit 1 Tafel vermehrte Aufl. Kassel. 1845. 18 ggr.

Trigonometrie.

Köller, A. v., Elemente der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Mit einer lithogr. Tafel. Trier. 1845. 8. 8 ggr.

Mechanik.

Die Geostatik als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, sowie zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung von Dr. Moritz Rühlmann, Professor der angewandten Mathematik und Maschi-

Digitized by Google

nenlehre an der königlichen höheren Gewerbschule zu Hannover. Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit vielen Holzschnitten. Dresden und Leipzig. 1845. 8. 1 thlr.

Dieses die gewöhnlichen Lehren der Statik fester Körper in deutlicher elementarer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Kräftepaare; die Lehre von der Reibung und von den einfachen Maschinen, mit Berücksichtigung der Reibung und der Seilbiegung (wie dies der Vf. nennt): endlich die Lehre von der Festigkeit der Körper enthaltende Werkchen scheint seinem auf dem Titel näher bezeichneten Zwecke recht wohl zu entsprechen, und verdient Praktikern und Lehrern an elementaren technischen Lehranstalten zur Beachtung empfohlen zu werden. Dass in demselben die Anwendung der Differential- und Integralrechnung ausgeschlossen ist, geht schon aus dem Titel hervor. In der Angabe der Quellen, aus denen der Herr Vf. geschöpft hat, hätte derselbe etwas vollständiger sein sollen.

Praktische Mechanik.

Das Dädaleon, eine neue Flugmaschine, vorgeschlagen von Friedrich von Drieberg. Mit 4 Tafeln Abbildungen. Berlin. 1845. 8. 8 ggr.

Die Flugübungen und den ersten freien Ausflug, welche Herr v. Drieberg in §. 35. und §. 36. seiner Schrift den Lesern derselben so angelegentlich und wahrlich mit grosser Zuversicht mit seiner einer Fledermaus ganz ähnlich sehenden Flugmaschine anzustellen empfiehlt, hätte er mit derselben erst selbst anstellen sollen, bevor er dieselbe bekannt machte. Dass dies geschehen, ist wenigstens nirgends ausdrücklich gesagt. Da er seinen Wohnsitz, wenn wir aus seiner früheren berühmten Schrift über den Luftdruck uns recht erinnern, in der uns wohlbekannten Umgegend von Fehrbellin hat, so würde es ihm gewiss an einem See, den er zu diesen Versuchen fordert, nicht gefehlt haben, und eben so wenig ist zu bezweifeln, dass unter seiner Dienerschaft eher als unter dem bescheidenen Hauspersonale eines gemeinen Professors Matheseos vel Physices sich zwei tüchtige Kerle gefunden haben würden, die ihn, in der Maschine steckend, wie er verlangt, durch einen heftigen Wurf von dem an dem Rande des Sees errichteten, etwa 30 Fuss hohen Gerüst in das freie Luftmeer hinaus schleudern, und ihm dadurch den nöthigen Anfang der Schussbewegung mittheilen konnten. Gewiss hätte er sich auch hinreichend in dieser Beziehung erprobten Leuten mit Zuversicht anvertrauen können. Da aber, wie gesagt, nirgends von einer geschehenen Anstellung der Versuche die Rede ist, so müssen wir freilich uns dem Glauben hingeben, dass der Herr Vf. fürchtete, das von ihm selbst S. 6. erzählte Schicksal des Schneiders Berblinger zu Ulm zu theilen, welcher bei den Versuchen mit seiner Maschine, deren Flügel die Gestalt eines hohlen Zuckerhuts hat-

Digitized by Google

ten, Arme und Beine brach. Da nun andere ehrliche Leute auch nicht gern Arme und Beine brechen, so ersuchen wir den geehrten Herrn Vf. nochmals, selbst nur erst mit wirklich angestellten Versuchen voranzugehen, und geben ihm die Versicherung, dass es, wenn dieselben glücklich ausfallen sollten, an Nachfolgern nicht fehlen wird. Wenn aber der Herr Vf. die Verbindlichkeit, dergleichen Versuche selbst zuerst anzustellen, vielleicht durch die auf S. 6. am Ende sich findende Bemerkung, dass es zunächst hauptsächlich darauf ankomme, eine erweislich richtige Theorie des Menschenflugs aufzustellen, woraus dann die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Menschenflugs leicht zu ersehen sein werde, von sich abzulenken suchen sollte, so müssen wir uns erlauben, ihm bemerklich zu machen, dass es seiner sogenannten Theorie, durch welche er den Nachweis der Möglichkeit des Menschenflugs zu führen sucht, leicht eben so gehen könnte, wie es nach seiner Angabe der Theorie ergangen ist, durch welche Lalande das Gegentheil zu beweisen suchte. Dass die Sache möglich ist, lässt sich am Ende nicht bezweifeln; nur kommt gerade hier Alles auf das Wie? an, und da müssen wir nun einmal auf unserer Forderung wirklich mit Glück angestellter Versuche bestehen

---

Astronomie.

Fladung, J. A. F., Versuch populärer Vorträge über Astronomie ohne Berechnungen. Wien. 1845. gr. 16. 1 thlr. 4 ggr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1848. Auf Veranlassung der Ministerien des Unterrichts und des Handels herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Berlin. 1845. 8. 3 thlr. 8 ggr.

Connaissance des tems ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1848. Publiée par le bureau des longitudes. (Sans additions.) In 8. plus un tableau. Paris. 1845. 5 fr.

Physik.

Buff, Grundzüge der Experimental-Physik, mit Rücksicht auf Chemie und Pharmacie, zum Gebrauch bei Vorlesungen und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Holzschnitten und

Digitized by Google

ausgeführten Tafeln. 2te Lieferung. Heidelberg. 1845. 8. 16 ggr. (Die erste Liefer. erschien 1843 und kostet ebenfalls 16 ggr.)

Bouchardat, A., Cours des sciences physiques. Chimie. Seconde édition. In 12. Idem Physique. In 12. Paris. 1845.
Prix du volume de chimie.... 3. 50.
du volume de physique.... 3. 50.

Heussi, Der physikalische Apparat, insbesondere als Lehrmittel in Gymnasien, Realschulen und anderen Unterrichtsanstalten. Parchim. 1845. 8. 8 ggr.

Ueber die Existenz des Luft- und Wasserdrucks. In Beziehung zu den dagegen gemachten Einwürfen des Herrn Baron von Drieberg. Ein Beitrag zur neueren Physik. Von S. Sachs, Königl. Regierungs-Bau-Inspector zu Berlin. Berlin. 1845. 8. 8 ggr.

Bloss die Existenz dieser mit einer sehr devoten Dedication an Seine Hochgeboren den Königl. Preuss. Kammerherrn und Ritter u. s. w. Herrn Baron von Drieberg versehenen Schrift wollten wir hier anzeigen; denn gelesen haben wir dieselbe nicht, das gestehen wir offen. Ueber Dinge, über welche Jeder schon aus seinem physikalischen Gymnasial-Unterrichte in Tertia richtige Begriffe mitbringen muss, und deren Richtigkeit sich handgreiflich nachweisen und im eigentlichen Sinne ad oculos demonstriren lässt, so viel Redens zu machen, scheint uns wahrlich nicht der Mühe werth. Möge der Himmel nur die Lehre von der Luft vor jeder Drieberg-Literatur bewahren!

Röttger, J. L., Falschheit der Lehre vom Drucke der Luft im Gefolge der Beweisführung des Kammerherrn von Drieberg. 8. Halberstadt. 1845. 8 ggr.

(Diese mit der Schrift von Sachs schon den Anfang einer Drieberg-Literatur bildende Schrift ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen.)

Sanson, A. J., Navigation atmosphérique. Explications complémentaires sur le système physique, mécanique etc. de Sanson père et fils; précédees de l'Aéronautique des dames, lettre en prose et en vers libres etc. In 8. plus 2 pl. Paris. 1845.

Biot, Instructions pratiques sur l'observation et la mesure des propriétés optiques appelées rotations, avec l'exposé succinct de leur application à la chimie médicale, scientifique et industrielle. In 4. Paris. 1845.

Daniell, J. F., Elements of Meteorologie; being the Third Edition, revised and enlarged, of Meteorological Essays. 2 vols. 8vo, plates, cloth. 32 s.

Voyage autour du monde, entrepris par ordre du roi par M. Louis de Freycinet, capitaine de vaisseau etc. — Météorologie. 1 vol. in 4. 25. Magnétisme terrestre. 1 vol. in 4. 15.

Digitized by Google

Vermischte Schriften.

Templeton, W., Taschenbuch für Mühlen- und Maschinenbauer, enthaltend: Decimalbruchrechnung, Tafeln von Quadrat- und Kubikwurzeln, angewandte Geometrie, Ausmessung, Festigkeit versch. Materialien, mechanische Potenzen, Wasserräder, Saug- und Druckpumpen, Dampfmaschinen, Tafeln über das specifische Gewicht u. s. w. Nebst einem Anhange, enthaltend: Umfang, Quadrat, Kubus und Flächeninhalt von Kreisen, Kugeln. — Nach der fünften vermehrten und verbesserten Aufl. aus dem Englischen übersetzt. Nebst einem Anhang zum Gebrauch des Schiebmaassstabes. Mit Holzschnitten und lithogr. Tafeln. Brünn. 1845. 8.

(Enthält viele für den praktischen Gebrauch recht brauchbare Notizen.)

The Mathematician. Number III. On the Transformation of Algebraic Equations. — On the Variation of Parameters. — Approximate Rectification of the Circle. — Fundamental Functions of Two Arcs. — Propositions on the Conic Sections. — On the Theory and Application of Poles and Polars. — Horner on Algebraic Transformation. — Equation of the Parabola referred to two Tangents. — On the Function $\Gamma(x+1)$. — Solutions of Mathematical Exercises. — Mathematical Exercises (*continued*). — Note on Probability. — On the Formation of Numerical Equations having nearly equal Roots. — On the Theory of Coordinates.

Number IV. Modern Geometry. Anharmonic Ratio. Section of Involution. — On a case of Elimination. — Properties of the Spherical Triangle. — On a Principle in the Theory of Probabilities. — On the Transformation of Algebraic Equations. — On Definite Integrals. — Properties of the Parabola. — Mathematical Exercises (*continued*). — Solutions of Mathematical Exercises.

Number V. Solutions of Mathematical Exercises (*continued*). — On the Imaginary Expressions for $\sin x$ and $\cos x$. — Poles and Polars in Space. — Modern Geometry (*continued*). — Mathematical Note. — Application of Algebra to the Modern Geometry. — Decomposition of Rational Fractions and Summation of Infinite Series. — Mathematical Exercises (*continued*). — Solutions of Mathematical Exercises.

Number VI. Poles and Polars in Space. — Propositions on the Conic Sections. — Application of Algebra to the Modern Geometry. — On the Transformation of Algebraic Equations. — On the Equilibrium of Roofs. — On the Reduction of certain Integrals to more simple Forms. — Developement of Poisson's method of finding the Resultant of two equal Forces. — Horner on Algebraic Transformation. — Mathematical Notes. — Formulae for Right-Angled Spherical Triangles deduced in succession. — Solutions of Mathematical Exercises. — Mathematical Exercises (*continued*). — Collection of Miscellaneous Exercises in Geometry for the use of Seminaries and private Students.

(Nr. I. und II. s. m. Literar. Ber. Nr. XXIII. S. 356.)

Digitized by Google

XXVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Simon Stevin. Par Mr. A. Quetelet.

Durch diese kleine Schrift über seinen Landsmann Simon Stevin hat Herr Quetelet einen sehr dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik geliefert, weshalb ich die Leser des Archivs auf dieselbe aufmerksam zu machen nicht verfehle. Besonders interessant ist aber auch die nächste Veranlassung zu der Herausgabe dieser Schrift, welche ich im Folgenden Herrn Quetelet selbst erzählen lassen werde, weil dabei die Leser des Archivs nur gewinnen können.

Je visitais un jour — sagt Herr Quetelet am Anfange seiner Schrift — en compagnie d'un des savants les plus destingués de notre epoque, la magnifique salle de réception de l'université de Gand. Nous en admirions les proportions élégantes; mais nous exprimions en même temps nos regrets que la sculpture ne fût pas encore venue en aide à l'habile architecte, pour compléter son beau monument. L'imagination, après avoir erré librement sur un ensemble harmonieux, a besoin de s'arrêter aux détails, et surtout de trouver des objets qui soutiennent son essor par de grandes pensées. On n'aime point à trouver un palais désert; et les hommes qui peuvent mieux en faire les honneurs sont ceux qui, dans la succession des temps, ont répandu le plus d'éclat sur leur patrie.

„Je regrette, dit M. Arago, car c'était le noble visiteur que j'avais l'honneur d'accompagner, je regrette qu'une aussi belle salle ne soit pas animées par les statues de vos hommes les plus distingués dans les sciences et les lettres; ce serait ici leur place, et je vois avec plaisir que l'architecte y a pensé." — „Il nous serait peut-être difficile de peupler cette salle comme vous l'entendez, dit en souriant la personne qui voulait bien nous servir de guide.

Digitized by Google

Dans les sciences physiques et mathématiques, par exemple, qui prendrions nous pour représentant?" — „Qui? repartit vivement l'astronome français, qui? mais Simon Stevin, le véritable auteur d'une des belles découvertes dont on fait honneur à l'un de mes compatriotes les plus illustres, à Pascal! N'eût il trouvé que la loi des pressions des liquides sur les parois des vases, le savant brugeois devrait avoir sa statue dans ce palais."

Cette statue s'élèvera en effet. Simon Stevin, malgré ce qu'en ont dit les étrangers, n'a point été oublié de ses compatriotes. Sa statue fera l'ornement et l'orgueil de sa ville natale, dont lui-même était fier, car c'était le seul titre qu'il prit dans ses ouvrages, sur la première page desquels on lit ces mots si remarquables dans leur simplicité: Par Simon Stevin de Bruges.

Nachdem Herr Quetelet nach dieser Einleitung die verschiedenen Arbeiten und Entdeckungen Simon Stevins namhaft gemacht und näher charakterisirt hat, sagt er gegen das Ende der Schrift:

Tant de travaux et de succès dans des branches si diverses, tant de découvertes scientifiques et d'inventions utiles expliquent suffisament la reconnaissance des compatriotes du géomètre brugeois, et justifient l'honneur insigne que lui fait sa ville natale en lui erigeant une statue sur l'une de ses places publiques. Cet honneur décerné plus de deux siècles après sa mort, l'a été spontanément et pendant que l'étranger croyait que jusqu'au nom Simon Stevin avait été oublié dans sa patrie.

Bruges s'est montrée digne d'avoir donné le jour aux deux plus grands géomètres qu'ait produits la Belgique, à Stevin et à Grégoire de Saint-Vincent. Le monument qu'elle érige non loin de la statue de l'inventeur de la peinture à l'huile montre qu'elle apprècie les sciences à l'égal des beaux-arts, et qu'elle a su puiser avec un égal succès à ces deux sources d'illustration.

Eine sehr dankenswerthe Zugabe zu der kleinen sehr splendid gedruckten Schrift bilden die wohl gelungenen Bildnisse Stevins und des Fürsten Moriz von Nassau, in dessen Diensten bekanntlich Stevin stand, so dass es gewiss Niemandem gereuen wird, sich in den Besitz dieser Schrift gesetzt zu haben, wobei wir jedoch bemerken müssen, dass wir freilich nicht wissen und auch aus ihr selbst nicht entnehmen können, ob sie überhaupt auf dem Wege des Buchhandels zu beziehen ist. G.

Arithmetik.

Boltshauser, H.: Die Grundlehren der Algebra, theoretisch entwickelt, mit Beispielen und Aufgaben. Mit besonderer Rücksicht auf den Gebrauch in Schulen bearbeitet. gr. 8. Solothurn. 1845. 1 Thlr.

Boltshauser, H.: Resultate der im Vorstehenden enthaltenen Beispiele und Aufgaben. gr. 8. Ebend. 9 ggr.

Digitized by Google

Organon der gesammten transcendenten Analysis. Von Dr. E. H. Dirksen, ordentlichem Professor an der Friedrich-Wilhelms-Universität und ordentlichem Mitgliede der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin. Erster Theil. Transcendente Elementarlehre. Berlin. 1845. 8. 4 Rthlr.

Ueber ein Werk, welches, wie das vorliegende, offenbar nur die Frucht eines langjährigen angestrengten Nachdenkens sein kann, und den wissenschaftlichen Eifer seines Verfassers in dem schönsten Lichte erscheinen lässt, in einem Blatte, wie dieser Literarische Bericht ist und sein soll, ein in jeder Beziehung gehörig begründetes Urtheil abgeben zu wollen, würde anmaassend sein, weshalb wir uns mit den folgenden allgemeinen Andeutungen begnügen müssen, welche bloss den Zweck haben, die Leser des Archivs einigermaassen auf den richtigen Standpunkt zu stellen, aus welchem sie dieses Werk zu beurtheilen haben.

Auf den ersten Blick stellt sich im Allgemeinen heraus, dass, so wie einige andere neuere Schriften, auch dieses Werk aus dem tief und lebhaft gefühlten Bedürfniss einer strengeren Begründung der Analysis, insbesondere aber, und zunächst, der Theorie der Reihen, hervorgegangen ist, und in seiner ganzen eigenthümlichen Fassung mehr noch als die meisten andern Werke von ähnlicher Tendenz dem alten, leider nur noch zu häufig herrschenden Schlendrian kräftigst entgegen tritt. Freilich werden die eifrigen Anhänger vieler sogenannter eleganter analytischer Theorien, wie z. B. der Methode der unbestimmten Coefficienten, des allgemeinen polynomischen Lehrsatzes oder gar des Infinitinomiums, des allgemeinen Reversionsproblems und verschiedener dahin gehörender Theoreme, so wie überhaupt fast der ganzen sogenannten combinatorischen Analysis, dieselben in diesem Werke vergeblich suchen, dagegen aber fast auf jeder Seite mit dem ihnen unleidlichen — aber dessenungeachtet für die gesammte Analysis im höchsten Grade wichtigen und ganz unentbehrlichen — Begriffe der Gränze gequält werden, und daher, wie wir im Geiste voraussehen, bei der Durchsicht desselben hin und wieder bedenklich den Kopf schütteln. Wer es aber wagt, wie wir — ursprünglich ganz im Geiste der combinatorischen Analysis gebildet — es vor nun ungefähr zwanzig Jahren in der That selbst gewagt haben, den grössten Theil des früher Erlernten auf einige Zeit von sich zu werfen, und das Studium der Analysis in einem Werke wie das vorliegende gewissermaassen von vorn anzufangen — was freilich in Betracht der früher schon aufgewandten Zeit und Anstrengung keine Kleinigkeit ist, und eine nicht geringe moralische Kraft erfordert — wird zwar der ihm ganz ungewohnten Betrachtungsweise wegen anfangs auf Hindernisse und Schwierigkeiten mancherlei Art stossen, am Ende aber gewiss mit der grössten Achtung vor den Bestrebungen der neueren Analysis, und, was die Hauptsache ist, wahrhafter Bereicherung und Berichtigung seiner analytischen Anschauungsweise und Kräftigung seines analytischen Scharfsinns von dem Werke scheiden.

Nur solche völlig vorurtheilsfreie Leser, die den redlichen Willen haben, sich mit der neueren Darstellungsweise der Analysis vertraut zu machen, wünschen wir diesem Werke, und nur solche

Digitized by Google

Leser verträgt dasselbe seiner Natur nach. Da es übrigens durchaus nur elementare Kenntnisse voraussetzt, so bietet sein Studium auch keine andern Schwierigkeiten dar, als solche, die von der Natur der Sache unzertrennlich sind. Eine scharfe Bestimmung und Zergliederung der Begriffe in ihre kleinsten Theile gehört zu den wesentlichsten Vorzügen desselben, und dass der Begriff der Gränze und die Lehre von den unendlichen Reihen, namentlich von deren Convergenz und Divergenz und den Rechnungsoperationen mit denselben, so wie auch die Lehre von den imaginären Grössen, in ihm eine Hauptrolle spielen, versteht sich für die Kenner der neueren Analysis von selbst. Um aber denselben eine genauere Uebersicht seines reichen Inhalts zu geben, theilen wir im Folgenden die Ueberschriften der Kapitel und einzelnen Abschnitte mit.

Erstes Kapitel. Von den Progressionen, dem Progressionsact und den Reihen. *Zweites Kapitel.* Von den unendlichen Reihen. I. Von den unendlichen Reihen überhaupt, den möglichen, den gegebenen und den vollständig bestimmten unendlichen Reihen, Gleichheit und Ungleichheit der unendlichen Reihen. II. Eintheilung der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. III. Lehrsätze in Betreff der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. *Drittes Kapitel.* Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen der unendlichen Reihen. I. Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen der unendlichen Reihen überhaupt. II. Von den einfachen algebraischen Beziehungsformen, mit Rücksicht auf näher bestimmte unendliche Reihen betrachtet. *Viertes Kapitel.* Von den allgemeinen Gliedern und den Gränzen der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. Transcendente Grundbestimmungsform der Analysis. I. Von den allgemeinen Gliedern der unendlichen Reihen. II. Von den Gränzen der vollständig bestimmten unendlichen Reihen. III. Von der transcendenten Grundbestimmungsform der Analysis und den einfachen Transcendenten überhaupt. *Fünftes Kapitel.* Von den convergirenden unendlichen Reihen. I. Von den convergirenden Reihen überhaupt und deren gegenseitigen Beziehungen. II. Lehrsätze in Betreff der hinreichenden Bedingungen der Convergenz und der Divergenz unendlicher Reihen. III. Besondere Erörterungen. *Sechstes Kapitel.* Von einigen expliciten einfachen Transcendenten. I. Von der hyperbolischen Exponentialgrösse. II. Von dem Sinus und dem Cosinus. III. Von den Argumenten der hyperbolischen Exponentialgrösse, des Sinus und des Cosinus, insofern diese selbst als bestimmend angesehen werden. *Siebentes Kapitel.* Von einigen expliciten zusammengesetzten Transcendenten. I. Von dem hyperbolischen Logarithmus. II. Von dem Arcus-Sinus. III. Von dem Arcus-Cosinus. IV. Von der Tangente. V. Von der Arcus-Tangente. VI. Von der Cotangente. VII. Von der Arcus-Cotangente. VIII. Von der Gleichung $w^n = a + bi$ und den Potenzen negativer oder imaginärer Wurzeln. *Achtes Kapitel.* Erörterung einiger anderweitigen Beziehungen zwischen den bisher besprochenen Transcendenten. Den Hauptinhalt dieses Kapitels bilden die Transcendenten $\sin \mu\alpha$, $\cos \mu\alpha$, $\sin {}^{\mu}\alpha$, $\cos {}^{\mu}\alpha$, $\operatorname{arc\,sin}\, \alpha$, $\operatorname{arc\,cos}\, \alpha$ und die bekannte Gaussische

Digitized by Google

Reihe. In eine nähere Angabe des Inhalts desselben können wir aber nicht eingehen, weil wir uns dazu einiger nicht für sich verständlicher Zeichen, die der Herr Verfasser in demselben anwendet, bedienen müssten.

Jedenfalls ist dieses Werk ein sehr wichtiger Beitrag zu der bessern Begründung der Analysis, welcher von Keinem unbeachtet gelassen zu werden verdient; und der aus dem sorgfältigen Studium desselben hervorgehende Gewinn wird unter allen Verhältnissen ein sehr reeller sein, weshalb wir auch dem Erscheinen des zweiten Theiles mit Verlangen entgegen sehen.

Cournot, A. A.: Elementarlehrbuch der Theorie der Funktionen oder der Infinitesimalanalysis. Mit besonderer Beziehung auf ihre Anwendung in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben. Deutsch bearb. von Dr. C. Schnuse. 1. Lief. gr. 8. (mit 8 Figurentafeln). Darmstadt. 1845. 8. Geh. 2 Rthlr. 12 ggr.

Minsinger: Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen der Zahlen, von 1 bis 1000, die Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 100, mehrere oft vorkommende Zahlen, die Primzahlen der Zahlen von 1 bis 1000 etc. 2te verm. Ausgabe. Augsburg. 1845. 4. 9 ggr.

De Aequatione Differentiali $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^m y$, per Integralia definita integranda, Disputatio. P. I. Praes. Mag. Carolus J. Malmsten, Mathem. Inferior. Professor Reg. et Ord. Regiae Acad. Scient. Holm. atque Reg. Societ. Scient. Upsaliensis Membrum et Societ. Philomat. Paris. Correspond. Resp. Ericus Edlund. Upsaliae. 1845.

Geometrie.

Die Probleme der Geraden Linie, des Winkels und der Ebenen Fläche. Von Heinrich Erb, Grossherzogl. Badischem Finanzrath. Heidelberg. 1845. 8. 1 Rthlr.

Als die Haupttendenz dieser philosophisch-mathematischen Schrift ist wohl ein neuer Versuch zur Begründung der Lehre von den Parallelen, und dabei der Grundlehren der Geometrie überhaupt anzusehen. Im Allgemeinen trägt dieselbe mehr den Charakter eines philosophischen Raisonnements, als einer strengen, dem von den griechischen Geometern für alle Zeiten vorgezeichneten Wege folgenden geometrischen Untersuchung. Auf S. 12. sagt der Herr Verfasser, dass er in dieser Schrift mitunter Winken gefolgt sei, die in einer

Digitized by Google

im Jahre 1821 unter dem Titel: „Zur Mathematik und Logik. Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung. Von Karl Augustus Erb“ erschienenen Schrift enthalten sind.

Schon mehrmals ist in dem Literarischen Berichte erwähnt worden, dass wir uns in demselben der Beschränktheit des Raums wegen auf ausführliche Kritiken von Parallelentheorien u. dergl. nur unter besondern Umständen einlassen können, ein Princip, welches wir auch bei der obigen Schrift um so mehr in Anwendung bringen müssen, weil dieselbe, wie schon erwähnt, zu sehr ins Gebiet des blossen philosophischen Raisonnements hinüber streift.

Darstellende Geometrie von J. Adhemar. Deutsch bearbeitet und bereichert mit den neuesten Fortschritten der isometrischen Projectionslehre, nebst einer allgmeinen Begründung dieser Wissenschaft, von O. Möllinger, Professor an der höheren Lehranstalt zu Solothurn. Solothurn. 1845. 8. mit 1 Atlas 7 Rthlr. 8 ggr.

Anleitung zum Studium der darstellenden Geometrie mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung bei dem Zeichnen technischer Gegenstände, insbesondere jener der Baukunst, der praktischen Geometrie und des Maschinenwesens. Von Johann Hönig, öffentl. ordentl. Professor der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Mit 26 Kupfertafeln. Wien. 1845. 8. 5 Rthlr. 8 ggr.

So wie das in dem Literarischen Berichte Nr. XXVI. S. 386. angezeigte Werk von Mossbrugger, welches sich aber durch verschiedene dort näher angedeutete Eigenthümlichkeiten auszeichnet, liefern auch die beiden vorstehenden, mit demselben fast gleichzeitig erschienenen Werke den erfreulichen Beweis, dass das Studium der darstellenden oder descriptiven Geometrie auch in Deutschland immer mehr Eingang gewinnt, und vorzüglich auf Gewerbschulen und polytechnischen Lehranstalten immer eifriger betrieben wird, wovon der wohlthätige Einfluss auf Künste und Gewerbe sich schon hinreichend gezeigt hat und künftig sich gewiss immer noch mehr zeigen wird. Auch bei dem stereometrischen Unterrichte auf Gymnasien haben wir immer die Anknüpfung der Grundlehren der Perspective und der descriptiven Geometrie sehr zweckmässig und für das Gedeihen des stereometrischen Unterrichts überhaupt sehr erspriesslich gefunden.

Elementare Sätze aus der Coordinaten-Geometrie für zwei Dimensionen nebst ihrer Anwendung bei den Beweisen der interessantesten Theoreme von Rutherford und Fenwick. Aus dem Englischen übersetzt und mit einem Nachtrage versehen von Dr. August Wiegand. Halle. 1845. 8.

Wenn dieser Schrift der Herren Rutherford und Fenwick eine besondere Eigenthümlichkeit soll zugesprochen werden können, so besteht dieselbe, wie es uns scheint, einzig und allein darin, dass die Gleichungen der geraden Linie und der Ebene nicht in der sonst meistens gebräuchlichen Form

Digitized by Google

$$Ax + By + C = 0$$

und

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

sondern in der Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

und

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

in Anwendung gebracht werden, was aber bekanntlich nicht neu, und wohl zuerst von Lamé in seinem Examen des differentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie. p. 89. geschehen ist. Nach unserer Ueberzeugung wird der Vorzug der einen oder der andern Methode immer durch die besondere Natur der jedesmaligen Untersuchung bedingt werden, wobei wir aber zugleich im Allgemeinen den älteren Formen

$$Ax + By + C = 0$$

und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

den Vorzug einzuräumen geneigt sind, weil dieselben in der That allgemeiner sind, als die neueren, und nicht auf das Unendliche führen, wenn man den einen oder den andern Coefficienten verschwinden zu lassen genöthigt ist. Dabei verdient aber immerhin die vorliegende kleine Schrift zur Beachtung empfohlen zu werden, weil in der That die besonderen Bequemlichkeiten, welche die in derselben vorzugsweise in Anwendung gebrachten Formen in einzelnen Fällen gewähren, nicht so allgemein bekannt zu sein scheinen, wie sie es verdienen, und die Schrift zur näheren Erläuterung dieses bemerkenswerthen Gegenstandes allerdings ganz geeignet ist.

Lamezan, Gustav, Frhr. v.: Eine in ihren Principien und Resultaten neue Methode zur Auffindung von Curven, welche Eigenschaften eines Grössten und Kleinsten besitzen. gr. 8. Würzburg. 1845. 8 ggr.

(Diese Schrift ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen und wird späterhin weiter besprochen werden.)

Praktische Geometrie.

Die Anfangsgründe des geometrischen Zeichnens. Eine Reihe der wichtigsten im Praktischen vorkommenden Elementarconstructionen. Für den Unterricht in Volks- und Gewerbschulen zusammengestellt von J. H. Knonauer. Zweite Auflage. Zürich. 1846. 4.

Nicht bloss den auf dem Titel genannten Schulen, sondern auch den beiden untersten Klassen der Gymnasien, in denen der geometrische Unterricht meistens noch keine streng wissenschaftliche Form annehmen darf, aber eine Vorbereitung auf denselben doch wünschenswerth und nothwendig ist, glauben wir diese Vorlegeblätter zum geometrischen Zeichnen empfehlen zu dürfen. Die Figuren sind in einer zweckmässigen Grösse ausgeführt und bieten eine hinreichende Mannigfaltigkeit dar, indem sie sich nicht bloss auf gerade, sondern auch auf krumme Linien beziehen. Ein Jeder, wer diese sämmtlich nicht schwierigen Constructionen auszuführen gelernt hat, wird sich dadurch, auch abgesehen von allen sonstigen Zwecken des Unterrichts, eine in vielen Fällen des gemeinen Lebens recht nützliche Uebung erworben haben, welche in keiner Schule, selbst auch in gewöhnlichen Landschulen, ganz unberücksichtigt gelassen werden sollte. Freilich mag dabei die Anschaffung der nöthigen Instrumente hin und wieder hindernd in den Weg treten, wobei aber die vorgesetzte Behörde hülfreiche Hand bieten müsste.

Godebski: Géométrie du Jalon, ou l'art de résoudre les problèmes usuels de géométrie pratique, à l'aide de simples alignements; contenant de plus la théorie élémentaire des transversales rectilignes ainsi que la description des instruments et des moyens ordinaires pour tracer et mesurer des lignes droites, ouvrage consacré à la pratique, in 8vo, accomp. de 5 pl. Brux. 1845. 1 Rthlr. 8 ggr.

Guy, M. P. G.: L'art du géomètre arpenteur, ou Traité de géométrie pratique. Paris 1845. 3 Fr. 50 C.

Stampfer, S., Prof. der prakt. Geometrie am k. k. polyt. Institute in Wien: Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren und zu andern damit verwandten, beim Eisenbahnbau vorkommenden geometrischen Arbeiten. (nebst 3 Kupfert.). Wien. 1845. gr. 8. Geh. 1 Rthlr. 8 ggr.

Lehrbuch der höheren Geodäsie. Von August Decker. Mit drei Figurentafeln. Neue Ausgabe. Mannheim. Verlag von Heinrich Hoff. 1845. 8. 1 Rthlr.

Wir müssen die Leser des Archivs darauf aufmerksam machen, dass ihnen hier unter dem Aushängeschilde einer neuen Ausgabe nichts weiter geboten wird, als ein längst bekanntes, schon

Digitized by Google

vor mehreren Jahren erschienenes Buch, welchem ein neuer Titel vorgedruckt worden ist. So wenig wir ein solches Verfahren des Verlegers billigen können, so soll es uns doch auf der andern Seite freuen, wenn auf diese Weise ein grösseres Bekanntwerden des Buches bewirkt wird, weil dasselbe, ohne Neues zu enthalten und auf eine gewisse Vollständigkeit Anspruch machen zu dürfen, diejenigen in verschiedenen grösseren Werken und einzelnen Abhandlungen zerstreuten Lehren der höheren Geodäsie, welche für die gewöhnlichen topographischen Messungen am unentbehrlichsten sind, in einer deutlichen Zusammenstellung enthält.

Trigonometrie.

Scott: Plane Trigonometry and Mensuration, for the use of the Royal Military College. London. 1845. 8vo. bound 9 s. 6 d.

Thomson, J.: Elements of Plane and Spherical Trigonometry; with the First Principles of Analytic Geometry. 4th edition, with various additions and improvements. London. 1845. 8vo. cloth. 4 sh.

Praktische Mechanik.

Poncelet: Industrielle Mechanik, deutsch von A. Hallbauer. Complet. Nürnberg. 2 Bände. 5 Rthlr. 12 ggr.

Poncelet, J. V.: Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. 2 Bd. 1. Lief. gr. 8. (nebst 2 lithogr. Taf.). Darmstadt. 1845. Geh. 1 Rthlr. 8 ggr.

Weisbach, J.: Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Ohne Anwendung des höhern Calculs für den Unterricht an technischen Lehranstalten etc. In 2 Theilen. Mit gegen 1000 eingedruckten Holzschnitten. 1. 2. Lieferung gr. 8. Braunschweig. 1845. 1 Rthlr.

Digitized by Google

Astronomie.

Mädler, J. H.: Der Wunderbau des Weltalls oder populäre Astronomie. 2te vermehrte Aufl. 1 Lief. Berlin. 8 ggr.

Mädler, Dr., J. H.: Ueber die Fixstern-Systeme. Eine Rede. gr. 8. Berlin. 1845. Geh. 4 ggr.

Theoretiska Astronomiens Grunder för Begynnare af J. Bredman, Astronomiae Professor. Med 7 Tabeller in Stentryck. Upsala. 1845. 8. h. 2. R:dr 40 sk.

Ny Tabell för Lunar-Distansers Corrigerande, af J. J. Åstrand. Götheborg. 1845. 1 ark 4:o. h. 8 sk.

Benzenberg, J. F.: Versuche über die Umdrehung der Erde. Aufs Neue berechnet. Düsseldorf. 1845. gr. 8. 8 ggr.

Block: Die gregorianische Zeitrechnung vom Jahre 1845 bis zum Jahre 2000 in einem Tableau dargestellt. gr. Fol. Berlin. 8 ggr.

Sur les corrections de la lunette méridienne, par M. Liagre, capitaine du génie, ancien élève de l'école militaire de Belgique. 4.

Die in dieser aus den Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Brüssel (T. XVIII. des Mém. cour. et Mém. des savants étrangers) abgedruckten Abhandlung gegebene elegante Behandlung des Mittagsrohrs empfehlen wir der Aufmerksamkeit der Astronomen. Wenn auch über diesen wichtigen und interessanten Gegenstand schon viel Vorzügliches geschrieben worden ist, so scheint sich doch die vorliegende Abhandlung durch ihre Eigenthümlichkeit in mehrfacher Beziehung auszuzeichnen.

Sammlung von Hülfstafeln. Herausgegeben im Jahre 1822 von H. C. Schumacher. Neu herausgegeben und vermehrt von G. H. L. Warnstorff, Dr. Phil. und Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften am Progymnasio zu Harburg. Altona. 1845. 8. 2 Rthlr. 12 ggr.

Herrn Dr. Warnstorff ist man grossen Dank schuldig, dass er eine neue Ausgabe des im Jahre 1822 erschienenen, aber schon seit längerer Zeit völlig vergriffenen, ersten Theils der vortrefflichen Schumacherschen Hülfstafeln, welche jedem Beobachter unentbehrlich sind, veranstaltet hat. Dabei darf aber nicht unbemerkt bleiben, dass durch Hinzufügung einer grösseren Anzahl ganz neuer Tafeln das Werk jetzt eine völlig veränderte Gestalt erhalten hat, wie für die Besitzer der älteren Ausgabe aus der folgenden ausführlichen Inhaltsanzeige ersichtlich sein wird.

Digitized by Google

I. Tafel zur Verwandlung der Sternzeit. — II. Tafel zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit. — III. Bessel's Refractions-Tafeln. — IV. Tafeln zur Reduction auf den Meridian. — V. Tafel der Logarithmen von $m = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ und $n = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^4}{\sin 1''}$. — VI. Logarithmen der Höhenparallaxe der Sonne von 10 zu 10 Tagen. — VII. Tafeln um aus der beobachteten Zenithdistanz des Nordsterns die Polhöhe des Beobachtungsorts zu finden, von A. C. Petersen. — VIII. Tafel für die Mittagsverbesserung von Gauss. — IX. Tafel für die Mitternachtsverbesserung. — X. Tafel die mittlere gerade Aufsteigung der Sonne zu finden, für Par. Mer. — XI. Allgemeine Tafeln für Aberration und Nutation mit der Constante der Aberration $= 20'',4451$, der Constante der Nutation $= 9'',2235$ und der Schiefe der Ekliptik für 1850 berechnet von Herrn Hofrath Nicolai. — XII. Längen und Breiten der Hauptsternwarten. — XIII. Tafel zur Verwandlung des Bogens in Zeit. — XIV. Tafel zur Verwandlung der Zeit in Bogen. — XV. Tafel zur Verwandlung der Zeit in Decimaltheile des Tages. — XVI. Längen der Kreisbogen, den Halbmesser $= 1$ gesetzt. — XVII. Verbesserung des aus correspondirenden Höhen abgeleiteten Mittags, wenn die Höhen des Vormittags und des Nachmittags nur nahe gleich sind. — XVIII. Zeitbestimmung aus Zenithdistanzen, mit der an das Mittel der Zeiten anzubringenden Correction. — XIX. Zeitbestimmung mit dem Passageninstrumente. — XX. Zeitbestimmung aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben Vertikalkreis. — XXI. Reduction der nahe am Meridian beobachteten Zenithdistanzen auf den Meridian. — XXII. Reduction der nahe am Meridian beobachteten Zenithdistanzen der Sonne auf den Meridian. — XXIII. Methode die Breite aus dem Mittel mehrerer von der Culmination entfernten Zenithdistanzen eines Sternes zu finden (Mittheilung des Herrn Hofraths Gauss.) — XXIV. Methode, die Polhöhe aus einer beobachteten Höhe des Nordsternes zu finden. — XXV. Berechnung der Zenithdistanz und des Azimuths aus dem Stundenwinkel. — XXVI. Grundformeln und Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie. — XXVII. Interpolationsmethode für halbe Intervalle der Argumente von Gauss. — XXVIII. Tafel, um für eine bestimmte Polhöhe aus dem Stundenwinkel und der Declination, Azimuth, Höhe und parallactischen Winkel zu berechnen. — XXIX. Tafeln, um Höhenunterschiede aus Barometerbeobachtungen zu bestimmen von Gauss. — XXX. Dieselben von Bessel. — XXXI. Dieselben von Carlini. — XXXII. Verwandlung der Barometerscalen und Thermometerscalen, für Pariser Zoll, Englische Zoll und Millimeter. Ebenso für Réaumur, Centigrad und Fahrenheit. — XXXIII. Tafeln zur Reduction des altfranzösischen Barometers auf 0° Réaumur. — XXXIV. Reduction des metrischen Barometers auf 0° Centigrad. — XXXV. Reduction des englischen Barometers auf 32° Fahrenheit. — XXXVI. Reduction des altfranzösischen Barometers, wenn Scale und Quecksilber eine verschiedene Temperatur haben. (Alle diese Tafeln setzen Scalen von Messing voraus.) — XXXVII. Logarithmen von vier Decimalstellen für Zahlen und trigonometrische Functionen, mit Hinzufügung der Gauss'schen Tafel für Summen und Differenzen.

Man sieht hieraus, wie viel des Nützlichen diese auch äusserlich gut ausgestattete, und mit einer deutsch und fran-

Digitized by Google

zösisch verfassten Einleitung versehene Sammlung von Tafeln und Formeln enthält, welche kein Beobachter fernerhin wird entbehren können.

Herr Staatsrath v. Struve hat den systematischen Catalog der Bibliothek der Sternwarte Pulkowa aus der Beschreibung der Sternwarte, die bis auf einige Correcturen der Kupfer vollendet ist, besonders abdrucken lassen, und damit den Astronomen ein angenehmes Geschenk gemacht.

Librorum in Bibliotheca Speculae Pulcovensis contentorum Catalogus Systematicus. Ex opere descriptionis speculae seorsim excudi curavit, indice alphabetico et praefatione auxit F. G. W. Struve. Petropoli typis Academ. Scient. 1845. 8vo. (437 Seiten, Vorrede XLVIII.).

Schon des Formats wegen ist dieser Catalog bequemer zu gebrauchen als der in dem grossen Werke abgedruckte, aber noch wesentlicher ist der Vorzug, den er durch das hinzugefügte alphabetische Namenverzeichniss aller darin enthaltenen Schriftsteller, mit Rückweisung auf die Seiten, wo ihre Werke vorkommen, erhalten hat.

Die Bibliothek enthielt im Anfange dieses Jahres 2242 Werke, 3109 Dissertationen, und 60 Himmelskarten, sowohl einzelne als Sammlungen von Karten.

Unter den Werken befinden sich Kepplers Manuscripte in 16 Bänden. Die ganze Sammlung bestand ursprünglich aus 20 Bänden, von denen aber Th. 6, 7, 8 und 12 sich in der Kaiserlichen Bibliothek in Wien befinden. Diese Theile enthalten die 1718 von Hansch herausgegebenen Briefe, und sind nach dem Abdrucke dort deponirt.

Der Vorrede ist ein vollständiges Verzeichniss aller Schriften, die Keppler herausgegeben hat, beigefügt, das 41 Nummern enthält. Sie schliesst mit Berichtigungen zu Lalandes Bibliographie.

Physik.

Die Reform der Naturwissenschaften. Aufforderung zu einer gründlichen Kritik, namentlich der Naturlehre. Von einem Lehrer der Naturwissenschaften. 8. Hamburg. 1845. 12 ggr.

Anfangsgründe der Physik. Von Andreas von Ettingshausen. Zweite Auflage. Mit fünf Kupfertafeln. Wien. 1845. 8. 3 Rthlr. 8 ggr.

Wir freuen uns sehr, aus dem so baldigen Erscheinen einer zweiten Auflage dieses empfehlenswerthen Lehrbuchs der Physik den Schluss ziehen zu können, dass die Zahl der Liebhaber einer

Digitized by Google

mathematischen Darstellung der Hauptlehren der Physik in Deutschland immer noch gross genug ist, dass ein Werk wie das vorliegende, in welchem die mathematische Seite der Darstellung vorwaltet, sich Bahn zu brechen im Stande ist. Obgleich Verbesserungen überall, wo sie nöthig waren, angebracht sind, so hat der Verf. doch zu vielen wesentlichen Veränderungen keine Veranlassung gefunden; nur wurde es in dem chemischen Abschnitte für zweckmässig erachtet, durchgehends nur von Aequivalenten, nicht aber von Atomgewichten zu sprechen, und auch die Bezeichnung damit in Einklang zu bringen, welchem gemäss statt der in der ersten Auflage gebrauchten Doppelatome H_2, N_2, Cl_2 in der zweiten Auflage bloss die einfachen Buchstaben H, N, Cl als Zeichen der Mischungsgewichte stehen.

Wir können uns daher hier auch begnügen, auf unsere beifällige Anzeige der ersten Auflage im Literarischen Berichte. Nr. XV. S. 237. zu verweisen, und wünschen dem empfehlenswerthen Buche nur immer noch grösseren und allgemeineren Eingang.

Hessler: Handbuch der Naturlehre nach dem Bedarf der Techniker, Künstler und Gewerbtreibenden, und zum Gebrauch beim Unterricht in technischen Schulen, so wie beim Selbstunterricht für praktische Techniker und Gewerbtreibende und Industrielle überhaupt. Mit 500 Holzschnitten. Wien. 1845. 3 Rthlr. 8 ggr.

Handwörterbuch der Chemie und Physik. 2r Band 2te Hälfte. (H—K). Herausgegeben von E. F. August, F. W. Barentin, W. H. Dove, L. F. Kämtz, K. F. Klöden, R. F. Marchand, F. Minding, F. W. G. Radicke, J. A. W. Roeber, L. F. W. A. Seebeck. Mit eingedruckten Holzschnitten. Berlin. 1845. gr. 8. 1 Rthlr. 8 ggr.

Menzzer, Dr. C. L.: die Lehre vom Luftdruck, in ihrem Princip als unlogisch erwiesen, nebst einer Fundamentaltheorie über das Barometer und die Schwere. Halberstadt. 1845. 8 ggr.

Poulsen, Dr. Chr. H.: die Contact-Theorie, vertheidigt gegen Faraday's Abhandlung: „über die Quelle der Kraft in der Volta'schen Säule." Inaugural-Dissertation. gr. 8. Heidelberg. 1845. 6 ggr.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. Herausgegeben von K. Kreil. 5r. Jahrgang. gr. 4. Prag. 1845. 3 Rthlr. 8. ggr.

Simonin, père: Résumé des observations météorologiques faites à Nanci pendant l'année 1844, et de la constitution médicale de la même année. In 8. plus un tableau. Nanci. 1845.

Observations des Phénomènes périodiques. Extrait du Tome XVIII. des Mémoires des l'Académie Royale de Bruxelles. 4.

Diese Abhandlung des Herrn Quetelet enthält die Zusammenstellung der Resultate der bekanntlich von der Akademie der

Digitized by Google

Wissenschaften zu Brüssel in einem sehr grossen Maassstabe unternommenen und veranlassten Beobachtungen der periodischen Phänomene für 1845.

Pouillet: Note sur le météore de Malaunay. Paris. 1845. 55 Cent.

Bertrand, Alex.: Lettres sur les revolutions du globe. Enrichies de nouvelles notes par Arago etc. Mit 4 Taf. Paris 1845. 6 Fr.

Der physikalische Apparat, insbesondere als Lehrmittel in Gymnasien, Realschulen und anderen Unterrichtsanstalten. Von Dr. J. Heussi, Oberlehrer am Grossherzogl. Friedrich Franz Gymnasium zu Parchim. Parchim und Ludwigslust. 1845. 8. 8 ggr.

Diese kleine Schrift, welche ursprünglich als Abhandlung des Schulprogrammes des Gymnasiums zu Parchim für 1845 gedient hat, ist angehenden Lehrern der Physik an höheren Unterrichtsanstalten, namentlich solchen, deren erstes amtliches Geschäft, wie dies namentlich jetzt bei neuen Anstellungen häufig der Fall ist, in der Anschaffung eines neuen oder wenigstens vollständigeren physikalischen Apparats besteht, zu empfehlen, weil sie in derselben manche beherzigungswerthe Andeutungen finden werden. Mit den in dieser Schrift ausgesprochenen Ansichten über die Stücke, aus denen ein für eine höhere Lehranstalt bestimmter physikalischer Apparat vorzugsweise bestehen muss, erklären wir uns im Allgemeinen völlig einverstanden. Da die zu Gebote stehenden Mittel meistens beschränkt sein werden, so wird immer vorzüglich der Grundsatz festgehalten werden müssen: Wenig, aber das Wenige gut, was auch ganz die Ansicht des Herrn Verfassers zu sein scheint. Natürlich müssen so viel als möglich alle Hauptlehren und unter denselben wieder vorzugsweise diejenigen bedacht werden, welche besonders eine Begründung auf experimentalem Wege erfordern. Aber auch für die einer mehr mathematischen Begründung fähigen Lehren sind einige zweckmässig eingerichtete Apparate sehr wünschenswerth, weil es immer für die Schüler höchst anregend und belehrend sein muss, wenn ihnen die genaue Uebereinstimmung der auf rein theoretischem Wege gefundenen Resultate mit dem Ergebniss unmittelbarer Erfahrung vor Augen gelegt werden kann. Auch auf einige weniger allgemein bekannte Apparate, wie z. B. auf das Monochord und den Orgelapparat von Lange in Berlin ist in dieser Schrift aufmerksam gemacht worden, was derselben ebenfalls zur Empfehlung gereicht.

Digitized by Google

Vermischte Schriften.

Die drei neuesten Theile von

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. New Haven.

enthalten ausser vielen anderen bemerkenswerthen naturwissenschaftlichen, vorzüglich auch chemischen Abhandlungen die folgenden mathematischen und physikalischen Aufsätze.

Vol. XLVI. 1844. Nro. I. Art. I. On the Action of Yellow Light in producing the Green Color, and Indigo Light the Movements of Plants; by D. P. Gardner, M. D. p. 1. — Art. XIV. On the Mode of Formation of the Tails of Comets, by Prof. William A. Norton. p. 104. — Art. XVIII. Te Variation and Dip of the Magnetic Needle at Nantucket, Mass.; by William Mitchell. p. 157. — Art. XXII. Notice of Travels in the Alps of Savoy, and other parts of the Pennine Chain, with observations on the phenomena of Glaciers; by James D. Forbes, F. R. S. p. 172.

Nro. II. Art. V. Statement of Elevations in Wisconsin; by J. A. Lapham. p. 258. — Art. VII. Abstract of a Meteorological Journal for the year 1843, kept at Marietta, Ohio; by S. P. Hildreth, M. D. p. 277. — Art. VIII. A Week among the Glaciers; by Dr. H. Allen Grant. p. 281. — Art. XIV. On the Parallelogram of Forces; by Prof. Alexander C. Twining. p. 324. — Art. XVII. On the possible Variation in the Length of the Day, or of the Times of Rotation of the Earth upon its Axis; by Prof. W. W. Mather. p. 344.

Vol. XLVII. 1844. Nro. I. Art. II. Researches in Elucidation of the Distribution of Heat over the Globe, and especially of the Climatic Features peculiar to the Region of the United States; by Samuel Forry, M. D. p. 18. — Art III. A new Method for computing Interest; by Geo. R. Perkins, A. M. p. 51. — Art. VI. Observations upon the Dip of the Magnetic Needle; by Prof. Thomas Hobart Perry. p. 84. — Art. VII. Astronomical Observations performed at the Imperial Observatory of Pulkova; translated from the Bibliothèque Universelle, of October 1843; by Jas. Nooney, Jr., A. M. p. 88.

Nro. II. Researches in Elucidation of the Distribution of Heat over the Globe, and especially of the Climatic Features peculiar to the Region of the United States; by Samuel Forry, M. D. (concluded). p. 221. — Art. II. On the Condition of Equilibrium between Living and Dead Forces; by Robert Henry Fauntleroy. p. 241. — Art. IV. Comparison of Gauss's Theory of Terrestrial Magnetism with observation, by Prof. Elias Loomis; p. 278. — Art. VI. Abstract of a Meteorological Register for 1832—43, kept at Rio de Janeiro; by John Gardner,

Digitized by Google

Esq. p. 290. — Art. IX. Secular Acceleration of the Moon's Mean Motion; by James H. Coffin. p. 324. — Art. XIII. On the Measure of Polygons; by Prof. George C. Whitlock. p. 380.

Vol. XLVIII. 1845. Nro. I. Art. III. Magnetical Investigations; by the Rev. William Scoresby, B. D. p. 33. — Art. IV. A new way of obtaining the Exponential and Logarithmic Theorems; by Prof. Theodore Strong; p. 36. — Art. XII. New Experiments on the Solar Spectrum; communicated by Prof. Olmsted. p. 137. — Art. XV. Effect of a contracted space in obstructing the Vibrations of a Mercurial Pendulum; by George Baker; p. 156

Nro. II. Art. II. Remarks by Dr. Hare, on a recent speculation by Faraday on electric conduction and the nature of matter. p. 247. — Art. VII. Abstract of a Meteorological Journal, for the year 1844, kept at Marietta, Ohio; by S. P. Hildreth, M. D. p. 287. — Art. X. Observations made at New Haven, Conn., on the Shooting Stars of the August Meteoric Period, in 1844; communicated by E. C. Herrick. p. 316. — Art. XIII. Idea of an Atom, suggested by the phenomena of weigth and temperature; by James D. Whelpley. p. 352.

Den beiden Nummern eines jeden Bandes sind immer reichhaltige bibliographische Notizen und Miscellen beigegeben, so dass dieses längst bekannte treffliche Journal für einen Jeden, wer sich mit den Fortschritten der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in der neuen Welt bekannt machen, und in fortwährender Bekanntschaft erhalten will, ganz unentbehrlich ist. Wir hoffen ununterbrochen im Stande zu sein, den Hauptinhalt der einzelnen Nummern bald nach ihrem Erscheinen in dem Literarischen Berichte anzugeben, und, was uns besonders bemerkenswerth und unsern Zwecken förderlich zu sein scheint, in dem Archive mittheilen zu können.

Druckfehler.

S. 261. des Archivs setze man Z. 7. hinter obtiendra ein Colon und verwandle Z. 8. „on“ in „on“.

Digitized by Google

XXVIII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

In dem neuesten Bande der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien (Drei und zwanzigster Theil. Neuer Folge Dritter Band.) hat Herr Director C. L. von Littrow einige interessante Notizen über Kepler mitgetheilt, welche wir hier ausheben, da die trefflichen Annalen der Wiener Sternwarte, die nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben werden, wohl nicht vielen Lesern des Archivs zu Gesicht kommen dürften.

In der zu Linz erscheinenden Zeitschrift des Museum Francisco-Carolinum für 1842 finden sich mehrere Aufsätze von Herrn G. Kapp über einige Kepler's Aufenthalt in Linz betreffende sehr interessante Urkunden, die man im Archive der ob der ennsischen Stände aufgefunden hat. Ein Facsimile eines Theils einer dieser Urkunden theilt Herr Director von Littrow in dem genannten Bande der Annalen mit, und bemerkt zu besserem Verständniss desselben vorher Folgendes:

Kepler bekleidete die Professur der Mathematik an der Landschaftsschule, seine Hauptbeschäftigung blieb aber die Verfertigung der Rudolphinischen Tafeln, und nebenbei der Landmappen von Oberösterreich. Auf die letztere Arbeit scheinen die Stände besondern Werth gelegt zu haben, weil die vorhandenen Karten von Lazius und Hirsvogel unrichtig und unvollkommen waren. Die Fortschritte, die Kepler seit dem Jahre 1614 in deren Verbesserung gemacht, dünkten den Ständen zu gering, und es scheint, dass sie es an Betreibungen nicht fehlen liessen. Kepler fühlte die Schwierigkeit, zwei so weitläufige Arbeiten, deren eine die andere ausschloss, neben einander zu fördern. Natürlich lag ihm

Digitized by Google

selbst vorzüglich sein astronomisches Werk am Herzen; der Verfertigung der Landmappen hatte er sich aus schuldigem Gehorsam, wie er sich an mehreren Stellen ausdrückt, unterzogen. Auf eine wiederholte Betreibung der Stände gab er endlich die Antwort in einem Berichte, aus welchem das mitgetheilte Facsimile entlehnt ist. Nachdem er vorausgeschickt, dass die Vornahme der einen Arbeit nothwendig die Vernachlässigung der andern zur Folge habe, handelt er von dem Umfange jeder einzelnen, und spricht sich nun über die Rudolphinischen Tafeln insbesondere in der folgenden jedenfalls sehr charakteristischen Weise aus.

„Von den Tabulis Rudolphj."

„Euer Gnaden werden selber wissen, oder von andern Mathematicis berichtet sein, das in re literaria die Tabulä astronomicae ein wohlbedächtliches Hauptwerkh sein müssen, vnd gar nit wie ein Comedj über nacht anzustellen, oder wie ein poëma auff blossen einfällen bestehe, oder wie ein Commentarius super Aristotelem auß dem Ermel zu schüttelen: sondern man sich vil Jahrlang zu besinnen vnd mit Observationibus vnd calculationibus zu bemühen habe, will man die rechnung also verfassen, das sie auff vil hundert ja tausent Jahre hinder sich vnd für sich gelten solle. Copernicus hat 27 Jahr zugebracht, ehe er sein opus Revolutionum vnd Tabulae ans liecht gebracht. An den Tabulis Rudolphj hatt Tycho Brahe albereitt 38 Jahr, nämlich biß in seine gruben, vnd zwar jederzeit mit Hülff 10. 20. 30. studiosorum gearbeitet. Seine Verrichtung ist diese: Erstlich hatt Er das werkh mit Observationibus (wölche gleichsam vnser Zeug, stein vnd holtz zum gepeu seind) überflüssig versehen; fürs ander die fixas stellas über ein Tausent außgerechnet, vnd jeden stern seinen ort, weil Er denselben jeder Zeit behelt, aufgezeichnet. Drittens hatt Er an den Planeten, wölliche wegen ire vilfaltigen verwirten Bewegung das meiste Kopffbrechen verursachen, auch angefangen, vnd bey son vnd Mond überhaupt das seinige gethan, vnd den bau an dieser seitt auffgeschlagen.

Die übrigen fünff planeten, nit weniger an Son vnd Mond, so vil vnd mehr denn Ich oder Er jemahls gemeint hatt, seind mir gepliben.

An der Sonnen, als dem Eckstein vnd grundfeste zu allen Planeten vnd an dem Planeten Marte hab Ich 9 Jahr gearbeittet, da Ich noch zimliche Hülff von Tauglichen studiosis gehabt, biß ich meine Commentaria de Marte ans liecht gebracht.

Derjenige gelehrte Mathematicus, David Fabricius, der mich vor einem Jahr wegen meines langen Verzugs starrkh angezäpfft vnd je vermeint, Er wolte mit seinen Tabulis fertig sein, der zeucht diß Jahr die schnauppen wider ein, vnd meldet, das sich bey den Sonnenfinsternüssen noch ein anderer merrklicher defectus finde, der biß dahero noch vnerörtert gepliben, ist gewißlich wol an den rechten Knopff kommen."

Digitized by Google

Die Unterschrift dieses Berichts lautet wörtlich so:

Johan Keppler.

Die Aufschrift ist folgende:

Johan Keplers Mathematici gehorsamstes anpringen.

Hier hat also, was jedenfalls höchst bemerkenswerth ist, unser berühmter Landsmann selbst seinen Namen in derselben Schrift einmal Keppler, und einmal Kepler geschrieben. Daher bemerkt Herr Director v. Littrow mit Recht, dass hiernach die Schreibweise dieses gefeierten Namens der Willkühr anheim gestellt zu sein scheine.

Man ist Herrn Director v. Littrow für diese Mittheilungen grossen Dank schuldig, so wie überhaupt dergleichen Beiträge zur Geschichte der Mathematik sehr dankbar aufzunehmen sind. Bei einem Manne, der wie Kepler ein so sehr bewegtes Leben geführt hat, und seinen Wohnsitz an so vielen verschiedenen Orten aufzuschlagen genöthigt gewesen ist, würden sorgfältige Nachforschungen über sein Leben an diesen verschiedenen Orten gewiss zu manchen nicht unwichtigen Resultaten führen und zu interessanten Mittheilungen Veranlassung geben können. So ist z. B. Kepler bekanntlich auch kurz vor seinem am 15. November 1631 zu Regensburg erfolgten Tode Professor der Mathematik zu Rostock gewesen. Ueber diesen freilich nur sehr kurzen Abschnitt seines Lebens ist, so viel uns bekannt ist, bis jetzt nichts Genügendes veröffentlicht worden. Daher möchten wohl einige Nachforschungen in dem dortigen Universitätsarchive über die nächste Veranlassung seiner Berufung und über sein ganzes dortiges Wirken wünschenswerth sein, welche gern in das Archiv der Mathematik und Physik von uns aufgenommen werden würden.

In Nro. 43. und 44. (ausgegeben den 1. Mai 1845), und Nro. 46—49. (ausgegeben den 10. Juni 1845) der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern hat der Archivar der Gesellschaft, Herr Rudolf Wolf,

Auszüge aus Samuel Königs Briefen an Albrecht von Haller, mit literarisch-historischen Notizen

mitgetheilt, welche auch in einem besondern Abdruck als für sich bestehende Schrift erschienen sind.

Samuel König, welcher 1712 zu Büdingen geboren wurde und nach mancherlei Schicksalen im August 1757 als Hofrath und Bibliothekar des Prinzen-Statthalter von Holland und Professor der praktischen Philosophie an der Ritterakademie im Haag starb, gehört zwar nicht zu den grössten Mathematikern des vorigen Jahrhunderts, nimmt aber neben denselben keine unwürdige Stelle ein. Am meisten ist er durch seinen mit Maupertuis mit grosser Heftigkeit geführten Streit über das Princip der kleinsten Wirkung und seine in dieser Streitsache unter dem Titel Appel au public erschienene Schrift, seine Elémens de Géométrie, contenant

Digitized by Google

des six premiers livres d'Euclide. A la Haye. 1758. 4.*) und verschiedene einzelne Abhandlungen bekannt geworden. In den von Herrn Wolf mitgetheilten Briefen giebt König seinem berühmten Landsmanne Albrecht v. Haller unausgesetzt Nachricht über seine Schicksale und wissenschaftlichen Arbeiten und Bestrebungen, vorzüglich natürlich über die erwähnte Streitsache. Dieselben lassen einen sehr hellen Blick in das Treiben der Gelehrten der damaligen Zeit und einiger gelehrten Gesellschaften thun, und sind jedenfalls ein sehr dankenswerther Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Die Sprache ist nicht selten etwas derb, wie z. B. in dem Franequer. 3. juin 1748 datirten Briefe, wo König u. A. Folgendes an Haller schreibt: „On me mande qu'on songe sérieusement à établir à Berne une profession de mathématique, cela est admirable; mais je vois que cela va dans l'ancien train, puisque dans le Gutachten du sénat académique, Mr. Engelhard, par le canal apparement de quelques amis, est mis en avant comme fort capable de poste. De grâce, mon cher Monsieur, puisque Vous avez vu ce que c'est que mathématiques mêlez Vous un peu de cette affaire là, puisque Vos amis qui ont du credit s'en rapportent à Votre jugement. Que savent ces Messieurs du Gutachten de Mr. Engelhard et de ses mathématiques, qui sont aussi peu son fait que la médecine est le mien: il ne s'y est jamais appliqué et ne se donne pas pour cela. Il en est de même de Blauner que je connais particulièrement; c'est un très-pauvre diable, absolument sans génie et sans science et absolument incapable d'un tel poste **). Je n'en dis pas autant d'un certain homme du pays de Vaud, nommé Mr. Mégard, qui fait le métier d'avocat à Berne; celui-là est fort habile, au point que j'ai cru pouvoir le recommander à Pétersbourg en qualité de géomètre, mais il n'a pas voulu y aller u. s. w." Von einer andern Art ist der schöne von einem tiefen Gemüth zeugende Brief Franequer. 15. décembre 1747, in welchem er Hallern den Tod seines von ihm erzogenen Bruders anzeigt.

Jedenfalls hat Herr Wolf durch die Sammlung dieser Briefe einen dankenswerthen Beitrag zur Geschichte der Mathematik überhaupt und der Geschichte der Mechanik insbesondere geliefert, in welcher letzteren der Streit zwischen König und Maupertuis über das Princip der kleinsten Wirkung, wenn auch die wissenschaftlichen Resultate desselben nicht gross genannt werden dürfen, immer eine nicht ganz unbedeutende Rolle spielen wird.

Sollte sich Herrn Wolf noch Gelegenheit zu ähnlichen Mittheilungen darbieten, so verdient er alle Aufmunterung, dieselben dem mathematischen Publikum nicht vorzuenthalten.

---

*) Es giebt auch eine Ausgabe von 1762.

**) Gerade aber dieser pauvre diable erhielt nach Herrn Wolfs Bemerkung im Jahre 1749 die neue Professur, und war in derselben der Vorgänger des verdienten Tralles, welcher später Akademiker zu Berlin wurde, und als solcher im Jahre 1822 auf einer Reise zur Besorgung eines Pendelapparats in London plötzlich starb.

Digitized by Google

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Wörterbuch der angewandten Mathematik. Ein Handbuch zur Benutzung beim Studium und praktischen Betriebe derjenigen Künste und Gewerbe, welche Anwendungen der reinen Mathematik erfordern. Zugleich als Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik. Im Vereine mit mehreren Gelehrten und Praktikern herausgegeben von G. A. Jahn, Dr. Philos., Lehrer der Mathematik und Astronomie, u. s. w. zu Leipzig. Zweiter Band. M—Z. Mit vier Tafeln Abbildungen. Leipzig. 1845.

Mit dem vorliegenden zweiten Bande, der auch einige Zusätze zu beiden Bänden enthält, ist dieses Wörterbuch der angewandten Mathematik geschlossen. Was in dem Literarischen Berichte Nro. XXII. S. 329. zur Empfehlung des ersten Bandes gesagt worden ist, gilt auch von diesem ganz in derselben Weise bearbeiteten zweiten Bande. Denn wir sind fortwährend der Meinung, dass dasselbe, ohne tiefer in die Wissenschaft einzugehen und überhaupt höhere Ansprüche zu machen, in dem auf dem Titel näher bezeichneten Kreise recht nützlich wirken wird, und als Hülfsmittel zum Nachschlagen gute Dienste leisten kann, wenn man über irgend einen Gegenstand der angewandten oder technischen Mathematik eine augenblickliche nicht tiefer eingehende Belehrung und einige Nachweisungen über die betreffende Literatur verlangt.

Arithmetik.

Lehrbuch der Arithmetik für höhere Bildungsanstalten. Aus historischen und psychologischen Grundlagen für die Zwecke des Unterrichts neu entwickelt von Dr. Theodor Wittstein. Erste Abtheilung. Die Operationen an einfachen rationalen Zahlen. Hannover. 1846. 8 ggr.

In der Vorrede macht der Herr Verfasser vorzüglich auf zwei Eigenthümlichkeiten aufmerksam, durch welche sich dieses neue Lehrbuch der Arithmetik vor andern Lehrbüchern auszeichnet, von denen die erste die wissenschaftliche Systematik, die zweite die Methode der Darstellung, welches Ausdrucks wir uns hier fürs Erste bedienen, nachher aber den eigentlichen Zweck des Herrn Verfassers näher bezeichnen wollen, betrifft.

In der ersteren Beziehung wird das folgende Princip aufgestellt: Jeder Schritt vorwärts im Gebiete der Arithmetik muss entweder ein *Fortschritt in der Reihe*

Digitized by Google

der Rechnungsarten, oder ein *Fortschritt in der Reihe der Zahlengattungen* sein.

Als die zweite Eigenthümlichkeit bezeichnet der Herr Verfasser die räumliche Auffassung, welcher von ihm durchgängig die arithmetischen Objecte unterworfen werden, worunter er aber keineswegs eine Benutzung der Geometrie für die Zwecke der Arithmetik verstanden wissen will, sondern vielmehr das Charakteristische einer gewissen Klasse von Formen, die Herbart sehr passend Reihenformen nennt, und zu denen auch die Zahl gehört, darin erkennt, dass sich in ihnen der Uebergang von irgend einem Elemente *A* zu irgend einem andern *C* nur durch Vermittelung eines zwischenliegenden Elements *B* ausführen lasse, wozu noch komme, dass diese Form nur eine Dimension habe oder eine einfache Reihe bilde, wenn der Uebergang von *A* zu *C* nothwendig stets durch das nämliche *B* hindurchgehen muss, wie z. B. bei der Zeit und der (reellen) Zahl, dagegen im entgegengesetzten Falle mehrere Dimensionen habe oder Reihen von Reihen bilde.

Wir müssen uns der Beschränktheit des Raumes wegen leider mit diesen wenigen allgemeinen Andeutungen begnügen, wünschen aber, dass diese Schrift, insbesondere auch ihre lesenswerthe Vorrede, von den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten nicht unbeachtet gelassen werde. Besonders begierig sind wir auf die Art und Weise, wie der Herr Verfasser späterhin die Lehre von den imaginären Zahlen seiner räumlichen Auffassung der Zahl überhaupt unterordnen und in sein System einreihen wird, wodurch er sich das wichtige Verdienst erwerben wird, diese Lehre nach den neueren Ansichten von Gauss, welche, wie er selbst sagt, ein Herausgehen aus einer Zahlenlinie in eine Zahlenebene verlangt, in das System der Arithmetik und in ein elementares Lehrbuch derselben zuerst aufgenommen und mit dem ersteren gehörig verflochten zu haben.

Wir empfehlen daher dieses Lehrbuch nochmals zu besonderer Beachtung.

Wiegand: meine Methode, die Sätze der Addition, Subtraction, Multiplication und Division durch Beispiele zu veranschaulichen. Halle. 1845. 4½ ggr.

Heyne: die Vortheile des Gebrauchs der dekadischen Ergänzungen beim Rechnen. Naumburg. 1845. 4 ggr.

Vorlesungen über die Integralrechnung. Vorzüglich nach den Methoden von A. L. Cauchy bearbeitet von Moigno. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Braunschweig. 1846. 8. 3 Rthlr. 8 ggr.

Observations sur la Transformation des Integrales multiples. Par A. F. Svanberg. A Upsal. 1845. 4.

Diese allen denen, welche sich mit der Theorie der bestimmten Integrale beschäftigen, sehr zur Beachtung zu empfehlende Abhandlung ist aus Vol. XIII. der Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsal. besonders abgedruckt. Ueber den Zweck derselben können wir uns nicht besser als mit den folgenden eigenen Worten des Herrn Verfassers aussprechen: „Dans les transformations des intégrales multiples il y a deux espèces distinctes de difficultés, qui

Digitized by Google

se présentent, dont l'une, savoir la substitution à faire pour le produit des différentielles, a depuis long-tems été considérée; l'autre relative aux limites, n'ayant jamais été bien discutée, féra l'objet du mémoire présent. En examinant une intégrale multiple, prise entre des limites constantes et finies, on trouve, qu'elle ne peut pas en général après sa transformation être représentée par une seule autre, mais que pour une intégrale double p. e. il en faut quatre, prises entre des limites différentes, pour réproduire la valeur de la proposée. La matière étant abstraite, il nous semble bon d'aborder la question par des considérations géométriques, qui féront voir au lecteur au premier coup d'oeil les difficultés nouvelles et le chemin, qu'il lui faut suivre pour les surmonter. La transformation des intégrales multiples d'un nombre quelconque de variables, prises entre des limites constantes et finies, se faisant d'une manière parfaitement semblable à celle des intégrales doubles, nous croyons pas nécessaire d'y faire application spéciale.“ Unter mehreren bemerkenswerthen Formeln, zu denen der Herr Verfasser gelangt, befindet sich auch das von Herrn Dr. Schlömilch in diesem Archiv. Thl. V. S. 211. entwickelte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\, dx,$$

welches Herr Professor A. F. Svanberg mit Hinweisung auf Herrn Dr. Schlömilchs Arbeit auf folgende Art ausdrückt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{h^2 + x^2}\, dx = \frac{e^{-mh}}{2h}\int_\infty^{-mh} \frac{ds}{s} e^{-s} - \frac{e^{mh}}{2h}\int_\infty^{mh} \frac{ds}{s} e^{-s},$$

woraus mittelst einer leichten Transformation das von Herrn Dr. Schlömilch a. a. O. angegebene Integral folgt.

Wir empfehlen diese Abhandlung nochmals zu besonderer Beachtung.

Geometrie.

Ueber die Methode des geometrischen Unterrichts. Nebst Erläuterungen zu dem Leitfaden für den ersten Unterrricht in der Geometrie. Von Bernhard Becker, Oberlehrer an der höheren Bürgerschule zu Oldenburg. 8. Frankfurt a. M. 1845. 16 ggr.

Diese Schrift ist gegen die Euklidische Methode gerichtet. Wenn der Herr Verfasser auf S. 72. in einer Note sagt: „Freunde und Verehrer der Euklidischen Methode werden das hier vom pädagogischen Standpunkt aus gefällte Urtheil vielleicht etwas wegwerfend finden. Dass die Euklidische Methode vortrefflich wirken kann, wo sie, von einem tüchtigen Pädagogen gehandhabt, wirklich

Digitized by Google

in das Seelenleben der Jugend eingreift, das soll nicht geleugnet werden," so stimmen wir ihm darin vollkommen bei. Wenn er dann aber hinzufügt: „Allein die Erfahrung bestätigt nur zu sehr, dass diess höchst selten der Fall ist," so müssen wir uns erlauben, ihm bemerklich zu machen, dass, um kurzweg ein solches Urtheil ohne alle Anmaassung fällen zu dürfen, eine sehr grosse, an sehr vielen Orten in verschiedenen Ländern — und zwar nicht bloss in den Ländern deutscher Zunge, sondern z. B. auch in England, Holland, Schweden u. s. w., wo doch auch Mathematik, namentlich Geometrie, sehr viel gelehrt und getrieben wird — gemachte Erfahrung und eine genaue Kenntniss der Individualität sehr vieler Lehrer der Mathematik erforderlich ist, die wir uns in dem Maasse, wie sie um einen solchen Ausspruch geradezu für richtig oder unrichtig erklären zu dürfen, uns erforderlich zu sein scheint, nicht beilegen können.

Abgesehen hiervon ist aber das Schriftchen, von dem Standpunkte des Herrn Verfassers aus, verständig abgefasst und bekundet den erfahrenen, kenntnissreichen und seinem Lehrgegenstande mit der wärmsten Liebe ergebenen Lehrer. Eine Lehrmethode im Allgemeinen charakterisiren zu wollen, hat immer seine eigenthümliche Schwierigkeit, was auch hier der Fall ist. Wir können nur sagen, dass die Methode des Herrn Verfassers eben die ist, welche in neuerer Zeit der alten Euklidischen Methode mehrfach gegenüber gestellt worden ist, und sich wohl zuerst in den Schriften und der Lehrweise Thibaut's — den wir aber hier bloss anführen, um die Methode in der Kürze zu charakterisiren, womit wir übrigens nicht sagen wollen, dass der Herr Verfasser gerade ein besonderer Anhänger desselben sei — am meisten ausgeprägt hat. „Die Grundgedanken," sagt der Herr Verfasser auf S. 73., „die den Lehrer beim Unterrichte in der Geometrie leiten müssen, beruhen einerseits auf der Forderung der Wissenschaft, dass man in das Wesen und Werden des Gegenstandes eindringt und die wesentlichen Gesetze der Geometrie genetisch ableiten müsse, andererseits auf der Forderung der Pädagogik, dass die Seele in ihrer Totalität als Einheit vom Denken und Anschauen aufgefasst, und namentlich die mathematische Phantasie als das eigentliche Element aller mathematischen Thätigkeit geübt werden müsse," worin wir ganz mit ihm übereinstimmen, aber glauben, dass es verschiedene zu diesem Ziele führende Wege gebe.

Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie von Bernhard Becker, Oberlehrer an der höheren Bürgerschule zu Oldenburg. 8. Frankfurt a. M. 1845. 8 ggr.

Wir halten diesen einfach, aber doch systematisch gegliederten, auf die fortwährende Anschauung und die praktische Anwendung gerichteten Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie, eben für diesen ersten geometrischen Unterricht in den untersten Klassen, also etwa für zehnjährige Knaben, sehr zweckmässig abgefasst, und sind stets der Meinung gewesen, dass dieser erste Unterricht, wenn er einige Frucht tragen soll, vernünftigerweise kaum anders ertheilt werden kann und darf. Für die höheren Klassen von Tertia an machen wir aber andere wissenschaftliche Ansprüche, und halten, wie sehr auch in der vorhergehenden

Digitized by Google

Schrift und in der Vorrede zu der vorliegenden der Verfasser dagegen sprechen mag, eine Methode, die im Wesentlichen sich an die griechischen Muster anschliesst, in den Händen eines tüchtigen Lehrers für diejenige, welche am sichersten zum Ziele führt, und für die gesammte wissenschaftliche Bildung der Schüler unter allen Umständen die meiste Frucht bringt. Von den Schätzen, welche uns die sogenannte neuere Geometrie darbietet, kann und muss man auch bei der Anwendung dieser Methode allen nur möglichen Gebrauch machen, worauf in diesem Archive schon mehrmals hingewiesen worden ist. Mehrere in demselben mitgetheilte Aufsätze, z. B. von Arndt, Schlömilch u. A., arbeiten darauf hin, und besonders sind den Lehrern, die nicht auf die Quellen zurückgehen wollen, auch die bis jetzt erschienenen, ebenfalls im Wesentlichen in Euklidischem Geiste abgefassten drei Schriften von Adams über die Transversalen, über die harmonischen Verhältnisse und über das Dreieck zu empfehlen, in denen schon ein sehr reiches Material niedergelegt ist. Auch verdient von Neuem auf das im Literar. Berichte. Nr. III. S. 53. angezeigte Schriftchen von R. Wolf, ferner auf die Lehrbücher der Geometrie von Kunze, Müller, Bretschneider u. A. aufmerksam gemacht zu werden.

Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Von C. Adams. Mit zwei Kupfertafeln. Winterthur. 1846. 8. 1 Rthlr. 6 ggr.

Diese Schrift kann als eine Fortsetzung der beiden in Nro. XV. S. 230. und Nro. XXIII. S. 350. des Literarischen Berichts angezeigten Schriften desselben Verfassers über die Lehre von den Transversalen und über die harmonischen Verhältnisse betrachtet werden, und hat auch ganz denselben, namentlich am letzteren Orte ausführlich von uns angegebenen, sehr löblichen Zweck, worüber wir uns daher hier nicht weiter zu verbreiten brauchen. Dieselbe ist in fünf Abschnitte getheilt, welche die folgenden Ueberschriften führen: Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks. Der umschriebene und die vier berührenden Kreise. Die Höhenperpendikel. Die Distanzen der wichtigsten Punkte im Dreieck. Aufgaben. — Die Darstellung ist überall dem Gegenstande völlig angemessen: einfach, deutlich und klar. Die Einmischung der Trigonometrie ist ganz vermieden worden, was nur völlig gebilligt werden kann. Eben so zweckmässig erscheint es bei einer Schrift, wie die vorliegende, dass die Lehrsätze und Aufgaben von einander getrennt worden sind. Jeder Lehrer wird in derselben ein reiches Material von Sätzen finden, von denen er auch häufig sehr zweckmässige Anwendungen als Uebungsaufgaben machen können wird.

Anger: über den Einfluss der Projektionslehre auf die neuere Geometrie. Danzig. 1845. $4\frac{1}{2}$ ggr.

Jacobs: ausführliches Lehr- und Uebungsbuch der Anfangsgründe der ebenen analytischen Geometrie. Braunschweig. 1845. 1 Rthlr. 16 ggr.

Digitized by Google

Praktische Geometrie.

Heusinger, K. L.: Abhandlungen aus dem Gebiet der Feldmesskunst. Friedberg. 1845. 18 ggr.

Bourns, C.: Principles and Practise of Land Engineering, Trigonometrical, Subterraneous and Marine Surveying, with an Appendix. 2d. edition 1845. 15 s.

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1844. Nro. 26. Nr. 36—38. findet man interessante Notizen zur Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von Herrn Rudolf Wolf. Nro. 36—38. betreffen vorzüglich die von Johann Georg Tralles in den Jahren 1788 bis 1798 ausgeführten Arbeiten. In dem ersteren Jahre maass er eine Standlinie bei Thun. Eine zweite Basis maass er vom 5. bis 13. September 1791 mit einer Ramsden'schen Stahlkette von 100 Pariser Fuss auf dem grossen Moose bei Aarberg zur Belehrung und auf Kosten seines Schülers Hassler, welcher, 1770 zu Aarau geboren, am 21. November 1843 als Chef der amerikanischen Küstenvermessung starb. Durch das Einrücken der Franzosen in Bern im März 1798 wurden die ganzen Arbeiten unterbrochen, und erst in den Jahren 1801 und 1802 dachte man daran, sie durch Tralles fortsetzen zu lassen. Aber bald brach die Helvetik zusammen, der ängstliche Tralles flüchtete nach Neuenburg und kehrte nicht wieder (s. oben S. 412.).

Die erste Periode der Vermessungsarbeiten in der Schweiz schloss sich somit ohne grosse Resultate; aber das eine Verdienst bleibt ihr, das Bedürfniss geweckt zu haben und so die Mutter aller folgenden Arbeiten in diesem Fache geworden zu sein.

Der Herr Verfasser dieser Notizen verdient alle Aufmunterung, dieselben bis zu den neuesten Zeiten, wo bekanntlich so grosse und ausgezeichnete geodätische Operationen in der Schweiz ausgeführt worden sind (m. s. z B. Literar. Bericht Nro. II. S. 32.), fortzusetzen.

Lehrbuch der höhereu Geodäsie von Dr. Philipp Fischer, Lehrer der praktischen Geometrie und Mathematik an der Gewerbschule zu Darmstadt. Erster Abschnitt. Enthaltend: die Theorie der Beobachtungsfehler und ihre Ausgleichung durch die Methode der kleinsten Quadrate. Darmstadt. 1845. 8. 20 ggr.

Diese Schrift ist nichts mehr und nichts weniger als ein bei Weitem dem grössten Theile nach ganz wörtlicher Auszug aus Encke's, wie wir wenigstens meinen sollten, unter allen Leuten von Fach sehr bekannt gewordenen *) Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate in den Jahrgängen 1834, 1835,

*) Der Herr Verfasser scheint freilich nach S. VI. der Vorrede das Gegentheil zu glauben.

Digitized by Google

1836 des Berliner astronomischen Jahrbuchs, mit verschiedenen nicht selten ziemlich willkührlichen und dem richtigen Verständniss eben keinen Vorschub leistenden Auslassungen, und einigen Zusätzen aus ein Paar kleineren Aufsätzen von Bessel und Jacobi, also, wie wir leider nicht anders sagen können, eine ganz unselbstständige Arbeit. Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie kommt auch fast gerade nur das vor, was sich darüber in Encke's Abhandlung findet, und von einem Verhältniss seiner (d. h. des Herrn Verfassers) Arbeit zu der in Nro. XII. S. 183. des Literarischen Berichts angezeigten, nun wohl, wie wir wenigstens hoffen und wünschen, bekannt genug gewordenen trefflichen Schrift Gerlings über denselben Gegenstand, welche, wie jeder Kundige weiss und bei näherer Ansicht sogleich finden wird, als das nicht leicht zu gewinnende Resultat einer langjährigen geodätischen Praxis zu betrachten ist, kann daher gar keine Rede sein, wie ausführlich sich der Herr Verfasser auch in der Vorrede über ein solches Verhältniss verbreiten mag. Wenn der Herr Verfasser aber in der Vorrede S. VI. sagt, dass er ohne die ihm durch Encke's Abhandlung gewährte Erleichterung gar nicht im Stande gewesen sein würde, etwas so ziemlich Vollständiges, und jedenfalls nicht in der Kürze der Zeit, welche er auf seine Arbeit verwenden konnte, zu liefern, so können wir ihm darin nach der vorliegenden Probe nur vollkommen beistimmen.

Kolbe, F.: Sehnentafel, enthält die zur Bestimmung aller Winkel von 0° bis 180° von Minute zu Minute erforderlichen Sehnen für den Halbmesser = 100. Halberstadt. 1845. 4. 8 ggr.

Trigonometrie.

Lauteschläger: Trigonometrische Aufgaben mit vollständigen Auflösungen. Ein Hülfsbuch für Lehrer der Physik. Darmstadt. 1845. 16 ggr.

Mechanik.

Migout und Bergery: theoretisch praktische Anleitung zur Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen. Deutsch von Schnuse und W. Bornhardt. Braunschweig, 1845. 2 Rthlr. 16 ggr.

Digitized by Google

Optik.

In dem Literarischen Berichte Nro. XIII. S. 200. ist über die optischen Arbeiten des Herrn Professors Joseph Petzval in Wien Bericht erstattet worden. Seit jener Zeit ist über den weiteren Fortgang dieser Arbeiten uns nur erst vor ganz kurzer Zeit eine aus der Wiener Zeitung vom 11. December 1845 entlehnte Nachricht zugegangen, welche wir den Lesern des Archivs, denen wohl nicht allen die genannte Zeitung zu Gesicht kommen dürfte, im Folgenden mittheilen:

„Wissenschaftliche Nachrichten."

„Schon im Jahre 1843 setzte ich das wissenschaftliche Publicum in einer Schrift, betitelt: „Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischen Untersuchungen" in Kenntniss von den unter meiner Leitung stehenden optischen Arbeiten, und versprach darin, wenigstens einige der, die vornehmsten optischen Gebilde: Fernrohr, Mikroskop, Camera obscura, angehenden Berechnungen praktisch ausführen zu lassen, und über die Eigenthümlichkeiten dieser Linsen-Combinationen einen Bericht hinzuzufügen. — Der Ausführung dieses Vorhabens stemmten sich jedoch mancherlei unvorhergesehene Schwierigkeiten entgegen, und ich bin erst jetzt im Stande meinem Versprechen nachzukommen, wünsche jedoch für diese Verzögerung das Publicum dadurch schadlos zu halten, dass ich, den Aufschwung eines edlen Industriezweiges in Oesterreich als Zweck stets im Auge behaltend, nicht nur Sorge trage für die immer gleiche Güte und wo möglich Veredlung der unter meiner Leitung zu Stande kommenden Erzeugnisse, sondern auch von nun an Einfluss nehme auf die Billigkeit der Preise, in so fern wenigstens, als solche mit der Gediegenheit der Arbeiten vereinbar ist. Die hierauf abzielenden Massregeln sind bereits getroffen, und ich habe als zu denselben gehörig nur noch hinzuzufügen: dass ich selbst das Publicum in einfacher und präciser Sprache bei jedem unter meiner Leitung ausgeführten optischen Instrumente in Kenntniss zu setzen gesonnen bin von dem Zwecke, den Eigenschaften und Leistungen desselben, welche Letztere, so oft diess thunlich ist, ohne der Verständlichkeit Eintrag zu thun, genau bestimmt, und in Zahlen ausgedrückt werden sollen; dass ferner (um dem Missbrauche meines Namens vorzubeugen) nur diejenigen Instrumente oder Apparate als nach meiner Angabe ausgeführt zu betrachten seien, die ich in geeigneter Art als solche anerkenne.

Als ersten der auszuführenden Gegenstände habe ich einen solchen gewählt, der einerseits keines grossen mechanisch-optischen Etablissements bedarf, und doch andererseits sich als der interessanteste und edelste der Optik beurkundet, durch seine besonderen Eigenschaften sowohl als auch durch den Umstand, dass er Tugenden eines optischen Instrumentes: Schärfe, Lichtstärke, Gesichtsfeld, die die Anderen nur theilweise benöthigen, seiner Natur nach im vollsten Maasse besitzen muss. Ich meine das Lampen- oder Hydrooxygen-Gas-Mikroskop. Hiermit ist aber

Digitized by Google

unzertrennlich das optische Beleuchtungs-Problem verknüpft, so dass zu gleicher Zeit dieses einer befriedigenden Lösung entgegengeführt werden musste. — Auch hegte ich die Absicht, gleichzeitig die theoretischen Resultate meiner mehrjährigen Untersuchungen zu veröffentlichen. — Allein diesem Vorhaben trat jedoch eine schwere Krankheit, an deren Folgen ich noch leide, hindernd in den Weg, und ich sehe mich jetzt genöthigt, dem wissenschaftlichen Publicum einstweilen dasjenige, was wirklich fertig geworden ist, zu übergeben, nämlich den Beleuchtungsapparat mit einem mikroskopischen Objective grösserer Art. Es ist dieser Beleuchtungsapparat als solcher ein selbstständiges Ganzes, und geeignet zu verschiedenen, dem in photographischer oder optischer Technik Bewanderten leicht einleuchtenden, Anwendungen, unter anderen auch zur Erzeugung der sogenannten Nebelbilder. Ich hoffe, ja ich bin überzeugt davon, dass, gleichwie das von mir angegebene Daguerreotypen-Objectiv zu mehreren nützlichen Entdeckungen die erste Veranlassung wurde, auch dieser Apparat zu neuen Fortschritten in mehreren Kunst- und Industriezweigen, namentlich im Gebiete der technischen Beleuchtungs-Industrie, Gelegenheit geben wird, welche Fortschritte ihrerseits wieder der Wissenschaft zu Gute kommen werden. Obwohl ich nun diesen Apparat als das erste Glied eines wissenschaftlichen Werkzeuges, nämlich der Lampen-Mikroskope, betrachte, so empfängt doch in ihm das Publicum ein Instrument, welches zur Verschönerung jedes socialen Lebens vorzüglich geeignet ist.

Die Ausführung dieser Apparate ist dem Herrn Optiker Waibl (Mariahilfer Hauptstrasse Nr. 40.) übertragen. Er besteht wesentlich aus zwei Theilen, dem bildmachenden und beleuchtenden. Ersterer muss die Eigenschaft haben, von dem abzubildenden Gegenstande ein-achromatisches, genügend scharfes und perspectivisch richtiges Bild zu liefern, d. h. eine gerade Linie an keiner Stelle des Gesichtsfeldes in eine krumme zu verwandeln. Der Andere soll die Eigenschaft haben, nicht etwa Licht zu erzeugen, — wie keine Maschine Kraft erzeugt, — sondern das von irgend einer Lichtquelle, etwa einer Lampe, ausströmende Licht auf das zweckmässigste zu verwenden, und eben dadurch gewissermassen zu vervielfältigen. — Der Quantität nach hängen nun die Leistungen eines solchen Apparates von den Dimensionen desselben ab; der kleinste derjenigen, die bei Herrn Waibl verfertigt werden, hat die Eigenschaft, das Licht einer Lampe, bei welcher der Durchmesser des Brenners einen Zoll nicht überschreitet, zu versechsfachen, oder da bei dieser Grösse die Lampe eine Lichtstärke von etwa 16 Millikerzen besitzt, auf eine dem Apparate gegenüberstehende Wand ein solches Licht zu werfen, wie es von der Stelle aus, wo der Apparat steht, aber ohne denselben 6 Lampen oder 96 Kerzen werfen würden. Mit den Dimensionen des Apparates aber steigt die Lichtstärke desselben im kubischen Verhältnisse, d. h. ein zweimal grösserer Apparat hat achtmal so viel Licht. Verwendet man den Beleuchtungs-Apparat zur Erzeugung von Nebelbildern, so verhält er sich zu den frühern Erzeugnissen dieser Art, wie sich das von mir angegebene Daguerreotypen-Objectiv zu den früheren Erzeugnissen jener Art verhielt: Er leistet nämlich mit der einfachen Oellampe bei gleichen Dimensionen ungefähr dasselbe, was sonst mit dem in Hydrooxygengas glühenden Kalkcylin-

Digitized by Google

der erzeugt wurde, und liefert mit letzterem Effecte, die, wenn man will, der Intensität des Tageslichtes gleich kommen, ja dieselbe überbieten können. — Zudem erfordert die Handhabung dieses Instrumentes weder besondere Geschicklichkeit, noch aussergewöhnliche Vorsicht.

Herr Waibl, der durch ein k. k. ausschliessl. Privilegium geschützt ist, hat diese Apparate in dreierlei Dimensionen verfertigt, und ist bereit, selbe nach Wunsch in jeder beliebigen Grösse zu liefern. Prof. Dr. Jos. Petzval."

Gewiss würde es vielen Lesern des Archivs angenehm sein, auch die Preise der Apparate, auf welche in der vorhergehenden Anzeige aufmerksam gemacht worden ist, kennen zu lernen, weshalb wir uns erlauben, Herrn Prof. Petzval oder Herrn Waibl hier um deren gefällige Mittheilung zu ersuchen, und werden dann nicht unterlassen, dieselben in diesem Literarischen Berichte zu allgemeiner Kenntniss zu bringen.

Astronomie.

Biot: Traité élémentaire d'astronomie physique. Tom. III. Paris. 1845.

Karsten: kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1846. Rostock. 1845. 8. ggr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte, und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. Drei und zwanzigster Theil. Neuer Folge Dritter Band. Mit drei lithographirten Beilagen. 4. Wien. 1845.

Der Inhalt dieses Bandes ist folgender: Beobachtung der Sonnenfinsterniss vom 8. Juli 1842 zu Oedenburg in Ungarn. Von Herrn Dr. C. Bremiker. — Meteorologische und astronomische Beobachtungen, angestellt zu Prag in den Jahren 1828—1832 von Herrn F. C. Hallaschka, Probst zu Alt-Bunzlau, k. k. wirkl. Hofrath und Director der philosophischen Studien. — Facsimile einer Handschrift von Johann Kepler. — Facsimile eines Fragments aus P. M. Hell's astronomischem Tagebuche auf Wardoe. — Beschreibung des neuen Regulators am Uhrwerke des Refractors und einer Einrichtung zum Einstellen am Stundenkreise bei fortwährendem Eingriffe der Uhr. Von Herrn Chr. Starke, leitendem Werkmeister am k. k. polytechnischen Institute in Wien. — Resultate der Planeten-Beobachtungen am Meridiankreise im Jahre 1842. — Reducirte Beobachtungen des Mondes am Meridiankreise im Jahre 1842. — Beobachtete Mondsterne 1842. — Resultate der Planeten-Beobachtungen am Meridiankreise im Jahre 1843. — Reducirte Beobachtungen des Mondes am Meridiankreise im Jahre 1843. —

Digitized by Google

Beobachtete Mondsterne 1843. — Sternbedeckungen beobachtet in den Jahren 1843 und 1844. — Berichtigung. — Beobachtungen am Meridiankreise. — Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1843. — Verzeichniss der Werke, welche der k. k. Sternwarte vom September 1843 bis Ende 1844 als Geschenke zugekommen sind. — Verzeichniss der Anstalten des Auslandes, welche alljährlich mit einem Exemplare der Annalen betheilt werden. — Preis-Tarif der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts zu Wien. — Preis-Tarif von Herrn S. Plössl.

Man wird hieraus den reichen Inhalt dieses Bandes und den Eifer und die Umsicht, womit die Herren Herausgeber der Sternwarte zu Wien vorstehen, erkennen.

Physik.

Gehlers physikalisches Wörterbuch. II. Bd. Sach- und Namenregister mit ergänzenden Zusätzen v. G. W. Muncke. Nebst Nachtr. zu dem Verz. geogr. Ortsbestimmungen von C. L. v. Littrow. Leipzig. 1845. 4 Rthlr.

Littrow, C. L. v.: Nachträge zu dem Verzeichniss geogr. Ortsbestimmungen. Leipzig. 1845. 4 ggr.

Notice sur l'art aérostatique par un aéronaute. Lille. 1845.

Herger, die Systeme der magnetischen Curven, Isogonen und Isodynamen nebst anderweitigen empirischen Forschungen über die magnetisch-polaren Kräfte. Erläutert von Ernst Herger. 2—4te Lief. mit 22 Taf. Leipzig. 1845. 9 Rthlr. (S. Literar. Bericht Nro. XXII. S. 343.)

Pohl: der Elektromagnetismus und die Bewegung der Himmelskörper in ihrer gegenseitigen Beziehung. Breslau. 1846. 18. ggr.

Die periodisch wiederkehrenden Eiszeiten und Sindfluthen und die wichtigsten Folgerungen aus diesen wechselnden Ueberschwemmungen der südlichen und nördlichen Kontinente von W. v. Bruchhausen. 8. Trier. 1845. 1 Rthlr.

Vermischte Schriften.

J. J. v. Littrow's vermischte Schriften. Herausgegeben von C. L. v. Littrow, Director der Sternwarte zu Wien. Drei Bände. Erster Band. Stuttgart. 1845. 8. 1 Rthlr. 18 ggr.

Digitized by Google

Mit dieser Sammlung der vermischten Schriften seines verstorbenen Vaters hat Herr Director C. L. v. Littrow gewiss vielen Lesern ein sehr angenehmes Geschenk gemacht. Ausser mehreren anderen Aufsätzen enthält dieser erste Band auch Manches, was von allgemeinem mathematischen und physikalischen Interesse ist und unter den populären Schriften dieser Art immer eine vorzügliche Stelle einnehmen wird, da J. J. v. Littrow's Talent für wahrhaft populäre Darstellungen bekannt genug ist. Wir erlauben uns die Leser in dieser Beziehung nur auf Folgendes aufmerksam zu machen: Unrichtigkeit der christlichen Zeitrechnung. Der Winter. Ueber das Nordlicht. Witterung des Cholerajahres 1831. Regulirung der öffentlichen Uhren. Wittwen-Institute im Allgemeinen. Ueber eine Verbesserung der Fernröhre durch einen vaterländischen Künstler (ein sehr klar geschriebener Aufsatz über Fernröhre im Allgemeinen, namentlich aber über das achromatische Fernrohr und das dialytische Fernrohr insbesondere). — Die mitgetheilten Recensionen sind immer selbst gemeinverständliche Aufsätze über die betreffenden Gegenstände, namentlich die folgenden hierher gehörenden: Babbage, Economy of Machinery. Babbage, on the Decline of science in England. Brewster, the life of Newton. Brewster, natürliche Magie. Garthe, Heiligenschein. — Wir sehen der Fortsetzung dieser Sammlung mit Verlangen entgegen.

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. New Haven. (S. Literar. Bericht Nro. XXVII. S. 407.)

Vol. XLIX. 1845. Nro. I. Art. II. Account of some new Articles of Philosophical Apparatus; by Prof. E. S. Snell. p. 20. — Art. VIII. Singular case of Parhelion, with a statement of the Theory of ordinary Halos; by Prof. E. S. Snell. p. 73. — Art. XI. Practical observations on the Generation of Statical Electricity by the Electrical Machine; by Lieut. George W. Rains, U. S. A. p. 93. — Art. XIV. New Electro-Magnetic Engine; by Prof. Char. G. Page. p. 131. — Art. XV. Axial Galvanometer, and Double Axial Reciprocating Engine; by Prof. Charles G. Page. p. 136. — Art. XVI. Report of Observations on the Transit of Mercury, Mai 8th., 1845; by Prof. Olmsted. p. 142.

Druckfehler.

Thl. VII. Heft IV. S. 348. muss die Nummer der Abhandlung nicht LX, sondern „XL“ heissen.

Digitized by Google

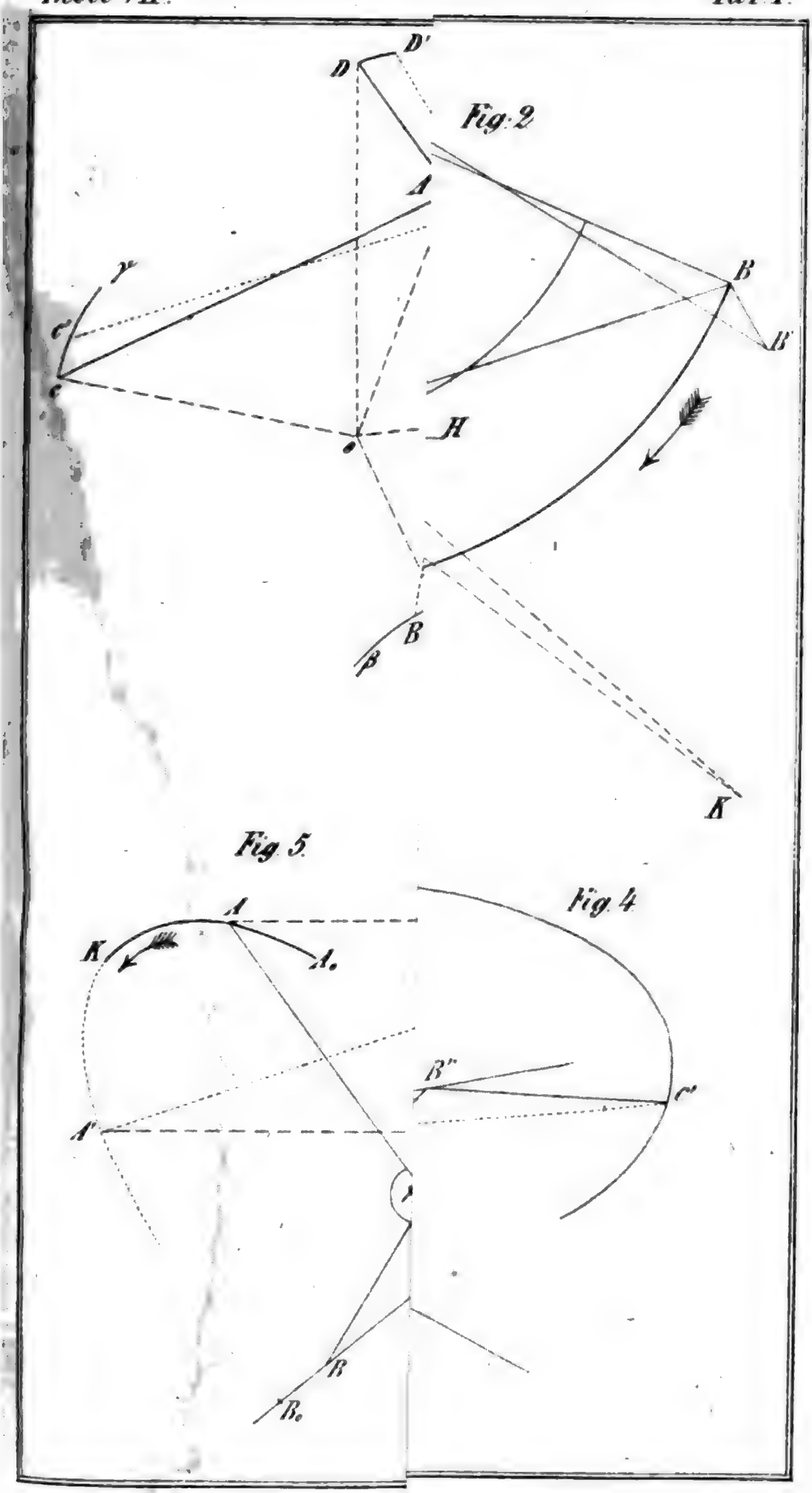
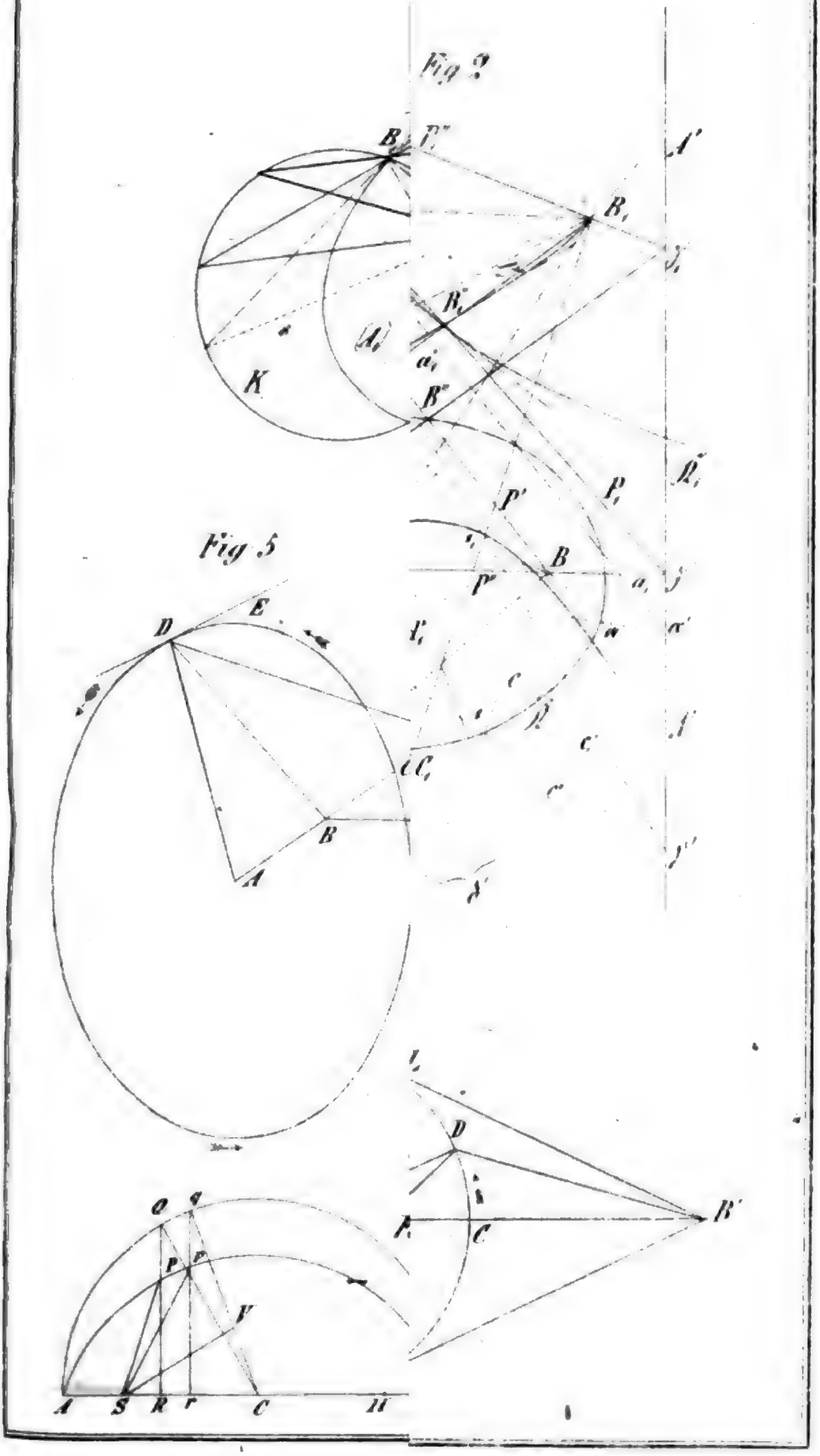


Fig. 2
D
D'
A
γ
c'
c
o
H
B
B'
B
β
K
Fig. 5.
A
K
A₀
A'
B
B₀
Fig. 4
B''
C'

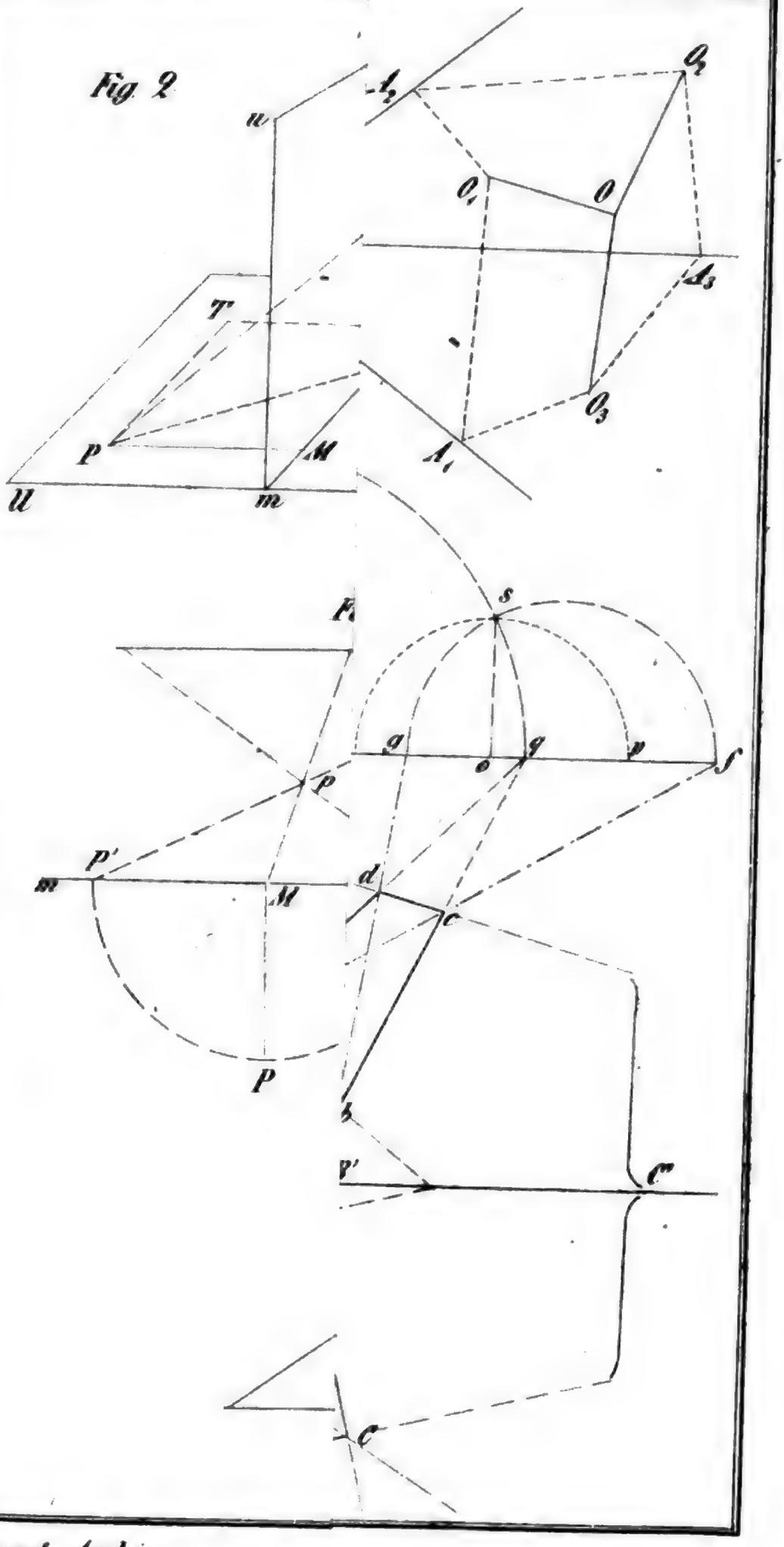
Digitized by Google



Grunert Archiv.

Digitized by Google

Fig. 2



Grunert Archiv.

Digitized by Google

Taf IV.

Fig. 1.

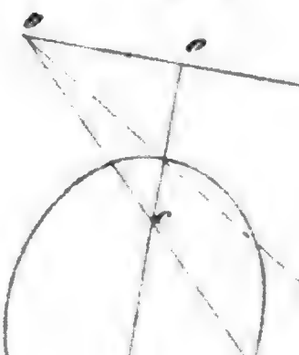


Fig. 7.

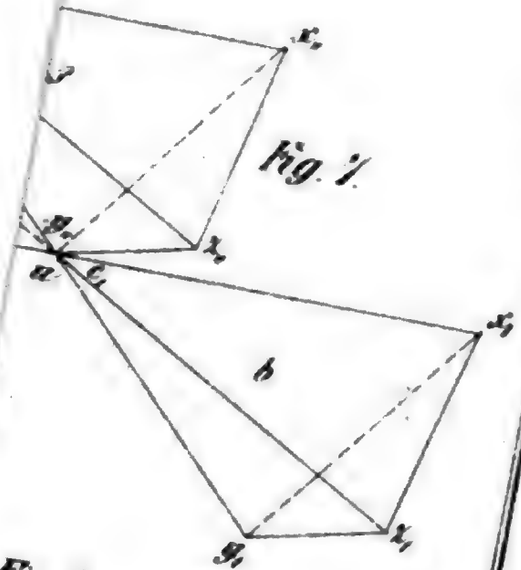


Fig 8.

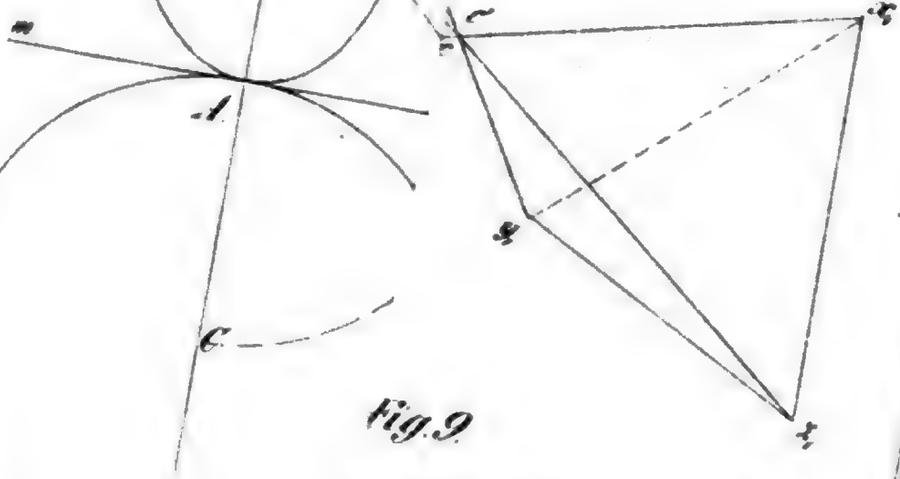
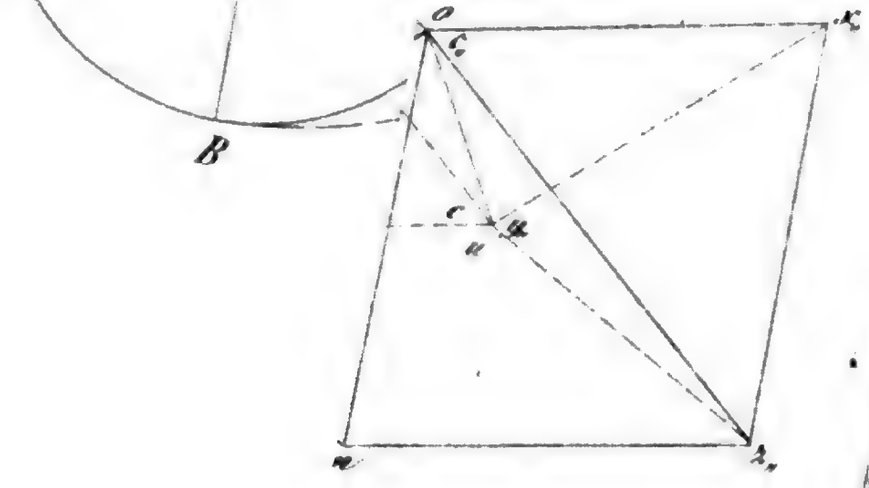


Fig. 9.



Digitized by Google

Fig. 1

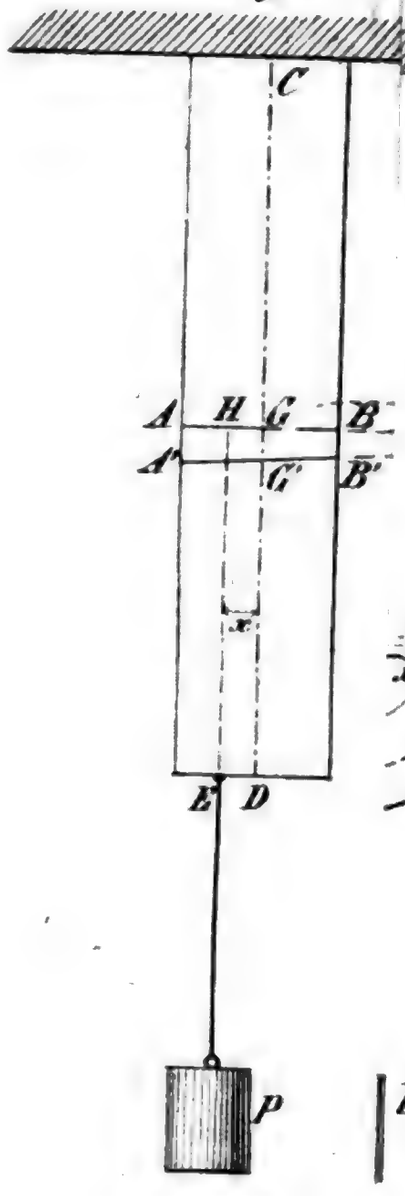


Fig. 3

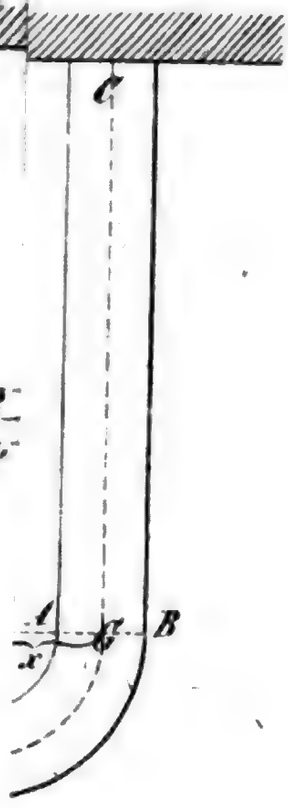


Fig. 4

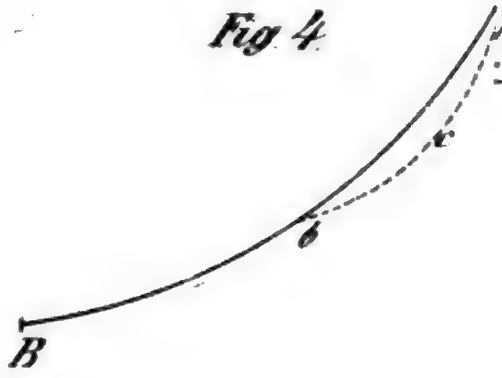
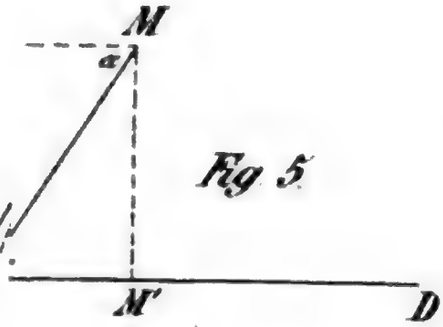


Fig. 5



Digitized by Google

Digitized by Google

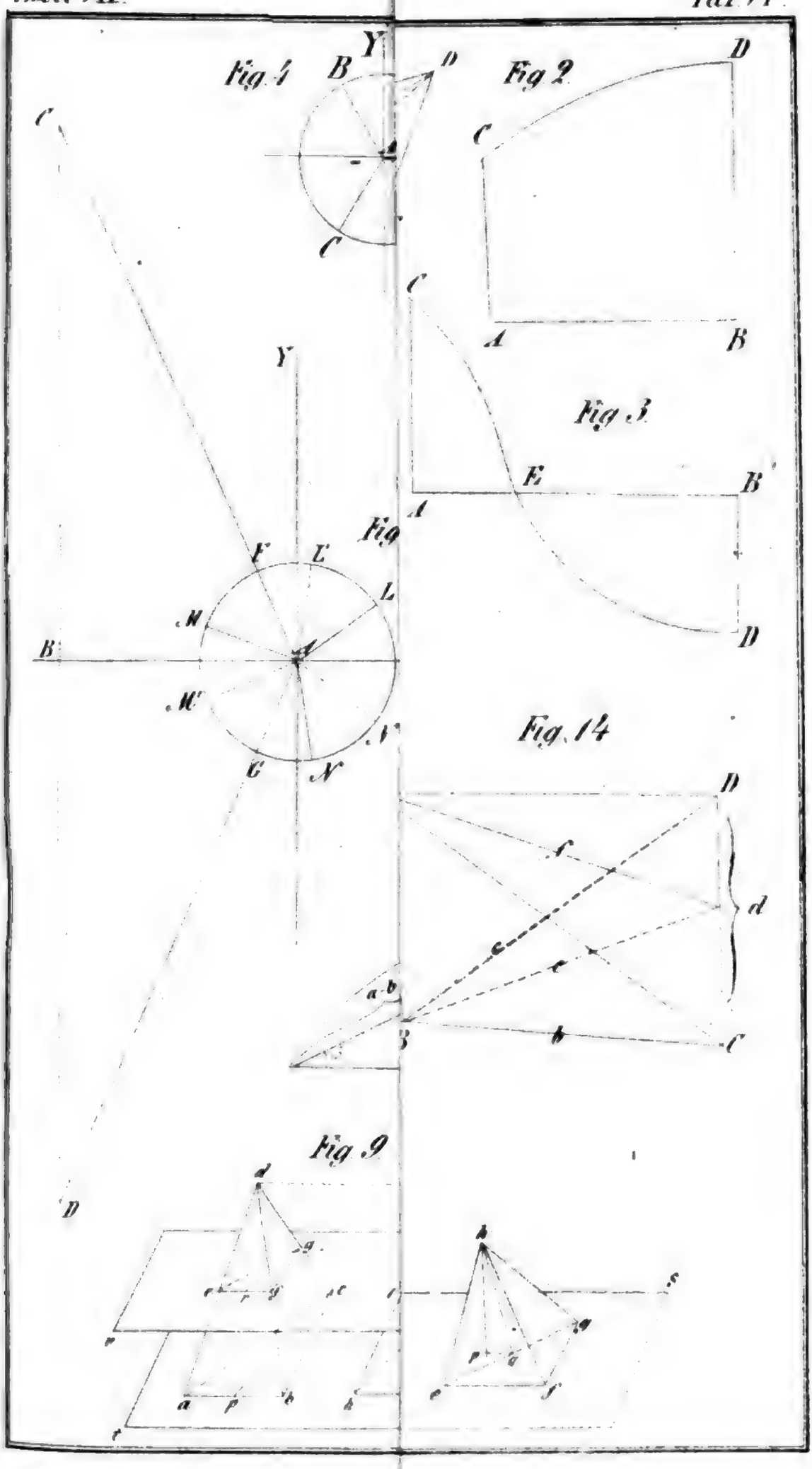


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 14
Fig 9

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Achter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.

Verlag von C. A. Koch.

1846.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des achten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Abgekürztes Verfahren bei der Kubikwurzelausziehung. Von dem Herrn Schulrath J. H. T. Müller, Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden	I.	46
V.	Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten. Von dem Herausgeber	I.	65
VI.	Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch. Von Herrn P. Seeling, Elementarlehrer zu Hückeswagen im Regierungsbezirk Düsseldorf	I.	69
X.	Auszug aus einem Schreiben des Herrn Schulrath J. H. T. Müller, Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden, an den Herausgeber. (Ueber Kramp's Behandlungsweise der Auflösung der cubischen Gleichungen.)	I.	107
XI.	Ueber die Theorie der Proportionen. Von dem Herrn Dr. Lehmann zu Berlin	II.	113
XII.	Ueber die Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann. Von dem Herausgeber	II.	137
XIV.	Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes. Nach der Abhandlung: Note sur la formule de Taylor par M. J. Caqué in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Liouville. Octobre 1845. p. 379. frei bearbeitet von dem Herausgeber	II.	166
XXV.	Das Binomialtheorem, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis dargestellt. Von dem Herausgeber	III.	272
XXXIII.	Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}$. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena	IV.	357
XXXVI.	Bemerkungen zu den im Archiv Thl. VIII. Heft 2. p. 213—214 von Herrn Dr. Dienger aufgestellten Theoremen I—V. Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	383
XXXVII.	Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände. Versuch einer genetischen Entwickelung der analytischen Reihe. Von dem Herrn Dr. Barfuss zu Weimar	IV.	387
XL.	Note sur la convergence des séries. Par Monsieur C. J. Malmsten, Profess. des Math. à Upsal	IV.	419
XLI.	Ueber die höheren Differenzialquotienten beliebiger Funktionen des Logarithmus. Von dem Herrn Prof. Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena	IV.	427
XLIII.	Zur Abhandlung Nr. XLVII. in Thl. VII. S. 430. des Archivs. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	IV.	450

Geometrie.

I.	Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projektivischer Gebilde. Von Hrn. Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	I.	1
III.	Verschiedene mathematische Bemerkungen. Von dem Herrn Professor Dr. Stegmann an der Universität zu Marburg	I.	49
	I. Ueber die mechanische Construction der Lemniscate		49

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	II. Ueber die sogenannte Neoide		53
	III. Ueber die Nabelpunkte auf dem Ellipsoid		55
IV.	Bestimmung der grössten in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse. Von Herrn Wilh. Mösta, Stud. der Math. zu Marburg	I.	59
X.	Bemerkung zu der Aufgabe des Herrn A. Ritman. Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover	I.	110
XV.	Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt	II.	174
XVI.	Ueber einen Satz der analytischen Geometrie. Von dem Herausgeber	II.	194
XIX.	Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes. Von dem Herrn Prof. Dr. Hessel zu Marburg	II.	215
XIX.	Aufgabe. Von Demselben	II.	217
XIX.	Ueber die acht Kreise, von denen die drei Kreise, welche sich über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreiben lassen, berührt werden	II.	217
XIX.	Anzahl der Diagonalen eines Polyeders . . .	II.	221
XXI.	Ueber plagiographische Projection. Von dem Herrn Professor Dr. Anger in Danzig . .	III.	235
XXVII.	Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie. Von dem Herrn Professor Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	III.	320
XXIX.	Zu Archiv Thl. V. S. 430. Von dem Hrn. Director Nizze am Gymnasium zu Stralsund	III.	335
XXXI.	Analytische Behandlung einiger die Linien zweiten Grades betreffenden Gegenstände. Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	342
XXXIV.	Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie. Von dem Hrn. Prof. Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.	365
XXXV.	Ueber die Toroide. Nach einigen Aufsätzen der Herren Breton (De Champ), Terquem, Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Ter-		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	quem et Gerono. T. III. Paris. 1844. frei bearbeitet von dem Herausgeber	IV.	375
XXXVIII.	Ein neues Theorem von den Linien des zweiten Grades. „Die Quadratsumme der reciproken Werthe zweier auf einander senkrechten Durchmesser bei einem Kegelschnitt (Ellipse und Hyperbel) ist constant, nämlich bei der Ellipse der Quadratsumme, bei der Hyperbel der Quadratdifferenz der reciproken Werthe der Axen gleich.“ Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund	IV.	395
XXXIX.	Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel. Von dem Herrn Professor Dr. Wilh. Matzka zu Tarnow in Galizien	IV.	400
XLIII.	Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Von Herrn R. Hoppe, Lehrer der Mathematik zu Keilhau bei Rudolstadt . .	IV.	450
	Trigonometrie.		
X.	Berichtigung. Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin	I.	111
	Geodäsie.		
XXII.	Ueber den Distanzmesser mit Parallelfäden. Von dem Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff an der höheren Bürgerschule zu Mannheim	III.	250
XXIII.	Ueber Distanzmesser. Von dem Herausgeber	III.	254
XXXII.	Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte. Von dem Herausgeber	IV.	353
XLII.	Ueber eine geodätische Aufgabe. Von dem Herausgeber	IV.	433
	Mechanik.		
XIII.	Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie. Von dem Herrn		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Dr. O. Schlömilch, Professor an der Universität zu Jena	II.	157
XVII.	Ueber die Schwingungen eines kleinen Körpers, der an einem elastischen Körper befestigt ist. Von dem Herrn Dr. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg .	II.	205
XX.	Ueber die beste Construction horizontal belasteter Gewölbe. Von dem Herrn Reallehrer Brenner zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg	III.	225
XXIV.	Kriterium der Stabilität schwimmender Körper. Von Hrn. R. Hoppe, Lehrer der Mathematik in Keilhau bei Rudolstadt	III.	268
XXX.	Näherungswerth der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms. Von dem Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff an der höheren Bürgerschule zu Mannheim	IV.	337
	Astronomie.		
VII.	Ueber gewisse bei einer besonderen Klasse astronomischer Aufgaben häufig in Anwendung kommende Gleichungen. Von dem Herausgeber	I.	88
VIII.	Ueber eine astronomische Aufgabe. Von dem Herausgeber	I.	99
	Physik.		
XXVI.	Beitrag zu der Lehre von den Farben. Von dem Herrn Dr. Botzenhart, Assistenten der Physik am k. k. polytechnischen Institut zu Wien	III.	318
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XIX.	Ueber Fermat	II.	223
	Uebungs-Aufgaben für Schüler.		
IX.	Vermischte Aufgaben	I.	105
XVIII.	Vermischte Aufgaben	II.	212

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XVIII.	Aufgaben von dem Herrn Oberlehrer Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt .	II.	213
XVIII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bügerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	II.	213
XXVIII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. A. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle . .	III.	334
	Berichtigungen	IV.	452

Literarische Berichte*).

XXIX.	. . . . .	I.	425
XXX.	. . . . .	II.	445
XXXI.	. . . . .	III.	457
XXXII.	. . . . .	IV.	469

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Fortsetzung der Abhandlung Theil VII. Nr. XIII.)

Die Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität.

§. 19.

Man denke sich wieder in der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlbüschel B, B' oder zwei Gerade A, A', und in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1 oder zwei Gerade A_1, A'_1 gegeben; es seien der Reihe nach $a, b, c, d, e \ldots$ und $a', b', c', d', e' \ldots$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots$ und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}' \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1 \ldots$; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots$ und $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1 \ldots$ diejenigen Strahlen- und Punktenpaare dieser Gebilde, welche resp. durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \ldots$; die beliebigen Geraden $a, b, c, d, e \ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}$, und durch die beliebigen Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1 \ldots$ und die beliebigen Geraden $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots$ der Ebene $\mathfrak{E}_1$ bestimmt werden oder diese selber erst bestimmen; und zwar seien e, e'; $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$; e_1, e'_1; $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_1$ diejenigen zwei Elemente dieser vier Paar Gebilde, welche jedesmal mit dem gemeinschaftlichen Strahle oder Durchschnitte derselben zusammenfallen. Sind nun die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch irgend zwei dieser vier Paar Gebilde dergestalt auf einander bezogen, dass entweder

Digitized by Google

$\alpha)$ $B\,(a, b, c, d, e\ldots) = B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots)$ und
$B'\,(a', b', c', d', e'\ldots) = B'_1\,(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1\ldots)$; oder

$\beta)$ $A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}\ldots) = A_1\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1\ldots)$ und
$A'\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}'\ldots) = A'_1\,(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1, \mathfrak{e}'_1\ldots)$; oder aber

$\gamma)$ $B\,(a, b, c, d, e\ldots) = A_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\ldots)$ und
$B'\,(a', b', c', d', e'\ldots) = A'_1\,(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1\ldots)$ ist,

indem das den Gebilden der einen Ebene gemeinschaftliche Element dem den Gebilden der anderen Ebene gemeinschaftlichen Elemente entspricht; so wird die neue Art geometrischer Verwandtschaft, in welche hierdurch die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und die Systeme ihrer Elemente treten, im Falle $\alpha)$ und $\beta)$ mit dem Namen der Collineation, und im Falle $\gamma)$ mit dem der Reciprocität bezeichnet; und man sagt: diese Ebenen und Systeme sind collinear- oder reciprokverwandt.

Aus dieser Definition und dem in Nro. XXX. des 4ten Theils des Archivs. Einl. 5. entwickelten Satze ergibt sich nun auf den ersten Anblick das bekannte Theorem:

1. Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar aufeinander folgende collinear- oder reciprok-verwandt, so ist eine jede derselben mit einer jeden, und namentlich auch die erste mit der letzten collinear- oder reciprokverwandt.

Noch mehr: denkt man sich in jener Reihe von Ebenen je zwei unmittelbar auf einander folgende geometrisch verwandt überhaupt, aber so, dass das Hauptdreieck einer jeden Ebene nicht nur dem Hauptdreiecke der ihr vorangehenden, sondern auch dem der ihr nachfolgenden Ebene zugeordnet ist — was im Allgemeinen nicht nothwendig ist, indem eine jede Ebene in Bezug auf die vorangehende und die nachfolgende zwei verschiedene Hauptdreiecke haben kann — und sind z. B. der Reihe nach P, P', P''; P_1, P'_1, P''_1; $B_{II}, B'_{II}, B''_{II}$; $P_{III}, P'_{III}, P''_{III}$; $B_{IV}, B'_{IV}, B''_{IV}$... die zugeordneten Hauptlinien und Hauptpunkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_{II}$, $\mathfrak{E}_{III}$, $\mathfrak{E}_{IV}$...; so werden sich einerseits in den betreffenden Gebilden B, B_1, A_{II}, B_{III}, A_{IV}... die Elemente P'', P'_1, B''_{II}, P'_{III}, B''_{IV}..., andererseits in den Gebilden B', B'_1, A'_{II}, B'_{III}, A'_{IV}... die Elemente P'', P_1, B''_{II}, P_{III}, B''_{IV}... entsprechen; folglich müssen auch in den alternirenden Gebilden B, A_{II}, A_{IV}... die Elemente P'', B''_{II}, B''_{IV}..., und in den alternirenden Gebilden B', A'_{II}, A'_{IV}... die Elemente P'', B''_{II}, B_{II}''... d. h. die den Gebilden der 1ten, 3ten, 5ten... Ebene gemeinschaftlichen Elemente in beider Hinsicht sich entsprechen; und dasselbe gilt von denen der 2ten, 4ten, 6ten....

2. Sind in einer Reihe von Ebenen, in bestimmter Ordnung genommen, je zwei unmittelbar auf einander folgende geometrisch verwandt überhaupt, jedoch so.

Digitized by Google

dass jede dieser Ebenen in Bezug auf die ihr folgende das nämliche Hauptdreieck als in Bezug auf die ihr vorangehende besitzt, so sind je zwei alternirende Ebenen dieser Reihe oder überhaupt je zwei, welche beide zwei Stellen von ungerader oder von gerader Zahl einnehmen, collinear- oder reciprok-verwandt.

§. 20.

Sind die Gebilde B, B' oder A, A' der Ebene $\mathfrak{E}$ projektivisch, so sind auch die Gebilde B_1, B'_1 oder A_1, A'_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ projektivisch, und wenn nun in dem gemeinschaftlichen Elemente der beiden ersteren zwei entsprechende e, e' oder $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ sich vereinigen, so werden den letzteren auch in den beiden anderen Gebilden zwei Elemente e_1, e'_1 oder $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}'_1$, die sich vereinigen, entsprechen müssen. Nun aber bestimmen die Punkte einer jeden Geraden der einen Ebene zwei perspectivische Strahlbüschel B, B', und die Strahlen eines jeden Punktes zwei perspektivische Gerade A, A', und umgekehrt; also folgt:

1.

α. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen ein Punkt der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen.

β. In je zwei collinearen Ebenen entspricht nicht nur einer jeden Geraden der einen eine Gerade der anderen, sondern auch einem jeden Punkte der einen Ebene ein Punkt der anderen.

γ. In je zwei reciproken Ebenen entspricht nicht nur einem jeden Punkte der einen Ebene eine Gerade der anderen, sondern auch einer jeden Geraden der ersteren ein Punkt der zweiten.

2.

α. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte; und einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen.

β. Einem jeden Punkte und dessen Strahlen entspricht wieder ein Punkt und dessen Strahlen; und einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht wieder eine Gerade und deren Punkte.

γ. Einer jeden Geraden und deren Punkten entspricht ein Punkt und dessen Strahlen; und einem jeden Punkt und dessen Strahlen entspricht eine Gerade und deren Punkte.

Digitized by Google

3.

α und β.

In jeder der beiden Ebenen gibt es eine Gerade, welche der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

γ. In jeder der beiden Ebenen gibt es einen Punkt, welcher der unendlich entfernten Geraden der anderen Ebene entspricht.

Eine jede der beiden so eben unter α und β. genannten Geraden soll die Achse der betreffenden Ebene, und ein jeder der beiden unter γ. genannten Punkte soll der Mittelpunkt der Ebene heissen.

4.

α und β.

Die unendlich entfernten Punkte der Achsen beider Ebenen sind entsprechende Punkte.

5.

α und β.

Allen Geraden, welche mit der Achse der einen Ebene parallel sind, entsprechen solche, welche ihrerseits mit der Achse der anderen parallel laufen.

§. 21.

Da in α. je zwei entsprechende Gerade in Ansehung der Punkte, in denen sie von den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 (oder B', B'_1) geschnitten werden, ebenfalls projektivisch sein müssen, und da die Punkte, in denen zwei Paar entsprechende Geraden sich schneiden, entsprechende Punkte sind; so werden auch irgend zwei entsprechende Strahlbüschel — indem man sie sich von irgend zwei entsprechenden Geraden durchschnitten denkt — in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch sein müssen; und ähnlich verhält es sich in β. und γ.

1.

α. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare, und je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch;

β. In zwei collinearen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare, und je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch;

Digitized by Google

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, welches durch irgend vier Punkte a, b, c, d einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{a_1c_1}{b_1c_1} : \frac{a_1d_1}{b_1d_1}$, welches durch die entsprechenden Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 bestimmt wird; und das Doppelverhältniss $\frac{\sin.ac}{\sin.bc} : \frac{\sin.ad}{\sin.bd}$, welches irgend vier Strahlen a, b, c, d eines Punktes bestimmen, ist gleich dem Doppelverhältnisse $\frac{\sin.a_1c_1}{\sin.b_1c_1} : \frac{\sin.a_1d_1}{\sin.b_1d_1}$, welches die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 bestimmen.

γ. Jede Gerade der einen von zwei reciprok-verwandten Ebenen ist mit dem entsprechenden Strahlbüschel der anderen, und jedes Strahlbüschel der ersten ist mit der entsprechenden Geraden der zweiten Ebene — in Ansehung ihrer entsprechenden Elementenpaare projectivisch;

oder:

das Doppelverhältniss $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, welches in irgend einer von beiden Ebenen durch vier beliebge Punkte a, b, c, d einer Geraden bestimmt wird, ist gleich dem Doppelverhältnsse $\frac{\sin.a_1c_1}{\sin.b_1c_1} : \frac{\sin.a_1d_1}{\sin.b_1d_1}$, welches durch die entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 der anderen Ebene bestimmt wird.

Aus diesem Satze und aus der Definition der Collineation und Reciprocität ergibt sich nun sofort:

2.

α. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Strahlbüschel B, B_1 und B', B'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man jene zwei Paar Strahlbüschel 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Strahlbüscheln, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Geraden

β. Ist die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Paar projektivische Gerade A, A_1 und A', A'_1 bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man je zwei Paar Geraden 1) entweder mit zwei beliebigen anderen Paar entsprechenden Geraden, oder 2) mit irgend zwei Paar entsprechenden Strahlbüscheln beider Ebe-

Digitized by Google

beider Ebenen vertauscht, und die entsprechenden Strahlen- oder Punktenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) sind je zwei im Sinne von α. collinear-verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von β. collinear-verwandt.

nen vertauscht, und die entsprechenden Punkten- oder Strahlenpaare derselben als projektivisch entsprechende betrachtet und daher 3) sind je zwei im Sinne von β. collinear verwandte Ebenen zugleich auch im Sinne von α. collinear-verwandt.

γ. Ist die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ durch zwei Strahlbüschel B, B' der ersten und zwei mit denselben projektivische Gerade A_1, A'_1 der zweiten Ebene bestimmt, so bleibt die Beziehung der Ebenen und ihrer sämmtlichen Elemente zu einander unverändert, wenn man 1) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei anderen Strahlbüschel der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Geraden mit den entsprechenden Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$, oder 2) jene zwei Strahlbüschel mit irgend zwei Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ und diese zwei Gerade mit den entsprechenden Strahlbüscheln der Ebene $\mathfrak{E}_1$ vertauscht, und die entsprechenden Elementenpaare der neuen Gebilde als projektivisch entsprechende betrachtet; und daher 3) spielen beide Ebenen in dieser Beziehung zu einander durchaus eine und dieselbe Rolle.

Da nun zwei projektivische Gebilde vollkommen bestimmt sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Elemente derselben gegeben sind, so folgt aus dem letzten Satze:

3.

Die Verwandtschaft der Collineation zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald entweder irgend vier Paar entsprechende Punkte oder irgend vier Paar entsprechende Gerade derselben gegeben sind.

Die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald in einer von beiden Ebenen irgend vier Punkte und in der anderen die denselben entsprechenden Geraden gegeben sind.

Und zwar kann man in zwei Ebenen vier Elementenpaare beliebig annehmen und dann festsetzen, die Ebenen sollen collinear- oder reciprok-verwandt und jene vier Elementenpaare sollen entsprechende sein.

Ist in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend eine Involution von Punkten oder Strahlen gegeben, z. B. ist

$$A(a, b, c, d \ldots a', b', c', d' \ldots) = A'(a', b', c', d' \ldots a, b, c, d \ldots),$$

Digitized by Google

so folgt aus 1. z. B. für collineare Ebenen:

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A(a, b, c, d \ldots a', b', c', d' \ldots)$$
$$= A'(a', b', c', d' \ldots a, b, c, d \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

also

$$A_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = A'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots);$$

u. s. w.

4.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene wieder eine Involution von Punkten oder Strahlen der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptpunkte oder Hauptstrahlen der letzteren, und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene wiederum vier harmonische Punkte oder Strahlen der anderen.

In zwei reciprok-vewandten Ebenen entspricht einer jeden Involution von Punkten oder Strahlen der einen Ebene resp. eine Involution von Strahlen oder Punkten der anderen; den Hauptpunkten oder Hauptstrahlen der ersteren entsprechen die Hauptstrahlen oder Hauptpunkte der letzteren; und daher entsprechen je vier harmonischen Punkten oder Strahlen der einen Ebene vier harmonische Strahlen oder Punkte der anderen.

Da zwei projektivische Gerade ähnlich sind, wenn deren unendlich entfernte Punkte sich entsprechen, so folgt aus 4. des vorigen Paragraphen und aus 1. des jetzigen:

5.

In zwei collinear-verwandten Ebenen sind je zwei entsprechende Gerade, welche mit den Achsen parallel laufen, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich.

§. 22.

Man denke sich in einer von zwei collinear-verwandten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, z. B. in $\mathfrak{E}$, alle diejenigen Geraden a, b, c, $d \ldots$, welche auf der Achse derselben senkrecht stehen; so entsprechen denselben, als Parallelen, lauter solche Linien in $\mathfrak{E}_1$, welche sich in einem und demselben Punkte der Achse von $\mathfrak{E}_1$ schneiden, und umgekehrt: jedem Strahle dieses Punktes entspricht eine von

Digitized by Google

jenen Senkrechten. Denkt man sich also denjenigen Strahl dieses Punktes, welcher auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ senkrecht ist, so folgt:

1. In zwei collinearen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei, entsprechende Gerade, deren jede auf der betreffenden Achse senkrecht steht.

Jetzt denke man sich in $\mathfrak{E}$ irgend zwei Gerade, welche einen spitzen Winkel φ einschliessen, und zugleich die beiden Schaaren sämmtlicher Geraden, welche mit jenen zweien parallel laufen; so entsprechen diesen zwei Schaaren in $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte m, n auf der Achse liegen; und denkt man sich über der Strecke m n, als Sehne, einen Kreis construirt, welcher des Winkels φ fähig ist, so müssen je zwei Strahlen dieser Strahlbüschel, welche sich auf der Peripherie dieses Kreises schneiden, zwei zu jenen beiden Parallelen-Schaaren gehörige Gerade entsprechen. Offenbar aber gibt es zwei solche Kreise, welche symmetrisch auf beiden Seiten der Achse liegen; und nur, wenn φ kein spitzer, sondern ein rechter Winkel ist, fallen beide in einen einzigen zusammen.

2. Sind in einer von zwei collinearen Ebenen irgend zwei Richtungen gegeben, so gibt es in derselben unzählige Paare von Geraden, welche jene Richtungen haben, und deren entsprehende in der anderen Ebene denselben Winkel, als jene, einschliesen; und zwar liegen die Durchschnitte dieser entsprechenden Geraden auf zwei congruenten Kreisen, welche einander in zwei Punkten der Achse schneiden.

Es seien endlich A, B, C drei beliebige Gerade der Ebene $\mathfrak{E}$, von denen A und B den spitzen Winkel φ; B und C den spitzen Winkel ψ; A und C den Winkel $(\varphi+\psi)$ einschliessen; den drei Schaaren Gerader, welche mit A, B, C parallel sind, entsprechen in $\mathfrak{E}_1$ drei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte m, n, s auf der Achse von $\mathfrak{E}_1$ liegen; und beschreibt man auf beiden Seiten der Achse über der Strecke m n einen des Winkels φ, und über der Strecke n s einen des Winkels ψ fähigen Kreis, und verbindet irgend einen Durchschnitt dieser Kreise, welcher ausser der Achse liegt, mit den Punkten m, n, s durch die Geraden a_1, b_1, c_1, so müssen den letzteren in $\mathfrak{E}$ drei solche Gerade a, b, c entsprechen, welche beziehlich mit A, B, C parallel sind und also paarweise die Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen. Liegt nun, wie in Taf. I. Fig. 1., der Punkt n zwischen m und s, so hat nur der Durchschnitt solcher zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf einerlei Seite der Achse liegen, die Eigenschaft, dass die von ihm ausgehenden Linien a_1, b_1, c_1 die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$ einschliessen; liegt aber der Punkt n ausserhalb m und s, wie in Taf. I. Fig. 2., so kommt dieselbe Eigenschaft nur dem Durchschnitte solcher zwei Kreise zu, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Achse liegen. In jedem anderen Falle nämlich erhält man die drei Winkel φ, ψ, $(\varphi-\psi)$. Es gibt also in $\mathfrak{E}_1$ allemal zwei Punkte s_1, σ_1, von welchen aus man drei Gerade a_1, b_1, c_1 ziehen kann, welche mit einander dieselben drei Winkel φ, ψ, $(\varphi+\psi)$, als die denselben entsprechenden Geraden a, b, c einschliessen, und zwar sind diese Punkte gleichweit von

Digitized by Google

der Achse entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf der Achse senkrecht, was unmittelbar aus der symmetrischen Lage der Kreise erhellt.

Da nach Steiner's „Abhängigkeit geom. Gebilde u. s. w. Thl. I. S. 47." zwei projektivische Strahlbüschel allemal projektivisch gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Winkel derselben, welche durch drei entsprechende Strahlenpaare bestimmt werden, gleich sind; so folgt aus der vorigen Betrachtung und aus §. 21. 1., dass je zwei Strahlen eines Punktes s_1, σ_1 den nämlichen (spitzen) Winkel, als die entsprechenden Strahlen des entsprechenden Punktes s, σ einschliessen.

Gesetzt nun, es gäbe noch zwei entsprechende projektivisch gleiche Strahlbüschel B, B_1, so könnte man in B die den drei Geraden A, B, C parallelen Strahlen ziehen und schliessen, dass die denselben entsprechenden Strahlen von B_1 durch die Punkte m, n, s gehen, und dass der Punkt B_1 entweder mit s_1 oder mit σ_1 zusammenfallen müsse. Es gibt also nur zwei Paar solche Strahlbüschel.

Die Geraden A, B, C konnten eben so gut in der Ebene $\mathfrak{E}_1$, als in $\mathfrak{E}$, angenommen werden, und man würde in $\mathfrak{E}$, sowie vorhin die Punkte s_1, σ_1, zwei Punkte gefunden haben, welche dem so eben Gesagten gemäss durchaus einerlei mit s, σ sein müssen. Hieraus folgt, dass auch die Punkte s, σ gleichweit von der Achse der $\mathfrak{E}$ entfernt liegen, und ihre Verbindungslinie auf der letzteren senkrecht steht. Die Geraden $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ sind also jene zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf der betreffenden Achse senkrecht stehen.

Es seien jetzt q, $\mathfrak{p}_1$ die Punkte, in welchen die Achsen Q, P_1 der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ von den Senkrechten $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ geschnitten werden (Taf. I. Fig. 3.); so entspricht q dem unendlich entfernten Punkte von $s_1\sigma_1$, und $\mathfrak{p}_1$ dem unendlich entfernten von $s\sigma$; sie sind also die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen dieser, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivischen Geraden. Man bestimme nun auf diesen letzteren zwei Punktenpaare $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ dergestalt, dass die Strecken $\mathfrak{qs} = \mathfrak{qt} = \mathfrak{p}_1 s_1 = \mathfrak{p}_1\sigma_1$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{q}s = \mathfrak{q}\sigma$ seien; so müssen sowohl die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ als auch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$ entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sein; denn nach S. 250. des IV. Thls. des Archivs ist Rechteck $\mathfrak{qs} \cdot \mathfrak{p}_1 s_1 = \mathfrak{qs} \cdot \mathfrak{p}_1 \mathfrak{s}_{II}$, wenn $\mathfrak{s}_{II}$ der dem $\mathfrak{s}$ entsprechende Punkt ist; also ist, da $\mathfrak{qs} = \mathfrak{p}_1 s_1$, auch $\mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_{II} = \mathfrak{q}s = \mathfrak{p}_1\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{t}_1$, und da die Aufeinanderfolge der Punkte $\mathfrak{t}$, s, σ, $\mathfrak{s}$ mit der ihrer entsprechenden übereinstimmen muss, so fällt $\mathfrak{s}_{II}$ mit $\mathfrak{s}_1$ zusammen u. s. w.

Hiernach sind auch die Strecken $s\mathfrak{s} = s_1\mathfrak{s}_1 = \sigma\mathfrak{t} = \sigma_1\mathfrak{t}_1$, und $s\mathfrak{t} = s_1\mathfrak{t}_1 = \sigma\mathfrak{s} = \sigma_1 s_1$. Man denke sich durch die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ (oder $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$) in den betreffenden Ebenen zwei Parallelen S, S_1 mit den Achsen Q, P_1, und durch die Punkte s, s_1 die entsprechenden Strahlenpaare a, b, c, d...; a_1, b_1, c_1, d_1... gezogen, welche die S, S_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneiden — so sind, zufolge §. 20. 5., und weil $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ entsprechende Punkte sind, die S, S_1 entsprechende Gerade, und demnach $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... und $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... lauter entsprechende Punktenpaare. Aber die Strahlen a, b, c, d... bilden mit der

Senkrechten $s\sigma$ die nämlichen Winkel, als die entsprechenden $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ mit $s_1\sigma_1$; und es ist $s\sigma = s_1\sigma_1$; also ist auch $\mathfrak{s}\mathfrak{a} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{b}_1$ u. s. w., d. h. die Geraden S, S_1 sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich.

Legt man durch t, t mit Q, P_1 zwei Parallelen T, T_1, so gilt von ihnen das nämliche, als von S, S_1.

Es gehe durch den Punkt $\mathfrak{p}_1$ irgend eine Gerade, welche S_1 in $\mathfrak{a}_1$ und T_1 in α_1 schneide; so ist die derselben entsprechende Gerade mit der Senkrechten $s\sigma$ parallel und schneidet folglich die S und T in entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}$ und α, die auf einerlei Seite der Senkrechten liegen, was mit $\mathfrak{a}_1$ und α_1 nicht der Fall ist. Denkt man sich also die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so gelegt, dass die Punktenpaare $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ und $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ von S, S_1 nach einerlei Seite hin auf einander folgen, so müssen dagegen die entsprechenden Punktenpaare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ von T, T_1 nach entgegengesetzten Richtungen laufen.

Denkt man sich ausser S_1 und T_1 noch irgend eine dritte Gerade R_1 parallel mit P_1, welche von $s_1\sigma_1$ in $\mathfrak{r}_1$, und von jener durch $\mathfrak{p}_1$ gelegten Geraden in $\mathfrak{a}'_1$ geschnitten wird, so kann das Segment $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ dem Segment $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ nicht gleich sein, aber $\mathfrak{s}_1\mathfrak{a}_1$ ist gleich $\mathfrak{s}\mathfrak{a}$, und letzteres ist dem dem $\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}'_1$ entsprechenden Segmente $\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$ der entsprechenden, mit Q parallelen Geraden R gleich; also sind die Geraden R, R_1 nicht projektivisch gleich. Nun aber können nur solche Gerade, welche mit den Achsen parallel sind, projektivisch-gleich sein, weil sonst zwei Paar unendlich entfernte Punkte, und folglich die unendlich entfernten Geraden selber entsprechend sein müssten; also gibt es ausser S, S_1 und T, T_1 kein drittes Paar entsprechende projektivisch-gleiche Gerade.

Als Ergebniss der ganzen vorigen Betrachtung kann man nun folgenden Satz aufstellen, der sich in der Folge als besonders wichtig herausstellen wird:

3.

In zwei collinearen Ebenen gibt es *a)* allemal zwei Paar entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlenpaare projektivisch gleiche Strahlbüschel bilden, aber es gibt kein drittes solches Paar; *b)* und diese Punktenpaare liegen auf denjenigen zwei entsprechenden Geraden, welche beide auf den Achsen der Ebenen senkrecht stehen, und sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. *c)* Es gibt allemal zwei Paar entsprechende Gerade, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch gleich sind; aber es gibt kein drittes solches Paar; *d)* und zwar sind diese Geraden mit den Achsen parallel, und je zwei derselben Ebene sind gleichweit von der betreffenden Achse entfernt. *e)* In jeder Ebene ist die Entfernung der beiden Geraden von der Achse ebenso gross als in der anderen Ebene die Entfernung jener beiden Punkte von der Achse, und die Entfernung einer jeden solchen Geraden von einem jener Punkte ist eben so gross als die der entsprechenden Geraden von dem

Digitized by Google

entsprechenden Punkte. *f*) Denkt man sich die Ebenen und deren Achsen parallel mit einander, so ist allemal das eine Paar der projektivisch gleichen entsprechenden Geraden gleichliegend, das andere ungleichliegend, und das nämliche gilt von den projektivisch gleichen entsprechenden Strahlbüscheln.

§. 23.

Befindet sich in der Ebene $\mathfrak{E}$ irgend ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und sind B, B' irgend zwei Punkte desselben, so bestimmen die übrigen Punkte von $\mathfrak{K}$ zwei projektivische Strahlbüschel B, B'; diesen aber entsprechen in der collinear-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ zwei Strahlbüschel B_1, B'_1, wovon jeder mit einem der ersteren projektivisch ist; also sind auch letztere unter sich projektivisch, d. h. dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ entspricht wieder ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; und in der reciprok-verwandten Ebene $\mathfrak{E}_1$ entspricht jedem Strahlbüschel B, B' eine demselben projektivische Gerade A_1, A'_1; also sind letztere auch unter sich projektivisch; d. h. allen Punkten von $\mathfrak{K}$ entsprechen die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}_1$. Ist nun e' der gemeinschaftliche Strahl von B, B'; e'_1 der von B_1, B'_1, und sind e, e_1 die Tangenten in B und B_1, so sind in den Strahlbüscheln B, B', B'_1, B_1 der Reihe nach e, e', e'_1, e_1 entsprechende Strahlen, also auch e, e_1 in B, B_1 u. s. w.

1.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht ein Punkt des andern, und der Tangente in jenem Punkte entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einem jeden Kegelschnitte wiederum ein Kegelschnitt, d. h. einem jeden Punkte des einen entspricht eine Tangente des anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

Ferner: ist $\mathfrak{C}$ irgend eine Curve der $n$ten Ordnung und der $m$ten Klasse in der Ebene $\mathfrak{E}$, d. h. wird $\mathfrak{C}$ von einer beliebigen Geraden A höchstens in n Punkten geschnitten, und gehen an $\mathfrak{C}$ von einem beliebigen Punkte B höchstens m Tangenten, so hat auch das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Punkten $\mathfrak{C}_1$ mit der der A entsprechenden Geraden A_1 höchstens n Punkte, und das der $\mathfrak{C}$ entsprechende System von Geraden $\mathfrak{C}_1$ hat mit dem dem B entsprechenden Punkte B_1 höchstens m Gerade gemein u. s. w. u. s. w.

2.

In zwei collinear-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve

Digitized by Google

in der anderen, und zwar von derselben Ordnung und Klasse als die erstere ist; nämlich jedem Punkte der einen Curve entspricht ein Punkt der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht die Tangente im letzteren.

In zwei reciprok-verwandten Ebenen entspricht einer jeden Curve der einen Ebene wieder eine Curve in der anderen, deren Klasse der Ordnung der ersteren, und deren Ordnung der Klasse der ersteren gleich ist; nämlich einem jeden Punkte der einen Curve entspricht eine Tangente der anderen, und der Tangente im ersteren entspricht der Berührungspunkt der letzteren.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ befinde sich ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und in irgend einer anderen Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$; auf $\mathfrak{K}$ wähle man drei beliebige Punkte B, B', a und ebenso auf $\mathfrak{K}_1$ drei beliebige Punkte B_1, B'_1, a_1, und ziehe in B, B' die Tangenten s, s', welche sich in $\mathfrak{s}$ schneiden, in B_1, B'_1 die Tangenten s_1, s'_1, die sich in $\mathfrak{s}_1$ schneiden, und verbinde endlich B, B' mit a durch a, a', und B_1, B'_1 mit a_1 durch a_1, a'_1. Nach §. 21. 3. darf man nun festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar die vier Punktenpaare B, B_1; B', B'_1; a, a_1; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ entsprechende Punkte derselben sein. Dann aber entspricht dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B_1, B'_1 und a_1 geht und in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, welche den Tangenten s, s' von $\mathfrak{K}$ entsprechen; nun aber sind s, s_1; s', s'_1 entsprechende Linien von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$; also hat dieser Kegelschnitt mit $\mathfrak{K}_1$ nicht nur die drei Punkte B_1, B'_1, a_1, sondern auch die beiden Tangenten in B_1, B'_1 gemein, d. h. er ist mit demselben identisch; u. s. w.

3.

Zwei beliebige Kegelschnitte sind auf unzählige Weisen mit einander collinear- oder auch reciprok-verwandt.

Unter anderen ist also auch ein jeder Kegelschnitt auf unzählige Weisen mit sich selber collinear- und reciprok-verwandt.

Besondere Fälle,
oder
die Verwandtschaften der Affinität, der Gleichheit, der Aehnlichkeit und der Congruenz.

§. 24.

Denkt man sich zwei collineare Ebenen im Sinne von β. bestimmt, so kann man a priori folgende besondere Fälle der Collineations-Verwandtschaft statuiren.

Digitized by Google

1. Ein Paar der Linien A, A_1; A', A'_1 sind projektivisch ähnlich.

2. Ein Paar derselben sind projektivisch-gleich.

3. Beide Paare sind projektivisch-ähnlich.

4. Beide Paare sind projektivisch-gleich.

5. In Nro. 3. ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken von A, A_1 gleich dem Verhältnisse der entsprechenden Strecken von A', A'_1.

6. 7. 8. 9. 10. In jedem der vorigen Fälle schliessen zugleich die Geraden A, A' denselben Winkel ein, als die Geraden A_1, A'_1; und zwar legt man die Geraden A, A_1 so auf einander, dass sie gleichliegend sind, so sind die Geraden A', A'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

Bestimmt man dagegen jene Ebenen im Sinne von *α*., so sind nur folgende Fälle denkbar:

11. Ein Paar der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 sind projektivisch-gleich.

12. Beide Paare sind projektivisch-gleich; und zwar, wenn das eine Paar B, B_1 gleichliegend sind, so sind die beiden anderen B_1, B'_1 entweder

a) gleichliegend, oder

b) ungleichliegend.

13. 14. In Nro. 11. und 12. sind zugleich auch die Strecken B, B' und B_1, B'_1 einander gleich.

Die meisten der hier aufgeführten Fälle sind es aber nur scheinbar; entweder nämlich enthalten sie Bestimmungen, welche in collinearen Ebenen überhaupt gewissen Elementenpaaren derselben eigen sind, oder sie fallen mit anderen der hier genannten Fälle zusammen. Hier aber kann nur von solchen die Rede sein, in welchen sämmtliche Elementenpaare eine der allgemeinen untergeordnete Bestimmung erleiden, sowie von solchen, welche sich auf dieselbe Weise zu diesen Fällen selbst wieder verhalten.

Da nach §. 21. 5. und §. 22. 3. es in zwei collinearen Ebenen allemal unzählige Paare projektivisch-ähnlicher entsprechender Geraden und zwei Paar projektivisch-gleiche gibt, welche mit den Achsen parallel laufen, und da in Taf. I. Fig. 3. je zwei entsprechende Strahlen der Punkte s, s_1 oder σ, σ_1 mit jenen ersteren gleiche Winkel bilden müssen, so erhellt sogleich, dass Nro. 1., 2., 6. und 7. keine besondere Art von Collineations-Verwandtschaft begründen; und dasselbe gilt von Nro. 11., 12. *b*. und 13. wegen der projektivisch-gleichen Strahlbüschel s, s_1 und σ, σ_1, deren gegenseitige Lage der in 12. *b*. geforderten entspricht. Der Fall 14. *b*. ist derjenige, wenn in Taf. I. Fig. 3. die Strecken $s\sigma$ und $s_1\sigma_1$ gleich gross werden, d. h. wenn die Punkte s, σ mit t, $\mathfrak{t}$ u. s. w. zusammenfallen. Diese Besonderheit aber ist — hier wenigstens — desswegen von keinem Interesse, weil dieselbe auf die übrigen

Digitized by Google

Elemente der Ebenen keinen wesentlichen Einfluss übt. Es bleiben also nur noch die Fälle 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12. *a.* und 14. *a.* zu erwägen übrig. Der wichtigste derselben ist Nro. 3.; mit ihm fallen, wie sofort gezeigt werden soll, Nro. 4., 5., 8. und 10. *b.* zusammen, und Nro. 9. *b.* und die identischen Nro. 10. *a* und 12. *a.* bilden zwei besondere Arten von Nro. 3., denen wiederum die identischen Nro. 9. *a.* und 14. *a.* als die letzte Spitze von Besonderung sich unterordnen.

§. 25.

Sind sowohl die Geraden A, A_1 als A', A'_1 projektivisch-ähnlich, so sind die unendlich entfernten Punkte eines jeden Paares entsprechende Punkte; also entsprechen sich die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen gegenseitig, d. h. ihre Achsen fallen ins Unendliche hinaus.

Zwei collinear-verwandte Ebenen, deren unendlich entfernte Geraden sich gegenseitig entsprechen, heissen affin, und ihre Verwandtschaft die der Affinität.

Hieraus folgt sofort:

1. In zwei affinen Ebenen sind die unendlich entfernten Punkte je zweier entsprechenden Geraden entsprechende Punkte; und daher sind

2. Je zwei entsprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich; und

3. Jeder Schaar von Parallelen der einen Ebene entspricht wiederum eine Schaar von Parallelen in der anderen.

In Taf. I. Fig. 4. seien a, b, c, d, e, f... und a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1... beliebige entsprechende Punktenpaare zweier affiner Ebenen, und zwar d, d_1 die Durchschnitte von bc und ae, b_1c_1 und a_1c_1; so hat man kraft des zweiten Satzes dieses Paragraphen:

$$\Delta abc : \Delta acd = bc : cd = b_1c_1 : c_1d_1 = \Delta a_1b_1c_1 : \Delta a_1c_1d_1;$$
$$\Delta acd : \Delta ace = ad : ae = a_1d_1 : a_1c_1 = \Delta a_1c_1d_1 : \Delta a_1c_1e_1;$$

also auch $\Delta abc : \Delta ace = \Delta a_1b_1c_1 : \Delta a_1c_1e_1$ oder

$$\Delta abc : \Delta a_1b_1c_1 = \Delta ace : \Delta a_1c_1e_1 = \Delta acf : \Delta a_1c_1f_1$$

u. s. w.

Also ist auch Fig. abcef : Fig. $a_1b_1c_1e_1f_1 = \Delta abc : \Delta a_1b_1c_1 = \text{const.}$; und da jede krummlinichte Figur als eine geradlinichte mit unendlich-kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt ganz allgemein:

4. In zwei affinen Ebenen haben je zwei entsprechende Flächenräume ein bestimmtes unveränderliches Verhältniss zu einander.

5. Sind in zwei affinen Ebenen ein einziges Paar

entsprechende Flächenräume einander gleich, so sind je zwei solche Räume einander gleich.

Affine Ebenen heissen gleich, und ihre Verwandtschaft die der Gleichheit, wenn das Verhältniss ihrer entsprechenden Flächenräume das der Einheit ist.

Es seien in Taf. I. Fig. 5. B, B_1 die Mittelpunkte irgend zweier entsprechender Strahlbüschel affiner Ebenen; so sind diese Strahlbüschel hinsichtlich ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch und besitzen nach Thl. IV. des Archivs S. 249. zwei Paar entsprechende Strahlen a, b; a_1, b_1, die zu einander rechtwinklig sind (Schenkel der entsprechenden rechten Winkel). Sind nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ irgend zwei entsprechende Punkte von a, a_1 und b, b_1, und nimmt man die Strecken $B\mathfrak{c} = B\mathfrak{b}$, $B_1\mathfrak{c}_1 = B_1\mathfrak{b}_1$, so sind, weil $B\mathfrak{c} : B_1\mathfrak{c}_1 = B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1$, auch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte von b, b_1, und es sind nicht nur $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, sondern auch $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ entsprechende Strecken. Nun aber ist

$$\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1,$$

also auch

$$\mathfrak{ab} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{ac} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1.$$

6. In zwei affinen Ebenen lassen sich zu jedem Paar entsprechenden Geraden unzählige andere finden, deren entsprechende Strecken zu einander in demselben Verhältniss als die der beiden ersteren stehen. (Vgl. §. 24. Fall 5.)

Nimmt man in Taf. I. Fig. 5. die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf a, a_1 beliebig an, macht $Ba \,.\, B_1a_1 = q^2$ und bestimmt auf b eine Strecke $B\mathfrak{b}$ und demzufolge $B_1\mathfrak{b}_1$ dergestalt, dass

$$B\mathfrak{b}^2 : q^2 = B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1 = \text{const.},$$

so ist

$$Ba \,.\, B_1a_1 = B\mathfrak{b} \,.\, B_1\mathfrak{b}_1 \text{ oder } Ba : B\mathfrak{b} = B\mathfrak{b}_1 : Ba_1,$$

also

$$\text{W. } Ba\mathfrak{b} = \text{W. } B_1\mathfrak{b}_1a_1, \quad \text{W. } Ba\mathfrak{b} + \text{W. } B_1a_1\mathfrak{b}_1 = R$$

und

$$\text{W. } \mathfrak{bac} + \text{W. } \mathfrak{b}_1a_1\mathfrak{c}_1 = 2R.$$

7. In zwei affinen Ebenen gibt es unzählige Paare von Geraden, deren entsprechende denselben spitzen Winkel als sie selber einschliessen, und deren Strecken zu den entsprechenden Strecken in einem und demselben Verhältnisse stehen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind. (Vgl. §. 24. Fall 10. *b.*)

In Taf. I. Fig. 6. seien a, a_1; b, b_1 wiederum die Schenkel zweier entsprechenden rechten Winkel B, B_1 und zwar so auf einander

Digitized by Google

gelegt, dass beide Paare gleichliegend sind, was in diesem Falle immer möglich ist; es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ in a, a_1 und $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1$ in b, b_1 entsprechende Punkte, und in denselben auf a, a_1 und b, b_1 Senkrechte errichtet, welche sich beziehlich in den Punkten $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1$ schneiden; die Verbindungslinie der letzteren schneide a, a_1 in $\mathfrak{s}$. Man beschreibe über der Strecke $B\mathfrak{s}$ als Durchmesser einen Kreis und errichte im Mittelpunkte $\mathfrak{i}$ der Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ eine Senkrechte, welche den ersteren in einem Punkte $\mathfrak{m}$ schneiden möge; verbinde $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{m}$ durch eine Gerade, welche die in $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ errichteten Senkrechten in $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ schneidet, und lege durch letztere mit a, a_1 zwei Parallelen, wodurch man auf b, b_1 die Punkte $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ erhält. Diess vorausgesetzt, so ist:

$$B\mathfrak{b} : B_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{q} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{r} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{r}_1 = B\mathfrak{n} : B_1\mathfrak{n}_1,$$

also sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ entsprechende Punkte. Ferner ist, weil $\mathfrak{a}\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{i}$, auch $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{m}$, und es ist W. $B\mathfrak{m}\mathfrak{q} =$ W. $B_1\mathfrak{m}\mathfrak{q}_1 = R$; also $B\mathfrak{q} = B_1\mathfrak{q}_1$; nun aber ist $B\mathfrak{q} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, als Diagonalen eines Rechtecks, und $B_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; folglich ist auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; und macht man $B\mathfrak{c} = B\mathfrak{b}$, $B_1\mathfrak{c}_1 = B_1\mathfrak{b}_1$, so sind auch $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte, und $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$. Da nun die Geraden A, A_1; C, C_1, denen die Strecken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ angehören, in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-ähnlich sind, ein Paar entsprechende Strecken derselben aber gleich sind, so sind dieselben insbesondere projektivisch-gleich. Offenbar aber gibt es keine solche Gerade, wenn sowohl $B\mathfrak{a} > B_1\mathfrak{a}_1$, als auch $B\mathfrak{b} > B_1\mathfrak{b}_1$ ist. Ist M eine Parallele mit A, und gehen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ irgend zwei Parallelen, welche M in $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ schneiden, so bilden auch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1$ ein Parallelogramm, folglich ist die Strecke $\mathfrak{v}\mathfrak{w} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{v}_1\mathfrak{w}_1$, d. h. in den Richtungen von A, A_1 und C, C_1 gibt es unzählige Paare projektivisch-gleicher entsprechender Geraden.

8. In zwei affinen Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind. (Vgl. §. 24. Fall 4.)

Sind zugleich die Dreiecke $B\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ von gleichem Inhalt, so ist

$$B\mathfrak{a} \,.\, B\mathfrak{b} = B_1\mathfrak{a}_1 \,.\, B_1\mathfrak{b}_1 \text{ oder}$$

$$B\mathfrak{a} : B_1\mathfrak{b}_1 = B_1\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{b},$$

woraus folgt, dass wenn $B\mathfrak{a} > B_1\mathfrak{a}_1$, nothwendig $B\mathfrak{b} < B_1\mathfrak{b}_1$ sein muss, die Geraden A, A_1; C, C_1 also nothwendig existiren; zugleich aber sind dann auch die Dreiecke congruent, also

$$\text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \text{W. } B_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1;$$

$$\text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \text{W. } B_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = R; \quad \text{W. } \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \text{W. } \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = 2R.$$

9. In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar Schaaren paralleler Geraden, die sich entsprechen und in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind; und zwar schliessen die beiden Schaaren der einen Ebene den nämlichen

Digitized by Google

Winkel ein, als die der anderen; im Allgemeinen aber lassen sich zwei solche Paare entsprechender Geraden nicht dergestalt legen, dass beide zugleich hinsichtlich ihrer entsprechenden Punkte gleichliegend sind. (Vgl. §. 24. Fall 9. *b*.)

Denkt man sich für einen Augenblick (Taf. I. Fig. 7.) zwei affine Ebenen so auf einander gelegt, dass zwei ihrer entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden (A, A_1) sammt ihren entsprechenden Punkten sich decken, so werden im Allgemeinen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade (C, C_1) der anderen Parallelenschaar nicht auf einander fallen; es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1 \ldots$ entsprechende Punktenpaare von C, C_1; so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{f} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1 \ldots$, also die Linien $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 \ldots$ parallel, und W. $\mathfrak{a}\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{h} = \psi_0$ oder $= \varphi_0$, jenachdem C, C_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten von (AA_1) liegen. Da nun jede der Geraden $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1 \ldots$ zwei entsprechende Punktenpaare enthält, nämlich $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{h}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{f}_1 \ldots$, so fallen in jeder zwei entsprechende Gerade zusammen, und man erhält also zwei Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Linien A, A_1 gleich geneigt sind. Sind φ und ψ die spitzen Neigungswinkel, welche den angedeuteten verschiedenen Lagen von C, C_1 entsprechen, und sind α, α_1 die von A und C, A_1 und C_1 eingeschlossenen Winkel, so ist

$$\alpha + \varphi = 2R - \alpha_1 - \varphi = \psi_0;$$
$$2\varphi = 2R - (\alpha + \alpha_1);$$
$$\psi - \alpha = 2R - \alpha_1 - \psi = \varphi_0;$$
$$2\psi = 2R - (\alpha_1 - \alpha);$$

und ebenso

$$2\varphi_0 = 2R - (\alpha_1 + \alpha),$$
$$2\psi_0 = 2R - (\alpha_1 - \alpha).$$

Nimmt man statt der Geraden A, A_1 irgend zwei andere entsprechende, mit ihnen parallele Gerade, z. B. diejenigen, welche durch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ gehen, so kann man dieselben zur Deckung bringen, ohne dass die Geraden $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{f}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{b}_1 \ldots$ ihren Ort verlassen; nur die Abstände ihrer Punkte von einander ändern sich. — Oder will man, statt A, A_1, die C, C_1 zur Deckung bringen, so wende man die eine Ebene um die Senkrechte, welche von dem Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ auf $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ gefällt wird, herum, und dann behaupten die Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1 \ldots$ wiederum ihre Stelle. Also besitzen die Ebenen nur zwei Paar Schaaren entsprechender Parallelen, welche gegen die Schaaren der entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden gleich geneigt sind.

10. In zwei affinen Ebenen gibt es allemal zwei, aber auch nur zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben.

Digitized by Google

Ferner erhellt aus Nro. 9. unmittelbar:

11. In zwei gleichen Ebenen gibt es allemal zwei Paar unendlich entfernte entsprechende Punkte, deren entsprechende Strahlen gegen je zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade einerlei Neigung haben, und zwar gehören dieselben wechselseitig der jedesmaligen anderen Schaar solcher Geraden an.

Dass der Fall 8. des § 24. eine allgemeine Eigenschaft affiner Ebenen betrifft, leuchtet unmittelbar daraus hervor, dass in zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln allemal zwei Paar entsprechende Strahlen sich vereinigen müssen, sobald dieselben ungleichliegend sind. Denn demnach gibt es in zwei beliebigen entsprechenden Strahlbüscheln affiner Ebenen allemal zwei solche Paare entsprechender Geraden, welche einerlei (spitze) Winkel einschliessen.

§. 26.

Sind zur Bestimmung zweier affiner Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-ähnliche Gerade A, A_1 und A', A'_1 gegeben; ist der Winkel, welchen A, A' einschliessen, dem von A_1, A'_1 eingeschlossenen gleich, und ist das Verhältniss je zweier entsprechender Strecken von A, A_1 dem Verhältnisse je zweier solcher Strecken von A', A'_1 gleich, während zugleich auch beide Linienpaare so gelegt werden können, dass beide gleichliegend sind, so müssen die Verhältnisse aller entsprechenden Strecken beider Ebenen einander gleich sein. Denn ist a der Durchschnitt von A, A' und schneidet irgend eine Gerade M die erstere in m, die letztere in m'; so ist das Dreieck amm' dem von den entsprechenden Punkten a_1, m_1, m'_1 gebildeten Dreiecke $a_1 m_1 m'_1$ ähnlich, indem W. $mam' =$ W. $m_1 a_1 m'_1$ und $ma : m_1 a_1 = m'a : m'_1 a_1$ ist. Also ist auch $mm' : m_1 m'_1 = ma : m_1 a_1 =$ const., und da je zwei entsprechende Strecken der entsprechenden Geraden M, M_1 einerlei Verhältniss haben, und M beliebig angenommen ist, für den Fall solcher Geraden aber, welche durch den Punkt a gehen oder mit A oder A' parallel sind, statt dieser letzteren eine der schon betrachteten Geraden M genommen werden kann, so müssen, wie gesagt, je zwei entsprechende Strecken beider Ebenen sich zu einander wie $ma : m_1 a_1$ verhalten.

1. Sind in zwei affinen Ebenen irgend drei Paar entsprechende Strecken, welche zwei Dreiecke bilden, von einerlei Verhältniss, so stehen je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in demselben Verhältniss (Vgl. §. 24. Fall 10. *a*.).

Affine Ebenen heissen ähnlich, und ihre Verwandtschaft die der Aehnlichkeit, wenn je zwei entsprechende Strecken derselben zu einander in einem und demselben Verhältniss stehen.

Sind in zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Paar projektivisch-gleiche Strahlbüschel B, B_1; B'. B'_1 gegeben, und können beide Paare zugleich gleichliegend gelegt werden, so müssen je zwei parallelen

Digitized by Google

Strahlen a, a' von B, B' ebenfalls zwei parallele Strahlen a_1, a'_1 von B_1, B'_1 entsprechen; folglich sind die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen entsprechende Gerade, und die Ebenen selbst sind affin. Zugleich aber bestimmen je zwei entsprechende Punkte a, a_1 zwei Dreiecke $BB'a$, $B_1B'_1a_1$, deren entsprechende Winkel gleich sind; also ist $Ba : B_1a_1 = B'a : B'_1a_1 = BB' : B_1B'_1$. Beide Ebenen sind also ähnlich.

2. Sind in zwei collinearen Ebenen zwei Paar entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte nicht unendlich entfernt sind, projektivisch-gleich, und sind beide Paare gleichliegend, so sind diese Ebenen ähnlich (Vgl. §. 24. Fall 12. *a.*)

Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und je zwei entsprechende Strahlbüschel B, B_1 derselben projektivisch-gleich; B' sei ein zweiter Strahlbüschel in $\mathfrak{E}$, dessen Strahlen mit denen des B parallel laufen; so laufen auch die entsprechenden Strahlen des dem B' entsprechenden Strahlbüschels B'_1 mit den entsprechenden Strahlen von B_1 parallel; folglich sind auch B', B'_1 projektivisch-gleich, und zwar sowohl B, B_1 als B', B'_1 gleichliegend.

3 Zwei affine Ebenen können, ohne ähnlich zu sein, keine zwei entsprechende Strahlbüschel besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, dass ihre Mittelpunkte unendlich entfernt liegen.

4. In zwei ähnlichen Ebenen sind je zwei entsprechende Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projektivisch-gleich.

Ferner zeigt man auf die bekannte Weise, dass

5. In zwei ähnlichen Ebenen das Verhältniss je zweier entprechender Flächenräume unveränderlich und zwar dem der Quadrate zweier entsprechender Strecken gleich ist.

Ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken zweier ähnlicher Ebenen dem der Einheit gleich, so müssen je zwei entsprechende Strecken einander gleich sein; in diesem Falle heissen die Ebenen congruent, und ihre Verwandtschaft die der Congruenz (Vgl. §. 24. Fall 9. *a.* u. 14. *a.*).

6. Zwei ähnliche Ebenen können, ohne congruent zu sein, keine entsprechenden Geraden besitzen, welche in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich sind, es sei denn, wenn man will, die unendlich entfernten Geraden.

§. 27.

Da zwei projektivisch-ähnliche Gerade vollkommen bestimmt sind, wenn irgend zwei Paar ihrer entsprechenden Punkte gegeben sind, so folgt aus dem Obigen mit Leichtigkeit, dass

Digitized by Google

1. Zwei affine Ebenen vollkommen bestimmt sind, sobald drei Paar entsprechende Punkte oder Geraden beliebig gegeben sind.

2. Zwei ähnliche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entprechende Punkte, oder auch ein Paar entsprechende Punkte und ein Paar entsprechende Geraden beliebig gegeben sind.

3. Zwei gleiche Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald zwei Paar entsprechende Gerade und auf dem einen von beiden ein Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.

4. Zwei congruente Ebenen sind vollkommen bestimmt, sobald ein einziges Paar entsprechende Gerade und auf denselben ein einziges Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind.

Eine Frage, welche bereits der Entdecker der geometrischen Verwandtschaften, Herr Professor Möbius, in seinem Barycentrischen Calcül aufgeworfen und die Bedeutsamkeit derselben für die gesammte Geometrie nachgewiesen hat, ist folgende: Wie viele und welche Stücke müssen gegeben sein, um eine einer gegebenen Figur collineare, affine, gleiche, ähnliche, congruente zu konstruiren? Die vorigen Sätze und der Satz §. 21. 3. führen sehr leicht zur Beantwortung dieser Frage. Hier soll nur noch die hierauf Bezug habende Betrachtung von §. 23. 3. weiter fortgesetzt werden.

Sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei Kegelschnitte, welche in zwei affinen Ebenen sich entprechen, und denkt man sich in $\mathfrak{K}$ eine Schaar paralleler Sehnen, so entsprechen denselben ebenfalls parallele Sehnen von $\mathfrak{K}_1$, und den Mittelpunkten der ersteren die Mittelpunkte der letzteren kraft §. 25. 2. und 3.; also entsprechen sich auch die den Richtungen der beiden Parallelenschaaren zugeordneten Durchmesser der Kegelschnitte, also auch die den letzteren parallelen Sehnen, die Mittelpunkte der letzteren, und folglich auch die jenen Durchmessern zugeordneten Durchmesser selbst.

5. In zwei affinen Kegelschnitten entsprechen allemal dem Mittelpunkte des einen der Mittelpunkt des anderen und je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei zugeordnete Durchmesser des anderen. Und daher entsprechen sich auch die Achsen derselben (als die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel der von den zugeordneten Durchmessern gebildeten projektivischen Strahlbüschel).

Und da einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene nur ein unendlich entfernter der anderen entsprechen kann, so folgt ferner:

6. Eine Hyperbel kann nur mit einer Hyperbel, eine Ellipse mit einer Ellipse, und eine Parabel mit einer Parabel affin sein.

7. Den Asymptoten einer Hyperbel entsprechen allemal die Asymptoten der affinen Hyperbel.

Digitized by Goos

Aus §. 26. 4. ergibt sich:

8. In zwei ähnlichen Kegelschnitten entsprechen je zwei zugeordneten Durchmessern des einen zwei solche zugeordnete des anderen, welche denselben Winkel als jene einschliessen.

In zwei beliebigen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien zwei beliebige Ellipsen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ gegeben; B, B' seien die Endpunkte irgend eines Durchmessers von $\mathfrak{K}$, und es sei a ein Endpunkt des demselben zugeordneten Durchmessers; ebenso seien B_1, B'_1 die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers von $\mathfrak{K}_1$, und a_1 sei ein Endpunkt des zugeordneten Durchmessers. Jetzt denke man sich die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ affin, und zwar B, B_1; B', B'_1; a, a_1 als entsprechende Punktenpaare derselben; so entspricht der Ellipse $\mathfrak{K}$ eine Ellipse K_1, welche durch die Punkte B_1, B'_1, a_1 geht, und welche in B_1, B'_1 zwei Gerade berührt, denen in $\mathfrak{E}$ die Tangenten in B, B' entsprechen. Ferner ist nach 5. die Strecke $B_1 B'_1$ ein Durchmesser von K_1; also fallen die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}_1$ und K_1 zusammen, und da die Mittelpunkte von $\mathfrak{K}$ und K_1 sich entsprechen, so entsprechen sich auch die beiden Durchmesser von $\mathfrak{K}$, K_1, welche durch die Punkte a, a_1 gehen; in $\mathfrak{K}$ aber ist der eine dieser letzteren dem BB' zugeordnet; also ist auch der andere dem $B_1 B'_1$ in K_1 zugeordnet. Demnach sind sowohl die Geraden, welche $\mathfrak{K}_1$, als auch diejenigen, welche K_1 in B_1, B'_1 berühren, mit diesem dem $B_1 B'_1$ zugeordneten Durchmesser parallel, d. h. sie fallen zusammen. Und da es immer nur einen einzigen Kegelschnitt gibt, welcher durch drei gegebene Punkte geht und in zweien derselben zwei gegebene Gerade berührt, so sind $\mathfrak{K}_1$ und K_1 identisch.

Oder sind $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ irgend zwei Hyperbeln, und sind B, B'; B_1, B'_1 wiederum die Endpunkte irgend zweier Durchmesser derselben, so denke man sich durch B, B' nach dem einen unendlich entfernten Punkte α von $\mathfrak{K}$ zwei Strahlen a, a', und nach dem anderen β die Strahlen b, b', und ebenso nach dem einen unendlich entfernten Punkte α_1 von $\mathfrak{K}_1$ durch B_1, B'_1 die Strahlen a_1, a'_1, und nach dem anderen β_1 die Strahlen b_1, b'_1 gezogen, und setze fest, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen collinear, und zwar a, a_1; b, b_1; a', a'_1; b', b'_1 sollen entsprechende Gerade, oder, was einerlei ist, die Punkte B, B_1; B', B'_1; α, α_1; β, β_1 sollen entsprechende Punkte sein. Dann aber müssen sich die unendlich entfernten Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ entsprechen; folglich sind die Ebenen affin. Der Hyperbel $\mathfrak{K}$ entspreche in $\mathfrak{E}_1$ eine Hyperbel K_1; so fällt der Mittelpunkt der letzteren mit dem von $\mathfrak{K}_1$, zugleich aber auch die unendlich entfernten Punkte der einen Hyperbel mit denen der anderen, folglich auch deren Asymptoten zusammen. Die Hyperbeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also ausser den Punkten B_1, B'_1 auch noch zwei Tangenten und deren Berührungspunkte gemein; folglich sind sie identisch.

Sind endlich $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ zwei beliebige Parabeln, und denkt man sich an $\mathfrak{K}$ irgend zwei Tangenten A, A', welche dieselben in a, a' berühren, und an $\mathfrak{K}_1$ auch zwei beliebige Tangenten A_1, A'_1 gelegt, welche dieselben in a_1, a'_1 berühren, so kann man festsetzen, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen affin, und zwar die Geraden A, A_1;

Digitized by Google

A', A'_1; aa', $a_1a'_1$ entsprechende Gerade sein. Entspricht nun der Parabel $\mathfrak{K}$ eine Parabel K_1, so geht letztere durch die Punkte a_1, a'_1, welche den a, a' entsprechen, und berührt in diesen zwei Gerade A_1, A'_1, welche den Tangenten A, A' entsprechen. Die Parabeln $\mathfrak{K}_1$, K_1 haben also zwei Tangenten und deren Berührungspunkte und ausserdem die unendlich entfernte Tangente gemein; folglich sind dieselben identisch.

9. Zwei beliebige Ellipsen sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei zugeordnete Durchmesser beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die der einen denen der anderen entsprechen sollen.

10. Zwei beliebige Hyperbeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man ausser den Asymptoten in jeder einen Durchmesser (und den ihm zugeordneten) beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass die einen den anderen entsprechen sollen.

11. Zwei beliebige Parabeln sind allemal affine Figuren; und zwar darf man in jeder zwei Tangenten beliebig auswählen und sodann festsetzen, dass sowohl diese Tangenten als auch deren Berührungspunkte einander entsprechen sollen.

In Taf. II. Fig. 8. sei P eine beliebige Parabel, A, A' seien zwei beliebige Tangenten derselben, a, a' deren Berührungspunkte, $s_I s_{II}$ die der Sehne aa' parallele Tangente; a'_1 deren Berührungspunkt und s der Durchschnitt von A, A'; so ist die Gerade sa'_1, als harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes der Sehne aa', der dieser letzteren zugeordnete Durchmesser, also a'_1 der Scheitel des Parabelsegments über aa'. Da nun s der harmonische Pol von aa' ist, folglich die Punkte s, m mit dem Punkte a'_1 und dem unendlich entfernten der Parabel harmonisch sind, so ist $sa'_1 = ma'_1$, folglich

$$s_I s_{II} = \frac{1}{2}\, aa' \text{ und } \Delta aa'a'_1 = \frac{1}{2}\Delta aa's = 2\Delta s_I s_{II} s.$$

Man denke sich nun mit der Parabel P eine zweite, P_1, zusammengefallen, und wähle für P die Tangenten A, A', für P_1 die Tangenten A_1, A'_1 (wovon erstere mit A, letztere mit $s_I s_{II}$ zusammenfällt) beliebig aus; so darf man festsetzen, P und P_1 sollen affin und zwar A, A_1; A', A'_1; a, a_1; a', a'_1 entsprechende Elemente sein. Dann aber sind nicht nur die Dreiecke $aa's$ und $a_1a'_1s_1$, sondern auch die Parabelsegmente über den Sehnen aa' und $a_1a'_1$ entsprechende Flächenräume. Denn, um das letztere ganz ausser Zweifel zu setzen, ist $\mathfrak{p}$ irgend ein innerhalb des $\Delta aa's$ liegender Punkt von P, und ist p die Tangente in $\mathfrak{p}$, so liegen die Durchschnitte b und b' von p und A, p und A' nothwendig zwischen a und s, a' und s; also liegen auch die entsprechenden Punkte b_1, b'_1 zwischen a_1 und s_1, a'_1 und s_1, und sowie $\mathfrak{p}$ zwischen b und b' liegt, muss auch auf der Tangente p der dem $\mathfrak{p}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{p}_1$ zwischen b_1 und b'_1, also innerhalb des Dreiecks $a_1a'_1s_1$ liegen. Nach §. 25. 4 ist also

Digitized by Google

$$S\ aa'\mathfrak{s} : S.\ a_1a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1;$$

aus demselben Grunde aber ist auch

$$S.\ aa' : S.\ a'a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II};$$

folglich ist

$$S.\ aa' : S.\ a_1a'_1 : S.\ a'a'_1 = \Delta aa'\mathfrak{s} : \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1 : \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II};$$

hieraus aber ergibt sich nun:

$$(S.\ aa' - S.\ a_1a'_1 - S.\ a'a'_1) : (\Delta aa'\mathfrak{s} - \Delta a_1a'_1\mathfrak{s}_1 - \Delta a'a'_1\mathfrak{s}_{II})$$
$$= \Delta aa'a'_1 : (\Delta aa'a'_1 + \Delta\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s}) = S.\ aa' : \Delta aa'\mathfrak{s};$$

also da

$$\Delta\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_{II}\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\Delta aa'a'_1,\quad \Delta aa'\mathfrak{s} = 2\Delta aa'a_1$$

ist, so hat man die Proportion

$$1 : \frac{3}{2} = S.\ aa' : 2\Delta aa'a'_1,$$

d. h.

$$S.\ aa' = \frac{4}{3}\Delta aa'a'_1.$$

12. Ein jedes Parabelsegment beträgt vier Drittheile des Dreiecks, dessen Grundlinie die Sehne, und dessen Scheitel der Scheitel dieses Segmentes ist.

Auf einander gelegte collineare und reciproke Ebenen.

A.

Collineare.

§. 28.

Werden irgend zwei collineare Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und sind B, B_1; B', B'_1 irgend zwei Paar entsprechende Strahlbüschel derselben, so ist sowohl

Digitized by Google

$$B\,(a,\ b,\ c,\ d\ldots) = B_1\,(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1\ldots).$$

als auch

$$B'\,(a',\ b',\ c',\ d'\ldots) = B'_1\,(a'_1,\ b'_1,\ c'_1,\ d'_1\ldots);$$

also schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen von B, B_1 auf einem Kegelschnitte K, welcher auch die Punkte B, B_1 enthält, und je zwei entsprechende Strahlen von B', B'_1 auf einem zweiten Kegelschnitte K', der auch durch die Punkte B', B'_1 geht. Es sind nun aber die Strahlen BB' und $B_1B'_1$ allemal entsprechende sowohl von B und B_1, als auch von B' und B'_1; also haben die Kegelschnitte K, K' nothwendig einen Punkt i gemein. und dann nothwendig noch einen zweiten p, und wenn einen dritten q, auch noch einen vierten r, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. Von diesen drei Punkten p, q, r gehört keiner den Geraden BB', $B_1B'_1$ selber an; denkt man sich also irgend einen derselben mit B, B', B_1, B'_1 durch die Geraden a, a', a_1, a'_1 verbunden, so müssen den a, a' von $\mathfrak{E}$ die a_1, a'_1 in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen; folglich fallen in jedem dieser drei Punkte zwei entsprechende Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zusammen. Das nämliche lässt sich aber nicht vom Punkte i sagen; denn rechnet man ihn zu $\mathfrak{E}$, so kann demselben irgend ein Punkt i_1 der Geraden $B_1B'_1$ entsprechen, der nicht mit i identisch ist. Gäbe es aber noch einen vierten Punkt, in welchem sich entsprechende vereinigten, so würde derselbe zwei entsprechende Strahlen von B, B_1, und zwei andere von B', B'_1 bestimmen, also ebenfalls den Kegelschnitten K, K' gemeinschaftlich angehören, was widersprechend ist, da diese Kegelschnitte nicht zusammenfallen können.

Verbindet man die Punkte p und q, q und r, r und p durch drei Gerade R, P, Q, so sieht man sogleich, dass in einer jeden zwei entsprechende Geraden beider Ebenen zusammenfallen; eine jede vierte Gerade aber von derselben Eigenschaft würde wenigstens eine der drei ersteren in einem neuen Punkte schneiden, der zwei entsprechende vereinigte, was dem Vorigen widerspricht. Oder wählt man statt der Strahlbüschel B, B_1; B', B'_1 zwei Paar entsprechende Gerade A, A_1; A', A'_1, so sind sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A, A_1 verbinden, die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, und sämmtliche Gerade, welche die entsprechenden Punkte von A', A'_1 verbinden, sind die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}'$; diese beiden Kegelschnitte haben allemal eine Tangente i gemein, welche den Durchschnitt von A, A' mit dem von A_1, A'_1 verbindet; also haben sie nothwendig noch eine, und wenn eine dritte, auch noch eine vierte Tangente gemein, es sei denn, dass sie sich berühren oder oskuliren. In jeder der drei letzteren fallen zwei entsprechende Gerade der Ebenen zusammen, und nur in der ersteren geschieht dies nicht.

Existirt nur einer der Punkte p, q, r, z. B. p, so kann auch nur eine der, auf die letzte Weise erhaltenen Geraden P, Q, R, nämlich P, existiren; denn zwei der letzteren würden auch die dritte, und alle drei auch drei Punkte p, q, r fordern, und umgekehrt; und dass P im Allgemeinen nicht durch p gehen kann, erhellt daraus, dass, wenn in zwei auf einander gelegten projekti-

Digitized by Google

vischen Geraden ein Paar entsprechende Punkte sich vereinigen, im Allgemeinen allemal ein zweites solches Paar sich nachweisen lässt.

1. Werden zwei collineare Ebenen beliebig aufeinander gelegt, so gibt es im Allgemeinen entweder nur einen oder drei Punkte in denselben, in denen sich zwei entprechende vereinigen; und zwar gibt es im ersten Falle nur eine, durch jenen Punkt nicht gehende Gerade, in welcher zwei entsprechende sich vereinigen; im letzten Falle dagegen ist jede Verbindungslinie der drei Punkte eine solche Gerade.

Ein jeder der Punkte p, q, r wird ein Situationspunkt, und eine jede der Geraden P, Q, R eine, dem ersteren zugeordnete, Situationslinie der collinearen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ genannt.

Da je zwei entprechende Gerade in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch sind und perspektivisch werden, wenn in ihrem Durchschnitt zwei entsprechende Punkte sich vereinigen, und da ähnliches von zwei entprechenden Strahlbüscheln gilt, in deren gemeinschaftlichem Strahle entsprechende zusammenfallen, so folgt:

2. Je zwei entsprechende Strahlen eines Situationspunktes sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare perspektivisch, und zwar liegt ihr Projektionspunkt auf der zugeordneten Situationslinie; und

Je zwei entsprechende Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf einer Situationslinie liegen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare perspektivisch, und zwar geht ihr perspektivischer Durchschnitt durch den zugeordneten Situationspunkt.

Mittels §. 21. 3. ergibt sich:

3. Die Verwandtschaft der Collineation zweier auf einander gelegter Ebenen ist vollkommen bestimmt, sobald ein Situationspunkt, oder eine Situationslinie, und irgend drei Paar entsprechende Punkte oder Geraden beliebig gegeben sind.

4. Wenn von zwei aufeinander gelegten collinearen Ebenen ein Situationspunkt und ausserdem drei Paar entsprechende Punkte beliebig gegeben sind, die zugeordnete Situationslinie und zu einem beliebig gegebenen Punkte der einen Ebene den entsprechenden Punkt der anderen zu finden.

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 9. der Situationspunkt p und die entsprechenden Punktenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1 gegeben, so verbinde man p mit den letzteren durch die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1, ziehe bc und ac (oder ab), welche a und b resp. in α und β schneiden, und ebenso b_1c_1 und a_1c_1 (oder a_1b_1), welche a_1 und b_1 resp. in α_1 und β_1 schneiden: endlich ziehe man aa_1 und $\alpha\alpha_1$, welche

Digitized by Google

sich in a_0, und bb_1 und $\beta\beta_1$, welche sich in b_0 schneiden; so ist die Gerade P, welche a_0 mit b_0 verbindet, die gesuchte Situationslinie. — Ist nun q irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so verbinde man denselben mit a und b durch zwei Gerade, welche b und a resp. in β' und α' schneiden, ziehe sofort die Geraden $a_0\alpha'$ und $b_0\beta'$, welche a_1 und b_1 resp. in α'_1 und β'_1 schneiden, und noch die Geraden $a_1\beta'_1$ und $b_1\alpha'_1$: so ist der Durchschnitt q_1 dieser letzteren der dem q entsprechende Punkt.

Beweis.

Die Geraden a, a_1; b, b_1; c, c_1 entsprechen sich paarweise, weil auf je zweien derselben, z. B. auf a, a_1, zwei Paar entsprechende Punkte p, p_1, a, a_1 liegen, und da aus demselben Grunde auch die Geraden ac, a_1c_1: bc, b_1c_1 sich entsprechen, so gilt diess auch von den Punkten β, β_1; α, α_1. Nach Lehrsatz 2. liegen demnach die Punkte a_0 und b_0 auf der dem p zugeordneten Situationslinie. — Kraft desselben Satzes entsprechen sich nun auch die Punkte α', α'_1; β', β'_1, und mithin auch die Geraden $b\alpha'$, $b_1\alpha'_1$; $a\beta'$, $a_1\beta'_1$. Also sind q, q_1, als Durchschnitte zweier Paar entsprechender Geraden, entsprechende Punkte.

5. Wenn von zwei auf einander gelegten affinen Ebenen drei Paar entsprechende Punkte oder Gerade beliebig gegeben sind, einen Situationspunkt beider Ebenen, d. h. einen Punkt zu finden, in welchem sich zwei entsprechende Punkte vereinigen.

Auflösung.

Sind in Taf. II. Fig. 10. die entsprechenden Punktenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1 gegeben, so ziehe man die Geraden ab und a_1b_1, die sich in γ schneiden, und lege durch c mit ab, durch c_1 mit a_1b_1 zwei Parallelen, die sich in γ_1 schneiden; ebenso sei β der Durchschnitt von ac und a_1c_1, und β_1 der Durchschnitt zweier durch b mit ac, und durch b_1 mit a_1c_1 parallel gelegten Linien. Jetzt verbinde man γ mit γ_1, und β mit β_1 durch zwei Gerade; so ist der Durchschnitt p dieser letzteren der gesuchte Situationspunkt.

Beweis.

Denn legt man durch p der Reihe nach mit ab, ac, a_1b_1, a_1c_1 Parallelen, welche beziehlich die ac, ab, a_1c_1, a_1b_1 in den Punkten d, e, d_1, c_1 schneiden, so ist

$$\frac{ac}{ad} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma p} = \frac{a_1c_1}{a_1d_1}, \text{ und } \frac{ab}{ae} = \frac{\beta\beta_1}{\beta p} = \frac{a_1b_1}{a_1e_1};$$

und da auch die Lage der Punkte a, d, c und a_1, d_1, c_1; a, e, b und a_1, e_1, b_1 die nämliche als die der Punkte γ, p, γ_1; β, p, β_1, folglich übereinstimmend sein muss, so sind d, d_1; e, e_1 entsprechende Punkte und somit nach §. 25. 3. sind die Geraden pd, pd_1; pe, pc_1 ebenfalls entsprechend. Dem Durchschnitte von pd und pe entspricht also der Durchschnitt von pd_1 und pe_1.

Digitized by Google

Denkt man sich die zwei entsprechenden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in p liegen, so haben dieselben, wie je zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Strahlen gemein; diese können jedoch auch ganz fehlen oder im Grenzfalle sich zu einem einzigen vereinigen; und da bei auf einander gelegten affinen Ebenen jedesmal die entsprechenden unendlich entfernten Geraden sich vereinigen, so folgt:

6. In zwei beliebig auf einander gelegten affinen Ebenen gibt es allemal einen Situationspunkt, welchen die unendlich entfernte Gerade als Situationslinie zugeordnet ist; und ausserdem gibt es im Allgemeinen zwei oder (nur eine oder) keine Situationslinien und Situationspunkte, und diese gehören den beiden ersteren an.

§. 29.

Ein ausgezeichneter Fall, dessen allgemeine Möglichkeit Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin. 1833“ zuerst nachgewiesen hat, ist derjenige, dass in zwei entsprechenden Strahlbüscheln je zwei entsprechende Strahlen, und dass zugleich in zwei entsprechenden Geraden je zwei entsprechende Punkte einander decken. Für uns ist dieser Fall durch die in §. 22. angestellten Betrachtungen bereits erledigt.

a) In der That: legt man irgend zwei collineare Ebenen dergestalt auf einander, dass irgend eines der beiden Paare projektivisch gleicher entsprechender Geraden, z. B. T, T_1 in Taf. I. Fig. 3., sammt ihren entsprechenden Punkten einander decken, so werden auch die Mittelpunkte σ, σ_1 und die entsprechenden Strahlenpaare zweier projektivisch gleicher Strahlbüschel zusammenfallen müssen. Die Achsen beider Ebenen sind dann unter einander und mit T, T_1 parallel, und die zwei andern projektivisch gleichen Geraden S, S_1 sind von dem Punkte $(\sigma\sigma_1)$, sowie auch die Mittelpunkte der zwei anderen projektivisch gleichen Strahlbüschel s, s_1 von der Geraden (TT_1) gleichweit entfernt.

b) Dreht man jetzt die eine Ebene um den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, ohne sie jedoch von der anderen zu trennen, um einen Winkel von 180°, so müssen jetzt die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren sich decken, während das nämliche auch noch von den entsprechenden Strahlenpaaren der Strahlbüschel σ, σ_1 gilt. Die Geraden T, T_1 nehmen dann den Punkt $(\sigma\sigma_1)$, und die Punkte s, s_1 die Gerade (SS_1) in die Mitte.

c) Man denke sich die Ebenen in die Lage *a*) zurückgebracht, nun aber die eine um die Gerade (TT_1) — ohne Verschiebung — herumgewendet, so fallen die Strahlbüschel s, s_1 und deren entsprechende Strahlenpaare auf einander u. s. w.

d) Und denkt man sich jetzt wieder die eine Ebene um den Punkt (ss_1) — ohne Umwendung — um 180° herumgedreht, so

Digitized by Google

kommen die Geraden S, S_1 sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren zur Deckung u. s. w.

1. Sind irgend zwei collineare Ebenen gegeben, so lassen sich dieselben auf vier verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass sowohl zwei entsprechende Strahlbüschel und deren entsprechende Stralenpaare, als auch zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare einander decken. Man erhält nämlich allemal eine von diesen vier Lagen, wenn man die beiden auf den Achsen senkrecht stehenden entsprechenden Geraden auf einander legt und sodann diejenigen zwei entsprechenden projektivisch gleichen Geraden oder die Mittelpunkte derjenigen zwei entsprechenden projektivisch-gleichen Strahlbüschel, welche gleichliegend sind, sich decken lässt; und die drei anderen erhält man hiernach, indem man die eine Ebene entweder um den Mittelpunkt der vereinigten Strahlbüschel und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herumdreht, oder um die vereinigten Geraden, ohne Verschiebung, herumwendet, oder, wenn diess letztere geschehen, jene Drehung um den Mittelpunkt der neuen vereinigten Strahlbüschel wieder eintreten lässt. In keinem Falle aber, selbst nicht, wenn beide Paare projektivisch-gleicher Geraden und die Mittelpunkte beider Paare projektivisch-gleicher Strahlbüschel auf einander fallen, können zugleich die entprechenden Elementenpaare des einen Paars und auch die des anderen einander decken, es sei denn, dass die Ebenen congruent sind.

Zwei auf einander gelegte Ebenen heissen collinear und collinear-liegend, und ihr Situationspunkt Collineationspunkt, ihre Situationslinie Collineationslinie, wenn sie collinear sind und sich in einer der vier so eben angedeuteten Lagen befinden; und ähnlicherweise werden die Ausdrücke affin und affin-liegend, ähnlich und ähnlich-liegend, Affinitätspunkt, Affinitätslinie, Aehnlichkeitspunkt und Aehlichkeitslinie zu verstehen sein.

2. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen liegen je zwei entsprechende Punkte mit dem Collineationspunkte in gerader Linie, und schneiden sich je zwei entsprechende Gerade in einem Punkte der Collineationslinie.

3. In zwei collinearen und collinear-liegenden Ebenen sind die Achsen derselben mit der Collineationslinie parallel, und eine jede von beiden ist ebensoweit von dieser letzteren, als die andere vom Collineationspunkte entfernt.

Aus den Sätzen 3., 4., 6. des §. 26. und den Sätzen 8., 10. des §. 25. erhellt nun sogleich:

4. Zwei affine Ebenen können allemal, aber auch nur dann in affine Lagen gebracht werden, wenn auf

Digitized by Google

den einen Paar Schenkeln zweier entsprechenden rechten Winkel das Verhältniss der entsprechenden Strecken grösser, und auf den anderen kleiner als die Einheit ist.

5. Zwei affine Ebenen lassen sich im Allgemeinen auf unzählige verschiedene Arten in affine Lage bringen. Befinden sie sich nämlich in einer solchen, so erhält man sofort eine andere, indem man die eine Ebene entweder um die Affinitätslinie ohne Verschiebung herumwendet, oder um einen beliebigen Punkt der Affinitätslinie und zwar um einen bestimmten unveränderlichen Winkel herumdreht, oder auch dergestalt verschiebt, dass irgend ein Strahl des Affinitätspunktes in seinem Orte verharrt. Der Affinitätspunkt liegt allemal unendlich entfernt, wofern nicht der besondere Fall der Aehnlichkeit vorhanden ist; und zwar liegt derselbe allemal in einer von zwei festen Richtungen der als ruhend vorgestellten Ebene, welche bei jeder Drehung oder Umwendung der anderen Ebene mit einander wechseln.

6. Zwei ähnliche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten in ähnliche Lage bringen, indem man zu diesem Zwecke nur irgend zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander zu legen braucht. Die Aehnlichkeitslinie ist jedesmal, der Aehnlichkeitspunkt dagegen nie unendlich entfernt.

In Taf. II. Fig. 11. sind zwei gleiche Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ dargestellt; S, S_1 sind zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade, welche sich sammt ihren entsprechenden Punktenpaaren decken; T, T_1 sind ebenfalls projektivisch-gleich, aber ungleichliegend, und dasselbe gilt von den Parallelen b, b_1; c, c_1; d, d_1.... Wendet man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um die Gerade (SS_1) herum, so fallen die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_1$... auf ε_1, ν_1. μ_1..., die Geraden $\mathfrak{e}\varepsilon_1$, $\mathfrak{n}\nu_1$, $\mathfrak{m}\mu_1$... sind nun mit (SS_1) parallel und vereinigen eine jede zwei entsprechende Strahlen. Dreht man dagegen die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um einen beliebigen Punkt von (SS_1), z. B. um (aa_1), und zwar um 180^0 herum, so tritt jetzt die Gerade (TT_1) an die Stelle von (SS_1) und die Geraden S, S_1 sind ungleichliegend u. s. w.

7. Zwei gleiche Ebenen lassen sich auf unzählige verschiedene Arten dergestalt aufeinander legen, dass zwei entsprechende Gerade und deren entsprechende Punktenpaare, und zugleich zwei entsprechende Punkte und deren entsprechende Strahlenpaare einander decken. Dieser Punkt, der Projektionspunkt beider Ebenen, ist allemal unendlich weit entfernt, und je zwei seiner vereinigten Strahlen, die Projektionsstrahlen der Ebenen, sind in Ansehung ihrer entsprechenden Punktenpaare projektivisch-gleich. Die Grundlinie der Ebenen, d. h. die Gerade, deren jeder Punkt zwei entsprechende vereinigt, ist entweder unter einem bestimmten, unveränderlichen Winkel gegen die Projektionsstrahlen geneigt, oder mit den-

Digitized by Google

selben parallel; im ersten Falle sind je zwei in einem Projektionstrahl vereinigte Gerade ungleichliegend, im zweiten aber gleichliegend, und der eine Fall entsteht aus dem anderen, indem man die eine Ebene um die Grundlinie herumwendet. Dreht man im ersten Falle die eine Ebene um irgend einen Punkt der Grundlinie, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten, so wird jetzt einer der Projektionsstrahlen zur Grundlinie, die neuen Projektionsstrahlen aber sind wieder ungleichliegend; und dreht man im zweiten die Ebene um das doppete Complement jenes unveränderlichen Winkels, so ändert auch jetzt die Grundlinie ihre Richtung, aber auch jetzt werden die neuen Projektionsstrahlen wieder gleichliegend. Endlich erhält man in beiden Fällen nach und nach immer neue Grundlinien von derselben Richtung, wenn man die eine Ebene bloss so verschiebt, dass ein Projektionsstrahl in seinem Orte verharrt.

Keiner weiteren Erklärung endlich wird der folgende Satz bedürfen:

8. Zwei congruente Ebenen lassen sich allemal so legen, dass je zwei entsprehende Elemente derselben sich decken. Dreht man sodann die eine Ebene um irgend einen festen Punkt, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herum, so sind je zwei entsprechende Gerade parallel und, sowie auch je zwei entsprechende Punkte, von jenem festen Punkte, dem Mittelpunkte der Ebenen, gleichweit entfernt; wendet man dagegen die eine Ebene um irgend eine Gerade ohne Verschiebung herum, so liegen beide Ebenen zu einander symmetrisch, d. h. je zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf jener Geraden, der Symmetrallinie, und bilden mit ihr gleiche Winkel, und je zwei entsprechende Punkte sind gleichweit von der Symmetrallinie entfernt, und ihre Verbindungslinie steht auf derselben senkrecht. Verschiebt man endlich die eine Ebene dergestalt, dass irgend eine Gerade in ihrem Orte verharrt, so sind je zwei entsprechende Punkte und je zwei entsprechende Gerade gleichweit von einander entfernt.

§. 30.

Wenn in zwei auf einander gelegten collinearen Ebenen irgend zwei Punkte einander in doppeltem Sinne entsprechen, so müssen in der sie verbindenden Geraden zwei entsprechende sich vereinigen, also eine Situationslinie bilden, und nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 258. *b.* müssen je zwei entsprechende Punkte dieser Geraden sich in doppeltem Sinne entsprechen, d. h. die Geraden selbst sind involutorisch; folglich fallen die Durchschnitte ihrer Parallelstrahlen, d. h. die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte, zusammen; jene Situationslinie geht also

Digitized by Google

durch den Durchschnitt der beiden Achsen. Man sieht sogleich, dass diess nicht im Allgemeinen stattfinden kann, indem man ja zwei entsprechende Gerade so auf einander legen kann, dass die den unendlich entfernten Punkten derselben entsprechenden Punkte nicht zusammenfallen. Legt man sie aber wirklich auf diese Weise, so müssen auch die beiden Strahlbüschel, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der zugeordnete Situationspunkt ist, involutorisch sein, sonst aber im Allgemeinen keine anderen Geraden und keine anderen Strahlbüschel. Eine Ausnahme bildet ganz allein der in §. 24. unter Nro. 14. *b* bezeichnete Fall. Sind nämlich die Abstände der Mittelpunkte s, s_1 der projektivisch-gleichen Strahlbüschel von den Achsen einander gleich, so kann man die Ebenen so auf einander legen, dass zu gleicher Zeit die Achsen Q, P_1 (Taf. I. Fig. 3.) und die Punkte s, s_1 und σ, σ_1 einander decken, und dann werden einerseits die Strahlbüschel σ, σ_1 und je zwei ihrer entsprechenden Strahlenpaare, sowie auch die Geraden T, T_1 mit ihren entsprechenden Punktenpaaren einander decken; andererseits aber die Strahlbüschel s, s_1, sowie die Geraden S, S_1, eine Involution bilden. Ist nun $\mathfrak{g}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}$, so liegt sein entsprechender $\mathfrak{g}_1$ auf der Geraden, welche $\mathfrak{g}$ mit $(\sigma\sigma_1)$ verbindet; in dieser aber vereinigen sich zwei entsprechende, und den unendlich entfernten Punkten beider entsprechen zwei Punkte, welche sich auf der Achse (QP_1) vereinigen; also sind dieselben involutorisch, und die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ entsprechen sich in doppeltem Sinne. Oder ist g irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$, so schneidet sie die ihr entsprechende g_1 in einem Punkte von (TT_1), in welchem sich zwei entsprechende vereinigen; da nun die Punkte, wo diese Geraden g, g_1 die (SS_1) schneiden, sich in doppeltem Sinne entsprechen, so gilt diess auch von g, g_1; und demnach gehören letztere zu zwei involutorischen Strahlbüscheln.

Wären die Strecken $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ nicht einander gleich, und man legte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ so auf einander, dass die Achsen Q, P_1 sich vereinigen, so könnten dieselben nicht collinear liegen, und höchstens nur die Punkte der Situationslinien sich in doppeltem Sinne entsprechen. Da aber in diesem Falle der eine Situationspunkt der unendlich entfernte von (QP_1) sein würde, so wären zwei Situationslinien mit (QP_1) parallel, also die in denselben vereinigten Geraden projektivisch-ähnlich; solche aber können nach dem 4ten Thl. des Archivs S. 261. *a* niemals involutorisch sein. Dagegen würde diess von den in der dritten Situationslinie vereinigten Geraden, aber auch nur von diesen allein, gelten, weil hier die Durchschnitte der Parallelstrahlen in endlicher Entfernung sich vereinigen.

a) In zwei beliebig auf einander gelegten collinearen Ebenen gibt es im Allgemeinen keine zwei Punkte und keine zwei Gerade, welche sich in doppeltem Sinne entsprechen. *b*) Legt man sie aber dergestalt auf einander, dass zwei entsprechende Gerade einander, und zugleich die den Achsen angehörigen Punkte sich decken, oder so, dass in zwei entsprechenden rechten Winkeln die ungleichnamigen Schenkel auf einander fallen, so sind jene zwei Gerade und die im zugeordneten Situationspunkte vereinigten Strahl-

Digitized by Google

büschel, und andererseits die mit diesen Winkeln concentrischen Strahlbüschel und die mit der zugeordneten Situationslinie vereinigten Geraden involutorisch, d. h. je zwei entsprechende Elemente derselben entsprechen sich in doppeltem Sinne, im Allgemeinen aber auch nur diese allein. *c)* Fallen die Achsen beider Ebenen auf einander, so entspricht jede denselben parallele Gerade einer anderen in doppeltem Sinne, und das nämliche gilt von den Punkten derjenigen Situationslinie, welche nicht mit den Achsen parallel ist, sonst aber im Allgemeinen von keinem anderen Elemente. *d)* Sind in beiden Ebenen die Mittelpunkte der projektivisch-gleichen Strahlbüschel gleichweit von einander entfernt ($s\sigma = s_1\sigma_1$), und liegen die Ebenen collinear, so entspricht jeder Punkt einem anderen, und jede Gerade einer anderen in doppeltem Sinne.

B.

Auf einander gelegte reciproke Ebenen.

§. 31.

Denkt man sich irgend zwei reciprok-verwandte Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ beliebig auf einander gelegt, und ist A irgend eine Gerade von $\mathfrak{E}$ und B_1 der ihr entsprechende Punkt von $\mathfrak{E}_1$, ferner $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... die Punkte von A, und a_1, b_1, c_1, d_1... die denselben entsprechenden Strahlen von B_1, so ist

$$A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots).$$

Sind nun $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... diejenigen Punkte von A, in welchen dieselbe von a_1, b_1, c_1, d_1... geschnitten wird, so ist auch

$$A\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) = A_1\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1\ldots).$$

Oder sind a, b, c, d... diejenigen Strahlen des Punktes B_1, welche nach den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, so ist

$$B_1\,(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots) = B\,(a, b, c, d\ldots).$$

Nach §. 20. 2, müssen auch die den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... entsprechenden Geraden durch die den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1... entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... gehen, und die den Strahlen a, b, c, d... estsprechenden Punkte auf den den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.. liegen.

Je zwei Punkte einer Geraden, von denen ein jeder auf der dem anderen entsprechenden Geraden liegt, insofern immer nur der eine zu der anderen und der andere zu der anderen Ebene gerechnet wird, sollen zwei zugeordnete

Digitized by Google

Punkte jener Geraden; und je zwei Strahlen eines Punktes, von denen ein jeder nach dem anderen entsprechenden Punkte geht, wobei ebenfalls nicht beide Strahlen zu jeder Ebene gerechnet werden, sollen zwei zugeordnete Strahlen jenes Punktes heissen.

1. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen bilden die zugeordneten

Punktenpaare einer jeden Geraden zwei in Ansehung derselben projektivische Gerade.	Strahlenpaare eines jeden Punktes zwei in Ansehung derselben projektivische Strahlbüschel.

Rechnet man einen Punkt zu beiden Ebenen zugleich, so entsprechen demselben im Allgemeinen zwei verschiedene Gerade, und dem Durchschnitte der letzteren auch zwei Gerade, welche ihrerseits den ersteren zum Durchschnitte haben; und ebenso entsprechen einer jeden Geraden zwei Punkte, und der Verbindungslinie der letzteren zwei andere Punkte, welche auf jener ersteren liegen. Zwei Punkte, von denen ein jeder der Durchschnitt der dem anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Geraden ist, sollen zwei Wechselpunkte, und zwei Gerade, von denen eine jede die der anderen in doppeltem Sinne entsprechenden Punkte enthält, sollen zwei Wechselstrahlen beider Ebenen heissen. Je zwei Wechselpunkte und Wechselstrahlen sind also in doppeltem Sinne zugeordnete Punkte und Strahlen. Denkt man sich nun die zugeordneten Punktenpaare einer Geraden, welche irgend zwei Wechselpunkte mit einander verbindet, so müssen dieselben, weil in den projektivischen Geraden, die sie bilden, ein einziges Paar sich in doppeltem Sinne entsprechen, eine Involution von Punkten bilden, und desshalb je zwei zugeordnete Punkte dieser Geraden Wechselpunkte beider Ebenen sein u. s. w.

2. Je zwei zugeordnete Punkte einer Geraden sind Wechselpunkte beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Punkte gilt; und dann bilden sie eine Involution von Punkten.	2. Je zwei zugeordnete Strahlen eines Punktes sind Wechselstrahlen beider Ebenen, sobald diess von einem einzigen Paare solcher Strahlen gilt; und dann bilden sie eine Involution von Strahlen.

Denkt man sich zwei Gerade a, b, deren jede zwei Wechselpunkte verbindet, und ist p ihr Durchschnittspunkt, ferner P die Gerade, welche dem Punkte p entspricht, insofern derselbe zu $\mathfrak{E}_1$ gerechnet wird, endlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Punkte, wo die Geraden a, b von P geschnitten werden, so sind nach dem vorigen Satze sowohl p und $\mathfrak{a}$, als auch p und $\mathfrak{b}$ Wechselpunkte, d. h. rechnet man p zur Ebene $\mathfrak{E}$, so geht die entsprechende Gerade von p ebenfalls durch die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Der Punkt p ist also ein solcher Punkt beider Ebenen, welchem ein und dieselbe Gerade P entspricht, es mag derselbe zu der einen oder zur anderen Ebene gerechnet werden. Ist nun c irgend eine dritte Gerade, welche zwei Wechselpunkte verbindet, und ist $\mathfrak{c}$ ihr Durchschnitt mit P, so liegt der Wechselpunkt von $\mathfrak{c}$ auf c; aber die Geraden, welche

Digitized by Google

dem Punkte c in dem einen und dem anderen Sinne entsprechen, gehen beide durch p, d. h. p ist der Wechselpunkt von c; also geht die Gerade c durch p. Gäbe es nun noch einen Punkt von derselben Eigenschaft als p, so würden die Geraden $a, b, c \ldots$ auch durch diesen gehen, was unmöglich ist.

3. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen gehen sämmtliche Geraden, wovon jede zwei Wechselpunkte verbindet, durch einen und denselben Punkt, und diesem Punkte entsprechen in beiden Ebenen zwei Gerade, welche mit einander zusammenfallen. Es gibt aber nur einen Punkt, welcher diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.

liegen die Durchschnitte je zweier Wechselstrahlen auf einer und derselben Geraden, und dieser Geraden entsprechen in beiden Ebenen zwei Punkte, welche sich mit einander vereinigen. Es gibt aber nur eine Gerade, welche diese beiden Eigenschaften zugleich besitzt.

Da die Gerade, welche die Mittelpunkte M, M_1 beider Ebenen verbindet, der Wechselstrahl der unendlich entfernten Geraden ist, so folgt aus dem vorigen Satze rechts:

4. Diejenige Gerade, welche die Mittelpunkte beider Ebenen mit einander verbindet, läuft mit derjenigen parallel, deren entsprechende Punkte sich vereinigen.

Es sei A irgend eine Gerade, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ seien ihre Punkte; in $\mathfrak{E}$ liegend vorgestellt, entspreche ihr der Punkt B_1, in $\mathfrak{E}_1$ liegend, der Punkt B, und ebenso den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ einerseits die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ von B_1, andererseits die Strahlen $a, b, c, d \ldots$ von B. Dann sind die Durchschnitte von a, a_1; b, b_1; c, c_1; $d, d_1 \ldots$ die Wechselpunkte von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$, und da

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

so ist auch

$$B(a, b, c, d \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots);$$

d. h. diese Durchschnitte sammt den Punkten B, B_1 liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Und da der oben mit p bezeichnete Punkt der Wechselpunkt des Durchschnittes von A und P ist, oder auch, weil die Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, welche p mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$ verbinden, durch die Wechselpunkte der letzteren gehen, und

$$B(a, b, c, d \ldots) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) \equiv p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots),$$

also

$$B(a, b, c, d \ldots) = p(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots)$$

Digitized by Google

ist, so liegt auch p auf $\mathfrak{K}$. In den Strahlbüscheln p, B entspricht demjenigen Strahle von p, welcher nach dem Durchschnitte von A und P geht, der beiden gemeinschaftliche Strahl Bp; also berührt ersterer den $\mathfrak{K}$ im Punkte p.

Durch ein analoges Räsonnement gelangt man zur rechten Seite des folgenden Doppelsatzes, worin wir der Kürze wegen den Punkt p den Pol und die Gerade P die Polare der beiden Ebenen nennen wollen:

5. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen liegen die sämmtlichen Punkte, deren Wechselpunkte einer und derselben Geraden angehören, auf dem Umfange eines Kegelschnitts, welcher auch die beiden, dieser Geraden entsprechenden Punkte enthält und im Pole der beiden Ebenen diejenige Gerade berührt, welche nach dem Durchschnitte jener Geraden und der Polare der beiden Ebenen gerichtet ist.	umhüllen die sämmtlichen Geraden, deren Wechselstrahlen einem und demselben Punkte angehören, einen Kegelschnitt, welcher auch die beiden, diesem Punkte entsprechenden Geraden, und ausserdem die Polare der beiden Ebenen in demjenigen Punkte berührt, welcher mit jenem ersteren Punkte und dem Pole der beiden Ebenen in gerader Linie liegt.

Der Kegelschnitt, welcher die Wechselpunkte der Punkte einer Geraden enthält, soll der Wechselpunkt-Kegelschnitt dieser Geraden, und derjenige, welcher von den Wechselstrahlen der Strahlen eines Punktes umhüllt wird, soll der Wechselstrahlen-Kegelschnitt dieses Punktes — in Bezug auf die reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ — genannt werden.

Die Anwendung, welche wir von dem vorigen Satze machen werden, erfordert noch folgende anderweitige Betrachtung. Es sei K irgend ein Kegelschnitt, p ein beliebiger Punkt und P die harmonische Polare von p in Bezug auf K; ferner seien α, β, γ, δ... die Strahlen von p, welche K in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0; $\mathfrak{d}_0$, δ_0... und eine beliebige Gerade A in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... schneiden; endlich seien a_1, b_1, c_1, d_1... die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$..., welche die Strahlen α, β, γ, δ... resp. in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneiden, und a, b, c, d... die Geraden, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... mit dem harmonischen Pole B von A verbinden. Diess vorausgesetzt, so sind je zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$... resp. mit $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0; $\mathfrak{d}_0$, δ_0... harmonisch, und die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1..., als zugeordnete harmonische Polaren des Punktes B für K, bilden eine Involution; also hat man

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots) \equiv B(a, b, c, d\ldots)$$
$$= B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots),$$

und folglich

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots),$$

Digitized by Google

d. h. die Punkte a, b, c, d... nebst p und B liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$. Da die Gerade, welche die Punkte B und p verbindet, die harmonischen Pole von A und P enthält, also die harmonische Polare des Durchschnittspunktes von A und P ist, so muss derselben im Strahlbüschel p der nach diesem letzteren Punkte gehende Strahl entsprechen, dieser Strahl also den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in p berühren. Nach gehöriger Berücksichtigung der anderen Seite erhält man also folgenden Doppelsatz:

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und ist in der Ebene desselben irgend ein Punkt und irgend eine Gerade gegeben, und bestimmt man auf jedem Strahle dieses Punktes denjenigen Punkt, welcher zu den beiden Durchschnitten des Kegelschnittes und dem Durchschnitte jener Geraden der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt, oder, um umfassender zu reden, welcher der dem Durchschnite jener Geraden zugeordnete harmonische Pol in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so gehören alle diese Punkte einem neuen Kegelschnitte an, welcher auch den harmonischen Pol der gegebenen Geraden enthält, und in dem gegebenen Punkte diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte der gegebenen Geraden und der harmonischen Polare des gegebenen Punktes gerichtet ist.

6. Ist irgend ein Kegelschnitt und in der Ebene desselben irgend eine Gerade und irgend ein Strahlbüschel gegeben, und bestimmt man für jeden Punkt dieser Geraden denjenigen Strahl desselben, welcher mit den beiden an den Kegeschnitt gehenden Tangenten und mit dem jenem Strahlbüschel angehörigen Strahle harmonisch und zwar dem letzteren zugeordnet ist, oder, um umfassender zu reden, welcher die diesem letzteren Strahle zugeordnete harmonische Polare in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so umhüllen alle diese Strahlen einen neuen Kegelschnitt, welcher auch die harmonische Polare des Mittelpunktes des gegebenen Strahlbüschels, und die gegebene Gerade in demjenigen Punkte berührt, der mit diesem Mittelpunkte und dem harmonischen Pole der gegebenen Geraden in gerader Linie liegt.

Ein besonderer Fall der linken Seite dieses Satzes ist, wenn die gegebene Gerade unendlich entfernt ist, oder der zu bestimmende Punkt in der Mitte der jedesmaligen Sehne liegen soll.

7. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

auf einer beliebig gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, dessen entsprechende Geraden durch diesen Punkt selber gehen.

in einem beliebig gegebenen Strahlbüschel einen Strahl zu finden, dessen entsprechende Punkte auf diesem Strahle selber liegen.

Digitized by Google

Auflösung. Zu drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der gegebenen Geraden A suche man die entsprechenden Geraden a_1, b_1, c_1, welche A in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ schneiden; denke sich zwei projektivische Gerade A, A_1, wovon $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ drei Paar entsprechende Punkte sind, und suche diejenigen zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$ von A, A_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen, so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Auflösung. Zu drei beliebigen Strahlen a, b, c des gegebenen Strahlbüschels B suche man die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und verbinde sie mit B durch a_1, b_1, c_1; denke sich zwei projektivische Strahlbüschel B, B_1, wovon a, b, c und a_1, b_1, c_1 drei Paar entsprechende Strahlen sind, und suche diejenigen zwei Strahlen (ee_1), (ff_1) von B, B_1, in deren jedem sich zwei entsprechende vereinigen; so hat jeder von beiden die verlangte Eigenschaft.

Beweis (links). Denn sind e_1, f_1 die entsprechenden Geraden von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, und schneiden sie die A (A_1) in ε_1, φ_1, so hat man nach §. 21. γ.:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, e_1, f_1\ldots) \equiv A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots);$$

also

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots).$$

Aber nach der Konstruktion ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

also auch

$$A(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \varepsilon_1, \varphi_1\ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{f}_1\ldots),$$

und da zwei projektivische Gebilde durch drei Paar entsprechende Elemente bestimmt sind, so fallen $\mathfrak{c}_1$ und ε_1, φ_1 und $\mathfrak{f}_1$ zusammen.

Sind die Punktenreihen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ungleichliegend, so gibt es bekanntlich allemal zwei Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$; sind sie dagegen gleichliegend, so gibt es entweder zwei, oder nur einen, oder auch keinen solchen Punkt. Ist aber in der Ebene $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1)$ ein einziger solcher Punkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ vorhanden, so gibt es auf jedem Strahle desselben im Allgemeinen nothwendig einen zweiten $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$, und somit unzählig viele in der Ebene.

8. Ist in zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen ein einziger Punkt vorhanden, dessen entsprechende Geraden durch ihn selber gehen, oder eine einzige Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihr selber liegen, so gibt es im Allgemeinen unzählig viele solche Punkte und Gerade.

Auf drei beliebigen Strahlen α, β, γ des Punktes p seien $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0 drei solche Punktenpaare, deren entsprechende Geraden durch die betreffenden Punkte selber gehen; so sind jedes Paar die Hauptpunkte derjenigen Involution, welche

Digitized by Google

von den Wechselpunkten der betreffenden Geraden gebildet wird, also mit je zwei Wechselpunkten, z. B. mit p und dem der Geraden P angehörigen Punkte harmonisch. Denkt man sich also durch die fünf Punkte $\mathfrak{a}_0$, α_0, $\mathfrak{b}_0$, β_0, $\mathfrak{c}_0$ einen Kegelschnitt K gelegt, so ist P, die Polare der beiden Ebenen, zugleich die harmonische Polare des Poles p der beiden Ebenen in Bezug auf K, und folglich liegt auch der Punkt γ_0 auf K. Denkt man sich ferner eine beliebige Gerade A und einerseits den Wechselpunkt-Kegelschnitt von A, welcher die Strahlen α, β, γ, δ... von p in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneidet, andererseits auf jedem dieser Strahlen denjenigen Punkt bestimmt, welcher zu den beiden Durchschnitten $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}_0$, γ_0; $\mathfrak{d}_0$, δ_0... des Kegelschnittes K und zu dem Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... der Geraden A der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt ist, so liegen alle diese Punkte nach Lehrsatz 6. auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$, welcher im Punkte p diejenige Gerade berührt, die nach dem Durchschnitte von A und P gerichtet ist. Nun aber sind auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_0$, α_0; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_0$, β_0; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_0$, γ_0 harmonisch; also haben die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ vier Punkte p, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gemein; zugleich aber auch die Tangente in p (5.), also fallen sie zusammen. Denkt man sich also auf einem beliebigen vierten Strahle δ von p zwei Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, so sind nicht nur diese, sondern auch die Punkte $\mathfrak{d}_0$, δ_0 des Kegelschnittes K sowohl mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ als auch mit p und dem der P angehörigen Punkte harmonisch; jene beide ersteren fallen also mit $\mathfrak{d}_0$, δ_0 zusammen. Wiederholt man endlich dieses ganze Räsonnement auf der Seite rechts, so erhält man zunächst folgenden Doppelsatz:

9. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen

liegen sämmtliche Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie selber gehen, auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes, für welchen der Pol der beiden Ebenen der harmonische Pol der Polare der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselpunkte der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Pole sind.

umhüllen sämmtliche Gerade, deren entsprechende Punkte auf ihnen selber liegen, einen einzigen Kegelschnitt, für welchen die Polare der beiden Ebenen zugleich die harmonische Polare des Pols der beiden Ebenen ist, und je zwei Wechselstrahlen der beiden Ebenen zwei zugeordnete harmonische Polaren sind.

Jeder Mittelpunkt der beiden Ebenen hat offenbar einen unendlich entfernten Punkt zum Wechselpunkte, nämlich denjenigen der Geraden, welche ihn mit dem Punkte p verbindet; also läuft die harmonische Polare des einen, M, in Bezug auf den Kegelschnitt K (links) mit der Geraden pM, und die des anderen, M_1, mit der Geraden M_1p parallel; da nun pM und pM_1 selber mit einander nicht parallel sind, so kann die Gerade MM_1, welche man die Mittellinie der beiden Ebenen nennen kann, nicht durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (links) gehen. Dagegen geht dieselbe nothwendig durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes K (rechts), indem ihr Wechselstrahl die unendlich entfernte Gerade ist, folglich auch der harmonische Pol dieser

Digitized by Google

letzteren in Bezug auf diesen Kegelschnitt der ersteren angehören muss.

10. Die Mittellinie der beiden Ebenen geht durch den Mittelpunkt desjenigen Kegelschnittes, dessen Tangenten durch die ihnen selbst entsprechenden Punkte gehen, und nur dann auch durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes, der diese Punkte enthält, wenn der Pol der beiden Ebenen unendlich entfernt ist, oder die Mittellinie mit der Polare der beiden Ebenen zusammenfällt.

In Taf. II. Fig. 12. sei $\mathfrak{K}$ derjenige Kegelschnitt, dessen Punkte auf ihren entsprechenden Geraden liegen, und K derjenige, welcher von diesen letzteren umhüllt wird; so wird, wenn irgend zwei Tangenten von K mit a, b oder c_1, d_1 bezeichnet werden, jenachdem sie in $\mathfrak{E}$ oder in $\mathfrak{E}_1$ liegen sollen, und nun den a und b die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, der der c_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{c}$ auf a, und der der d_1 entsprechende Punkt $\mathfrak{d}$ auf b liegen, und also der andere Durchschnitt dieser Tangente mit $\mathfrak{K}$ sein müssen. Dem Durchschnitte $\mathfrak{s}$ von a und b entspricht also die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, und dem Durchschnitte t_1 von c_1 und d_1 entspricht die Gerade $\mathfrak{cd}$; folglich ist der Durchschnitt $(\mathfrak{s}_1\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{cd}$ der Wechselpunkt von $(\mathfrak{st}_1)$, und beide liegen mit dem Pole p beider Ebenen in gerader Linie. Man denke sich $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{c}$ durch zwei Gerade verbunden, welche sich im Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden, und von diesem Punkte und dem Punkte p nach $(\mathfrak{st}_1)$ die Geraden g, h gezogen: so ist h die harmonische Polare des Punktes $\mathfrak{q}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}$, folglich, da h durch den Punkt p geht, liegt $\mathfrak{q}$ auf der Polare P beider Ebenen, welche die harmonische Polare von p für $\mathfrak{K}$ ist. — Die Geraden g, h sind mit den Tangenten a, b harmonisch, also zwei zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf K, d. h. der harmonische Pol von h für K liegt auf g; derselbe liegt aber auch auf P, welche auch für K die harmonische Polare von p ist; demnach ist $\mathfrak{q}$ der harmonische Pol von h nicht nur in Bezug auf $\mathfrak{K}$, sondern auch auf K; und es gibt somit auf der Linie P unzählige Punktenpaare $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, welche in Bezug auf $\mathfrak{K}$ und K zugleich zugeordnete harmonische Pole sind. Die Polare der beiden Ebenen ist also eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante von $\mathfrak{K}$ und K, und ebenso zeigt man, dass der Pol der beiden Ebenen ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben ist. Haben aber irgend ein System von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante P gemein, welche zugleich in Bezug auf alle die harmonische Polare eines und desselben Punktes p ist, so sage ich, diese Kegelschnitte haben längs der Geraden P eine reelle oder ideale doppelte Berührung.

11. In zwei auf einander gelegten reciproken Ebenen gibt es im Allgemeinen zwei sich entsprechende Kegelschnitte, welche längs der Polare beider Ebenen als Berührungssehne, und unter dem Pole beider Ebenen, als Berührungspole, eine reelle oder ideale doppelte Berührung haben, und die Eigenthümlichkeit

Digitized by Google

besitzen, dass einer jeden Tangente eines bestimmten von beiden die Punkte, in welchen sie den anderen schneidet, und jedem Punkte dieses letzteren die Tangenten, welche von ihm an den ersteren gehen, auf bestimmte und unzweideutige Weise entsprechen. Dahingegen entsprechen den Punkten des ersteren zwar auch die Tangenten des anderen, doch liegen diese Punkte nicht auf diesen Tangenten.

Sind irgend zwei Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$, welche sich doppelt berühren, gegeben; sind c_1, d_1, f_1 irgend drei Tangenten eines beliebigen von beiden — vorausgesetzt, dass beide einander ausschliessen — und bezeichnet man zwei derselben, z. B. c_1, d_1, zugleich auch mit a, b; den Durchschnitt von a und b mit $\mathfrak{s}$; den von c_1 und d_1 mit $\mathfrak{t}_1$; die Punkte, wo a und b den anderen Kegelschnitt schneiden, mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{d}$; die Punkte, wo f_1 ihn schneidet, mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$; die Geraden $\mathfrak{cd}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ mit t und s_1, und hat man bei dieser Bezeichnung darauf gesehen, dass nicht $\mathfrak{cd}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{fd}$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{b}_1$, sondern $\mathfrak{cb}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$, $\mathfrak{fb}_1$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{d}$ es sind, deren Durchschnitt auf der Berührungssehne P liegt — so kann man sich zwei mit der Ebene der beiden Kegelschnitte zusammengefallene reciproke Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ denken und festsetzen, dass die Geraden c_1, d_1, f_1, s_1 von $\mathfrak{E}_1$ den Punkten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{E}$ entsprechen sollen, und da drei dieser Punkte auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so gibt es nach 8. unzählige solche Punkte und Geraden, und diese bestimmen nach 11. zwei sich doppeltberührende Kegelschnitte, deren einer mit K die Tangenten c_1, d_1, f_1, der andere mit $\mathfrak{K}$ die Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ gemein hat, und da dem Punkte $\mathfrak{a}_1$, als dem Durchschnitte von c_1, s_1, die Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{s}$, und dem Durchschnitte $\mathfrak{b}_1$ von d_1, s_1 die Verbindungslinie von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{s}$ entsprechen muss, also auch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so hat der letztere Kegelschnitt fünf Punkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{K}$ gemein, ist also mit demselben identisch. Er geht also auch durch den Punkt $\mathfrak{f}_1$. Endlich müssen in dem neuen Paare von Kegelschnitten sowohl als in dem gegebenen die Durchschnitte von $\mathfrak{cb}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}$, $\mathfrak{fb}_1$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{d}$ auf der Berührungssehne liegen; also fällt die Berührungssehne des einen Paars mit der des anderen zusammen, und da es immer nur einen Kegelschnitt gibt, welcher einen gegebenen $\mathfrak{K}$ längs einer gegebenen Geraden P doppelt berührt und eine gegebene Gerade c_1 zur Tangente hat, so fällt auch K mit dem anderen neuen Kegelschnitte zusammen.

12. Sind in einer Ebene irgend zwei Kegelschnitte, welche eine reelle oder ideale doppelte Berührung haben, gegeben, so kann man *a*) sich allemal zwei Ebenen denken, welche mit der ersteren zusammengefallen sind, und festsetzen, diese Ebenen sollen reciprok, und jene Kegelschnitte sollen in doppeltem Sinne entsprechende Kegelschnitte sein, d. h. die Punkte und Tangenten des einen den Tangenten und Punkten des anderen, sowohl wenn der erstere in der einen, als wenn er in der anderen Ebene liegend vorgestellt wird; *b*) und zugleich kann man festsetzen, dass alle Tangenten eines bestimmten von beiden durch die

Digitized by Google

ihnen entsprechenden Punkte des anderen gehen, nicht aber zu gleicher Zeit, dass auch die Tangenten in diesen letzteren Punkten durch die Berührungspunkte der ersteren gehen sollen. *c*) Diese Beziehung der beiden Ebenen auf einander ist allemal nur auf eine einzige Weise möglich, es sei denn, dass die Kegelschnitte einander gegenseitig ausschliessen, in welchem Falle allein ein jeder von den Tangenten des anderen geschnitten wird, so dass man einmal die Punkte des einen auf den entsprechenden Tangenten des anderen, und ein zweitesmal die Punkte des zweiten auf den entsprechenden Tangenten des ersten liegen lassen kann; und *d*) man erhält diese Beziehung, indem man drei Tangenten (c_1, d_1, f_1) des einen Kegelschnittes, welche den anderen in drei Punktenpaaren (c, a_1; d, b_1; f, f_1) schneiden, beliebig auswählt und einer jeden einen dieser Punkte (c, d, f) und ausserdem der Verbindungslinie ($a_1 b_1$) von zweien der drei anderen Punkte den gegenseitigen Durchschnitt der betreffenden zwei Tangenten (c_1, d_1) entsprechen lässt; oder auch indem man vier Tangenten des einen beliebig annimmt und eine jede einem der beiden Punkte entsprechen lässt, in welchen sie den anderen Kegelschnitt schneidet; doch ist in beiden Fällen darauf zu achten, dass die Verbindungslinie je zweier, derselben Ebene zugewiesenen Punkte, z. B. c, d, und diejenige der ihnen zugesellten Punkte (a_1, b_1) einander nicht auf der Berührungssehne schneiden.

Legt man die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ dergestalt auf einander, dass die Mittelpunkte M, M_1 derselben sich decken, so wird die unendlich entfernte Gerade zur Polare, und der Punkt (MM_1) oder M zum Pole beider Ebenen, und da dieser letztere auch jetzt der harmonische Pol der ersteren für jeden der Kegelschnitte K, $\mathfrak{K}$ sein muss, so ist derselbe zugleich der Mittelpunkt dieser Kegelschnitte. Ferner ist die unendlich entfernte Gerade eine gemeinschaftliche Sekante dieser Kegelschnitte, d. h. dem unendlich entfernten Punkte einer jeden Geraden ist ein und derselbe unendlich entfernte Punkt als harmonischer Pol in Bezug auf beide Kegelschnitte zugeordnet; also sind je zwei zugeordnete Durchmesser des einen zweien des anderen parallel, und hieraus folgt, dass K, $\mathfrak{K}$ ähnliche und ähnlichliegende Kegelschnitte sind (Vgl. Thl. 5. des Archivs. S. 238.).

13. Werden zwei reciproke Ebenen dergestalt auf einander gelegt, dass ihre Mittelpunkte einander decken, so sind die beiden entsprechenden Kegelschnitte, von denen die Punkte des einen auf den entsprechenden Tangenten des anderen liegen, ähnlich und ähnlich liegend.

Jede Gerade einer von zwei reciproken Ebenen, welche durch deren Mittelpunkt geht, wird ein Durchmesser derselben genannt, und ein Durchmesser a_1 der Ebene $\mathfrak{E}_1$ heisst einem Durchmesser a von $\mathfrak{E}$ zugeordnet, wenn der erstere nach dem ent-

Digitized by Google

sprechenden unendlich entfernten Punkte des letzteren gerichtet ist. Liegen die beiden Ebenen auf einander und concentrisch, so sind die zugeordneten Durchmesser nichts anders als die zugeordneten Strahlen des gemeinsamen Mittelpunktes M und bilden folglich zwei projektivische Strahlbüschel M, M_1. Denkt man sich nun die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ um den Mittelpunkt M dergestalt gedreht, dass die ungleichnamigen Schenkel s und t_1, s_1 und t der entsprechenden rechten Winkel dieser Strahlbüschel, welche sie bekanntlich immer besitzen, einander decken, d. h. legt man die Strahlbüschel M, M_1 involutorisch, so ist jedem Durchmesser (ab_1) ein und derselbe Durchmesser $(a_1 b)$ zugeordnet, er mag nun in $\mathfrak{E}$ oder in $\mathfrak{E}_1$ liegend vorgestellt werden. Es sei $\mathfrak{a}$ irgend ein Punkt von a; so ist die ihm entsprechende Gerade α_1 mit a_1 parallel und geht durch den Wechselpunkt von $\mathfrak{a}$; und ist $\mathfrak{b}_1$ der mit $\mathfrak{a}$ zusammenliegende Punkt von b_1, so ist die ihm entsprechende Gerade β mit b parallel und geht durch den Wechselpunkt von $\mathfrak{b}_1$. Aber sowohl die Geraden a_1 und b als auch die Wechselpunkte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ sind identisch; also fallen die beiden dem Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)$ entsprechenden Geraden α_1 und β zusammen. Hieraus folgt:

14. Zwei reciproke Ebenen lassen sich allemal so auf einander legen, dass ihre zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, und dann fallen je zwei Gerade, welche einem und demselben Punkte, und je zwei Punkte, welche einer und derselben Geraden beider Ebenen entsprechen, mit einander zusammen.

Auch für diese Lage der beiden Ebenen nun lässt sich, wie oben, zeigen, dass diejenigen Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ angehören, und dass diese Geraden einen Kegelschnitt K umhüllen. Die beiden Tangenten aber, welche von irgend einem Punkte des $\mathfrak{K}$ an K gelegt werden, müssen nach dem vorigen Satze zusammenfallen; also liegt dieser Punkt auf dem Umfange des K, und somit fallen die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, K selbst zusammen.

Sind in Taf. II. Fig. 13. K, $\mathfrak{K}$ die beiden ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte, welche bei einer concentrischen, sonst aber beliebigen Lage der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die vereinigten entsprechenden Elementenpaare enthalten, und denkt man sich die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ um eine der den Kegelschnitten gemeinschaftlichen Achsen, z. B. um A, herumgewendet, so fallen die Scheiteltangenten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{n}_1$ in ihre frühere Stelle β und ν zurück, ihre Endpunkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{n}_1$ aber fallen in die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$; ferner fallen die beiden Tangentenpaare σ und σ_1, τ und τ_1, welche von den Scheiteln des anderen Kegelschnittes ausgehen, zusammen, so dass also nun jedem der vereinigten Punkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1)$, $(\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1)$, $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$ zwei vereinigte und durch ihn selbst gehende Gerade entsprechen. Zugleich sieht man, dass die zwei Paar zugeordneten Durchmesser a, a_1 und b, b_1 mit den ungleichnamigen Schenkeln auf einander fallen u. s. w. Der neue Kegelschnitt, welcher also jetzt an die Stelle der beiden vorigen K, $\mathfrak{K}$ tritt, geht folglich durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und wird in denselben von den Geraden α_1, $\mathfrak{n}_1$, σ, τ berührt.

Digitized by Google

Hätte man den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gleich anfangs durch Drehung der einen eine andere Lage zu einander gegeben, und sodann die eine um die neue Achse A herumgewendet, so würde man gleichwohl wieder dieselbe Lage der Ebene $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ wie vorhin erhalten haben, weil beidemale die ungleichnamigen Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in den Strahlbüscheln der zugeordneten Durchmesser zusammenfallen müssen, und es nur zwei solche rechte Winkel geben kann; es sei denn, dass man die andere Achse B statt A zur Umwendungsachse nähme.

Diess ergibt sich mit mehr Klarheit und Einfachheit, wenn wir die Sache unabhängig von den Kegelschnitten K, $\mathfrak{K}$ betrachten. Es seien die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ beliebig concentrisch gelegt; die Winkel st (Taf. II. Fig. 14.) und s_1t_1 seien die von zwei Paar zugeordneten Durchmessern s, s_1 und t, t_1 gebildeten rechten Winkel; so kann man die Ebenen zweimal durch Drehung und wiederum zweimal durch Umwendung so legen, dass die Durchmesser s und t_1, t und s_1 auf einander fallen; durch Drehung nämlich, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um den spitzen Winkel st_1 rechts herum, oder um das Supplement dieses Winkels links herum dreht; und durch Umwendung, indem man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ entweder um die Gerade A, welche den spitzen Winkel st_1 hälftet, oder um die auf A senkrechte Gerade B wendet. In einer jeden von diesen vier Lagen erhalten auch je zwei entsprechende Elemente beider Ebenen eine verschiedene Lage zu einander; ausserdem aber gibt es keine fünfte.

Liegen die zugeordneten Durchmesser bereits involutorisch, so kann man sich zur Umwendung der Ebenen statt der Geraden A, B der Durchmesser s, t selber bedienen. Sind nun a, a_1 irgend zwei Wechselpunkte von s, und dreht man die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um 180°, so bilden auch jetzt die Punkte a, a_1 in ihrer neuen Lage zwei Wechselpunkte, dieselben schliessen aber den Mittelpunkt M der von den Wechselpunkten gebildeten Involution ein oder aus, jenachdem sie ihn vorher aus- oder einschlossen; und zwar gilt diess zugleich dann auch von je zwei Wechselpunkten des Durchmessers t. Wendet man dagegen die eine Ebene um den Durchmesser t herum, so tritt nur auf s jener Unterschied der Lage ein. Nun aber sind die Hauptpunkte der genannten Involution allemal zwei Punkte des in Rede stehenden Kegelschnitts, und sie existiren oder nicht, jenachdem der Mittelpunkt der Involution ausserhalb oder zwischen je zwei zugeordneten Punkten liegt; ferner ist es klar, dass je zwei zugeordnete Durchmesser der beiden Ebenen jetzt zugleich zugeordnete Durchmesser des Kegelschnittes sind, und solche zwei Durchmesser schneiden denselben entweder alle beide, oder nur der eine von beiden; also kann man mit vollkommener Sicherheit schliessen:

15. Werden zwei reciproke Ebenen dergestalt auf einander gelegt, dass ihre zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, *a*) so gehören die sämmtlichen Punkte, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, dem Umfange eines Kegelschnittes an, welcher diese Geraden in jenen Punkten berührt. *b*) Dreht man nun die eine Ebene um einen Winkel von zwei Rechten um ihren gemeinsamen

Digitized by Google

Mittelpunkt, so erscheint jener Kgelschnitt als Hyperbel, als Ellipse, oder er verschwindet ganz, jenachdem er anfangs eine Hyperbel, oder nicht vorhanden, oder eine Ellipse war. *c*) Wendet man dagegen die eine Ebene um eine Achse jener Involution oder, was einerlei ist, um eine Achse jenes Kegelschnittes herum, so erscheint derselbe von Neuem als Hyperbel, wenn er vorher eine Ellipse oder nicht vorhanden war; dagegen erscheint er als Ellipse oder verschwindet, wenn er vorher eine Hyperbel war, jenachdem die Umwendung um die Haupt- oder um die Nebenachse derselben geschieht. *d*) Ueberhaupt lassen sich die beiden Ebenen allemal auf vier verschiedene Weisen so auf einander legen, dass die zugeordneten Durchmesserpaare eine Involution von Strahlen bilden, und zwar erscheint jener Kegelschnitt allemal in zweien dieser Lagen als Hyperbel, in einer einzigen als Ellipse, und in der letzten verschwindet er.

Endlich denke man sich irgend einen Kegelschnitt K, drei beliebige Punkte desselben und die Tangenten in diesen Punkten gegeben; zwei dieser letzteren seien, der eine (BB_1), der andere $(B'B'_1)$, die Tangente in jenem (AA_1), die in diesem $(A'A'_1)$, der dritte Punkt (aa_1) und die Tangente in demselben (aa_1), endlich der Durchschnitt von (AA_1) und $(A'A'_1)$ sei mit (ss_1) und die Verbindungslinie von (BB_1) und $(B'B'_1)$ mit (ss_1) bezeichnet. Jetzt denke man sich, zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien mit der Ebene des gegebenen Kegelschnittes zusammengefallen, und setze fest, diese Ebenen sollen reciprok, und zwar die vier Punkte B, B', s, a und die vier Geraden A_1, A'_1, s_1, a_1 entsprechende Elemente derselben sein; so wird auch dem Durchschnitte s_1 von A_1, A'_1 die Verbindungslinie s von B, B', dem Durchschnitte B_1 von s_1, A_1 die Verbindungslinie A von s, B, und dem Durchschnitte B'_1 von s_1, A'_1 die Verbindungslinie A' von s, B' entsprechen. Endlich entspricht dem Durchschnitte von A_1, a_1 die Verbindungslinie von B, a; und dem Durchschnitte von A'_1, a_1 die Verbindungslinie von B', a; folglich auch dem Punkte a_1 die Tangente a. Den vier Punkten (BB_1), $(B'B'_1)$, (aa_1), (ss_1) entsprechen also vier Paar vereinigte Gerade (A_1A), (A'_1A'), (a_1a), (s_1s); also gehören diese Punkte einem Kegelschnitte K an, welcher diese Gerade berührt, und dessen sämmtliche Punkte und Tangenten die nämliche Eigenschaft als jene besitzen u. s. w.

16. Ist in einer Ebene ein beliebiger Kegelschnitt gegeben, so kann man sich allemal zwei Ebenen denken, welche mit der Ebene dieses Kegelschnittes zusammenfallen, und festsetzen, dieselben sollen reciprok sein, und jeder Tangente des Kegelschnittes ihr Berührungspunkt, sowie auch einer jeden Geraden ein und derselbe Punkt in Bezug auf beide Ebenen entsprechen.

In diesem Falle wird jeder Punkt der harmonische Pol der ihm entsprechenden Geraden, und letztere die harmonische Polare jenes Punktes in Bezug auf die beiden Ebenen oder auch jenen

Digitized by Google

Kegelschnitt genannt; diese Benennung soll aber auch noch dann gelten, wenn die zugeordneten Durchmesser zweier reciproken Ebenen involutorisch liegen, und kein Kegelschnitt vorhanden ist, dessen Punkte auf den entsprechenden Geraden liegen.

Die Theorie der geometrischen Verwandtschaft der Reciprocität kehrt also an ihrem Schlusse, der offenbar ein nothwendiger ist, zu jenen einfachen Eigenschaften der Kegelschnitte zurück, von welchen die neuere Geometrie sowohl in ihrer historischen als systematischen Entwickelung ihren Ausgang nahm; und ebenso hatten sich uns auch bereits als letzte und partikulärste Erscheinungen der Collineation jene Eigenschaften der Aehnlichkeit, der Gleichheit, der Congruenz ergeben, auf welchen die Elemente der sogenannten Geometrie der Alten beruhen. Theils aber ist die Art, wie diese Erscheinungen von Neuem hervortreten, eine andere als früher, nämlich nicht als Eigenschaften blosser Figuren, sondern von Systemen sämmtlicher Elemente einer oder mehrerer Ebenen; theils sind neue Erscheinungen hinzugekommen, von deren Vorhandensein man anfangs nichts wusste. — Schon Möbius hat darauf aufmerksam gemacht, dass den Elementarsätzen über die Bestimmungsstücke, welche gegeben sein müssen, um eine einer gegebenen Figur congruente, ähnliche, gleiche zu construiren, analoge, die Verwandtschaft der Affinität und der Collineation betreffende Sätze sich hinzugesellen lassen; und die Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren könnte man freier und allgemeiner d. h. ohne Hülle eines Kegelschnittes darstellen, selbst wenn man von dem allgemeinen Begriffe der Reciprocität, wie er oben aufgestellt worden, nicht ausgehen wollte. — Diese Eigenthümlichkeit im Entwickelungsgange der Geometrie, welche wir auch im 4ten Theile des Archivs. S. 278. wahrzunehmen Gelegenheit hatten, scheint von allgemein-wissenschaftlicher Natur und besonders geeignet zu sein, über das Verhältniss der neuern Geometrie zu der der Alten das genügende Licht zu verbreiten. Die strenge Wissenschaft schreitet zwar immer nur vom Allgemeinen zum Besondern, d. h. von dem was weniger, zu dem was mehr Bestimmungen enthält, fort; aber etwas anderes ist das Allgemeine der Erscheinung und das Allgemeine dem Begriffe nach; jenes ist, wie der Punkt, die Gerade, das Dreieck, der Kreis, nur das einfache Element, welches in allen oder mehreren besonderen Gebilden erscheint, woraus die letzteren äusserlich zusammengesetzt und mittels desselben konstruirt werden; dieses dagegen ist das Gesetz oder Princip, wodurch, wie z. B. die Transversalentheorie, das Princip der Projektivität, des Punktes der mittleren Entfernung, der Fusspunkten-Vielecke und Fusspunkten-Curven, eine Mannichfaltigkeit von Gebilden auf einander bezogen und deren Eigenschaften durch innere Fortbestimmung entwickelt werden. — Der Punkt ist das allen Figuren gemeinsame Element und gilt desshalb der Anschauung für allgemeiner als z. B. der Kegelschnitt, während er andererseits wieder nur als eine besondere Art von Kegelschnitt erscheint. — Indem die Geometrie von einfacheren zu zusammengesetzteren Gebilden fortschreitet, verschafft

Digitized by Google

sie sich die Gewissheit und das Fundament ihrer Principe, worunter schon jeder Lehrsatz gerechnet werden kann; und indem sie die letzteren diskutirt, bringt sie Klarheit, Ordnung und Vollständigkeit in die Erscheinungen und wird sich ihrer Methode mehr und mehr bewusst; dieses letztere Moment tritt aber natürlich gegen das erstere zurück, so lange die gewonnenen Gesetze selbst eines reicheren Inhalts entbehren, und wenn dann zu einer Zeit, wie der unsrigen, umfassendere Gesetze entdeckt und mit Vorliebe, vielleicht mit Vernachlässigung der gewohnten äusseren Form ausgebeutet werden, so kann es den Anschein erhalten, als wenn eine ganz neue Art von Geometrie sich Bahn bräche, und man kann vergessen, dass auch die Alten ihre geometrische Analysis gehabt, und dass die Neueren weder ihre Theorien ohne die Elemente befestigen, noch auch ohne fortgesetzte Synthesis zu ferneren Entdeckungen würden fortschreiten können.

II.

Abgekürztes Verfahren bei der Kubikwurzelausziehung.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller,

Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.

Bei der Anwendung der gewöhnlichen Formel zur Ausziehung der Kubikwurzel, nämlich:

$$(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$$

wird, wie Jeder weiss, mit zunehmender Zahl der Ziffern, die Berechnung der zweiten Zeile bald sehr beschwerlich. Der Einsender dieses hatte, um die Rechnung möglichst zu erleichtern, in seinem Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik den drei letzten stets wiederkehrenden Gliedern folgende Gestalt

$$\{3a.a.x^2 + (3a.x+b).b\}.b$$

Digitized by Google

gegeben, nach welcher sich die Zahl der Multiplicationen vermindert und der Werth von $3a$ sich zweimal benutzen lässt. Hiernach hat man die bis zu irgend einer Stelle gefundene Wurzel zu verdreifachen, dieses Product nochmals mit der Wurzel zu multipliciren und durch Division mit dem Hundertfachen dieses Werthes in den neuen Theilradicanden die nächste Ziffer b zu finden. Wird hierauf diese Ziffer dem bereits berechneten Dreifachen der bisherigen Wurzel rechts angehängt, die so erhaltene Zahl mit dieser Ziffer multiplicirt, das Product unter $3a.a$, jedoch zwei Stellen weiter rechts, gestellt und die Summe beider Producte nochmals mit der letztgefundenen Ziffer multiplicirt, so ist der neue vollständige Subtrahendus gefunden.

Ist z. B. 23456 die bereits gefundene Wurzel, so erhält man durch Verdreifachung und nachherige Multiplication mit 23456

70368,
23456
140736
211104
281472
351840
422208

als neuen Divisor: 1650551808 .., und wenn 9 die neue Wurzelziffer ist, durch Anhängung derselben an obige 70368, indem man mit 9 multiplicirt etc.

6333201

165061514001

als neuen Subtrahendus: 1485553626009 (9

Auch könnte

$$3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$$

in

$$\{3ax(ax+b)+b^2\}.b$$

verwandelt werden, was jedoch keine grössere Erleichterung gewährt.

Hierbei blieb aber der Uebelstand, dass mit jeder neuen Wurzelziffer die Zahl der Producte um 1 zunimmt.

Diess lässt sich beseitigen, wenn bei der Aufsuchung jedes neuen Divisors der nächstvorhergehende Divisor benutzt wird. Da nämlich bei der nächsten Theilradication der Divisor $3a.a$ in $3(ax+b)^2 = 3a.a.x^2+(2ax+b).3b$ übergeht, so hat man nur die bisherige Wurzel, ohne ihre letzte Ziffer, zu verdoppeln, rechts an das erhaltene Product diese Ziffer zu hängen, die so erhaltene Zahl mit dem Dreifachen derselben Ziffer zu multipliciren und das entstandene Product um das Hundertfache des vorigen Divisors zu vermehren, damit der neue Divisor erhalten werde.

Der vorige durch 2345 des obigen Beispiels bestimmte Divisor war 16497075. Man erhält jetzt durch Verdoppelung von 2345 und Anhängung der letzten Wurzelziffer 6:

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 4690_6 \\ \hline 140718^{(3} \\ \hline 844308^{(6} \\ 16497075.. \\ \hline 1650551808 \end{array}$$

und durch Multiplication mit 3.6 etc. als neuen Divisor.

Um die oben angegebene Berechnung des neuen Subtrahendus mit möglichst wenig Ziffern abzumachen, stelle man über die 4690_6 die verdreifachte bisherige Wurzel 2345C, hänge hieran die neue Wurzelziffer 9 und verfahre dann wie oben. Dann erhält die ganze Theilrechnung folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 70368_9 \\ 4690_6 \\ \hline 140718^{(3} \\ \hline 844308^{(6} \\ 16497075.. \\ \hline 1650551808.. \\ 6333201 \\ \hline 165061514001 \\ \hline 148555362609^{(9} \end{array}$$

Nach der zuerst gezeigten Methode, obwohl sie schon um Vieles kürzer als die durch $3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$ bezeichnete ist, sind demungeachtet zur Berechnung von n geltenden Wurzelziffern noch $3+4+5+..+n+1=\frac{n-1\,.\,n+4}{1\,.\,2}$; nach der zuletzt angegebenen aber, welche bei jeder Theilrechnung bloss vier Multiplicationen erfordert, nur $4(n-2)+3=4n-5$ Producte zu bilden, wo in beiden Fällen die eigentlich immer nur die letzte Wurzelziffer betreffenden Verdoppelungen und Verdreifachungen der Wurzel nicht mitgezählt worden sind. Man erspart daher bei $n$maliger Wurzelausziehung die Berechnung von $\frac{n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2}$ Producten. Aus diesem Grunde dürfte das, soviel der Einsender weiss, bisher noch nicht angewandte Verfahren einige Beachtung verdienen und sich vielleicht zur Aufnahme in die Lehrbücher der Arithmetik eignen.

Digitized by Google

III.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

I. Ueber die mechanische Construction der Lemniscate.

Der geometrische Ort für die Fusspunkte aller Perpendikel, welche von dem Mittelpunkte einer Hyperbel auf die Tangenten derselben gefällt werden können, ist bekanntlich eine schleifenförmige Curve, von den Schriftstellern vorzugsweise „die Fusspunktencurve der Hyperbel“ genannt, mit einer Gleichung vom vierten Grade

$$(x^2+y^2)^2 = \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2$$

zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, wobei die Abscissen x auf der Queeraxe der Hyperbel von dem Mittelpunkte derselben an gerechnet werden und wobei α die halbe Queeraxe, β die halbe Nebenaxe der Hyperbel bedeutet *). Setzt man hier $x = u\cos\psi$, $y = u\sin\psi$, so erhält man die Polargleichung

$$u^2 = \alpha^2\cos\psi^2 - \beta^2\sin\psi^2.$$

*) Man kann über die Fusspunktencurven der Kegelschnitte überhaupt eine Abhandlung in Crelle's Journal. Bd. XX. S. 88. von Herrn Rudolf Wolf in Bern nachsehen, worin jedoch, was die Fusspunktencurve der Ellipse anbetrifft, die zur Gleichung

$$u^2 = \alpha^2\cos\psi^2 + \beta^2\sin\psi^2$$

hinzugefügte Bemerkung (S. 90.): Dies sei „eine durch die Untersuchungen des Herrn Hofrath Gauss schon bekannte Form der Ellipsengleichung“, nicht so zu verstehen ist, als wäre die gedachte Fusspunktencurve selbst eine Ellipse.

Digitized by Google

Für den Fall, dass die Hyperbel gleichseitig, also $\beta = \alpha$ ist, nehmen diese Gleichungen die einfachere Form an

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$
$$u^2 = a^2 \cos 2\psi;$$

und die Fusspunktencurve geht, wie hieraus ersichtlich ist, in die gemeine Lemniscate über. Nun hat Herr Dr. Haedenkamp in dem dritten Theile dieses Archivs. Seite 400. folgende mechanische Construction für die Fusspunktencurve der Hyperbel, also namentlich auch für die Lemniscate, bekannt gemacht. „Denkt man sich zwei gleiche Kreise, deren Mittelpunkte C und C' seien, und bewegt eine gerade Linie gleich der Axe CC' so, dass deren Endpunkte sich in entgegengesetzter Richtung in den Peripherien der beiden Kreise bewegen, so beschreibt die Mitte der Linie CC' die Fusspunktencurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{r}{4}\cos\psi^2 - \left(\frac{d^2 - r^2}{4}\right)\sin\psi^2 = u^2$$

ist, wobei r den Radius der Kreise, d die Entfernung der Mittelpunkte und u den Radius Vector der Curve vorstellt. Macht man

$$d^2 = 2r^2,$$

so wird die Curve eine Lemniscate."

Diese Entdeckung muss in doppelter Hinsicht interessant genannt werden. Denn einerseits macht die Construction der in Untersuchung stehenden Curven auf die hier gelehrte Art weit weniger Mühe, als wenn man einzelne Tangenten an die Hyperbel construiren und die Fusspunkte der zugehörigen, vom Mittelpunkte darauf gefällten Perpendikel bestimmen wollte. Zweitens aber, weil diese Curven alsdann durch einen Punkt (den Halbirungspunkt von d) beschrieben werden, der mit zwei andern, auf gegebenen Curven fortrückenden Punkten, nämlich den Endpunkten von d, fest verbunden ist, so lässt sich die von Chasles und Abel-Transon ersonnene und vor einiger Zeit von mir erläuterte Methode *) zur geometrischen Construction der Tangente, Normale und des Krümmungshalbmessers sehr bequem anwenden. Allein bei einer genaueren Prüfung fand ich, dass die obige, von Haedenkamp aufgestellte Gleichung nicht ganz richtig ist, dass nämlich der Divisor 4 in den beiden Gliedern links vom Gleichheitszeichen beide Male weggestrichen werden muss. Die folgende Rechnung wird diese Behauptung rechtfertigen.

Wenn wir die Abscissen x auf der Axe CC' und zwar vom Halbirungspunkte dieser Axe an zählen, und wenn wir den nächstgelegenen Scheiteln der beiden Kreise C und C' beziehungsweise die Abscissen ξ und $-\xi$ zuschreiben, so hat der Kreis C die Gleichung

$$y^2 = 2r(x - \xi) - (x - \xi)^2,$$

*) S. Theil VII. Heft 1. dieses Archivs.

Digitized by Google

und dem Kreise um C' entspricht die Gleichung

$$y^2 = 2r(-x-\xi) - (-x-\xi)^2$$
$$= -2r(x+\xi) - (x+\xi)^2.$$

Wenn wir daher die sich bewegende Gerade in einer beliegen Stellung fixiren und unter x_2 und y_2 die Coordinaten desjenigen Endpunkts verstehen, welcher auf der Peripherie des Kreises C ruht, und unter x_1, y_1 die Coordinaten ihres andern, auf dem Kreise C' befindlichen Endpunkts, so bestehen die Gleichungen

$$(1) \qquad y_2 = \pm\sqrt{2r(x_2-\xi) - (x_2-\xi)^2},$$

$$(2) \qquad y_1 = \pm\sqrt{-2r(x_1+\xi) - (x_1+\xi)^2}.$$

Es sei nun ferner die constante Länge der sich bewegenden Geraden gleich d, wobei wir grösserer Allgemeinheit wegen noch nicht $d = CC' = 2(\xi+r)$ voraussetzen wollen, so ist jedenfalls

$$(3) \qquad (y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 = d^2.$$

Endlich möge der Halbirungspunkt der sich bewegenden Geraden bei der angenommenen Stellung die Coordinaten x und y haben, so ist

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2}(x_2+x_1),$$

$$(5) \qquad y = \frac{1}{2}(y_2+y_1);$$

und man wird die Gleichung zwischen x und y für die vom Halbirungspunkt beschriebene Curve gewinnen, sobald es gelingt aus diesen fünf Gleichungen (1) bis (5) die vier Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 zu eliminiren.

Die Gleichung (4) giebt aber

$$x_2 = 2x - x_1,$$

also

$$x_2 - x_1 = 2(x - x_1),$$

und mit Rücksicht hierauf erhält man aus (3) den Werth

$$y_2 - y_1 = \pm\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2};$$

aber wegen (5) ist

$$y_2 + y_1 = 2y,$$

daher wird

$$y_2 = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2},$$

$$y_1 = y \mp \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2}.$$

Stellt man hiermit die Gleichungen (1) und (2) zusammen, so erhellt, dass es nur noch darauf ankommt, aus den beiden Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} y \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} = \pm\sqrt{2r(2x-x_1-\xi)-(2x-x_1-\xi)^2}, \\ y \mp \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} = \pm\sqrt{-2r(x_1+\xi)-(x_1+\xi)^2} \end{cases}$$

die partikularisirende Grösse x_1 zu eliminiren.

Quadrirt man aber und addirt, so erhält man

$$y^2 + \frac{1}{4}d^2 - (x-x_1)^2 = 2r(x-x_1-\xi) - x^2 - (x-x_1-\xi)^2,$$

also

$$y^2 + \frac{1}{4}d^2 = 2r(x-x_1-\xi) - x^2 - \xi^2 + 2(x-x_1)\xi,$$

oder

$$(7)\qquad x^2 + y^2 + \frac{1}{4}d^2 - \xi^2 = 2(r+\xi)(x-x_1-\xi),$$

und wenn man die Gleichungen (6), nachdem man sie quadrirt hat, von einander subtrahirt, so ergiebt sich sogleich

$$\begin{aligned} y\sqrt{d^2 - 4(x-x_1)^2} &= 2rx - 2x^2 + 2x(x_1+\xi) \\ &= 2rx - 2x(x-x_1-\xi). \end{aligned}$$

Substituirt man nun hier die aus (6) fliessenden Werthe

$$2(x-x_1-\xi) = \frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{4}d^2 - \xi^2}{r+\xi},$$

$$2(x-x_1) = \frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{4}d^2 + 2r\xi + \xi^2}{r+\xi};$$

so hat man folgende Gleichung:

$$y\sqrt{[(r+\xi)^2 d^2 - (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}d^2 + 2r\xi + \xi^2)^2]}$$

$$= x(2r^2 + 2r\xi - x^2 - y^2 - \frac{1}{4}d^2 + \xi^2),$$

Digitized by Google

oder

$$(8)\quad \begin{cases} y^2.[(r+\xi)^2 d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi)^2] \\ \qquad = x^2.[2(r+\xi)^2-(x^2+y^2+\frac{1}{4}d^2+2r\xi+\xi^2)]^2. \end{cases}$$

Sie ist vom sechsten Grade und entspricht dem allgemeinsten Falle.

Sobald aber

$$d = CC' = 2(r+\xi)$$

angenommen wird, so geht (8) über in

$$y^2[\tfrac{1}{4}d^4-(x^2+y^2+\tfrac{1}{2}d^2-r^2)^2] = x^2[\tfrac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\tfrac{1}{2}d^2-r^2)]^2,$$

und nun kann durch $[\frac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\frac{1}{2}d^2-r^2)]$ auf beiden Seiten dividirt werden, wodurch sich ergiebt:

$$y^2[\tfrac{1}{2}d^2+(x^2+y^2+\tfrac{1}{2}d^2-r^2)] = x^2[\tfrac{1}{2}d^2-(x^2+y^2+\tfrac{1}{2}d^2-r^2)],$$

d. h.

$$y^2(x^2+y^2+d^2-r^2) = x^2(r^2-x^2-y^2),$$

oder, gehörig geordnet:

$$(9)\qquad (x^2+y^2)^2+(d^2-r^2)y^2-r^2x^2=0.$$

Dies ist die verlangte Gleichung, welche, wie man sieht, der Fusspunktencurve einer Hyperbel angehört und durch die Substitution

$$x = u\cos\psi,\quad y = u\sin\psi$$

sofort in

$$u^2 = r^2\cos\psi^2-(d^2-r^2)\sin\psi^2$$

transformirt wird.

II. Ueber die sogenannte Neoide.

In einer pädagogischen Zeitschrift kam mir neulich ein Artikel zu Gesicht, worin Jemand, um seine Leser an transcendente Curven zu erinnern, beispielsweise den Namen Neoide aufführt.

Digitized by Google

Dem grössten Theil der Geometer dürfte zwar unter dieser Benennung keine bestimmte Curve bekannt geworden sein, das Verständniss wird aber dadurch möglich gemacht, dass auf Burg's Lehrbuch der Mathematik (Wien. 1832.) Bezug genommen wird, worin sich allerdings (Bd. III. S. 241.) der Beleg findet. Allein Burg muss zur Aufstellung dieser Species einer transcendenten Curve sich haben verleiten lassen durch ganz besondere Umstände, worüber man sich nicht leicht wird eine Muthmaassung bilden können, denn weder vor noch nach Erscheinen jenes Lehrbuchs findet sich von der Neoide bei den Schriftstellern eine Spur, und die so benannte Curve bedarf auch in der That keines besonderen Namens, vielmehr sind schon von dem berühmten Mathematiker des Alterthums, dem Vater der höheren Geometrie, ihre Eigenschaften erforscht und bekannt gemacht, und die Nachkommen haben, um sein Gedächtniss zu ehren, gerade diese Curve nach seinem Namen benannt. Was Herr Professor Burg über die Entstehung seiner Neoide angiebt, läuft nämlich darauf hinaus, dass der Radius eines Kreises, während er sich um den Mittelpunkt dreht, allmählich grösser wird, und zwar in direktem Verhältniss mit dem wachsenden Polarwinkel φ. Stellt also r die ursprüngliche Länge des Radius, entsprechend dem Polarwinkel $\varphi = 0$ vor, und entspricht dem Polarwinkel $\varphi = \pi$ die Länge $r + a$, so findet zwischen einem beliebigen φ und dem zugehörigen Radius Vector u die Gleichung Statt

$$u = r + \frac{a\varphi}{\pi},$$

und gerade so steht sie am angeführten Orte. Nun ist aber weiter nichts merkwürdig, als wie man sich durch diese oft gebrauchte Gleichung einer wohlbekannten Curve konnte necken lassen, wie namentlich der gelehrte und umsichtige Professor Burg die wahre Natur derselben einen Augenblick verkennen mochte. Zumal so bald man

$$\varphi = \psi - \frac{\pi r}{a}$$

setzt, verwandelt sich die vorige Gleichung augenblicklich in

$$u = \frac{a\psi}{\pi} = \frac{2a}{2\pi} \cdot \psi,$$

nämlich in die Jedermann geläufige und zehn Seiten vorher (S. 231.) von Herrn Burg selbst aufgestellte Polargleichung der Archimedischen Spirale! Die Neoide ist also nichts anders als eine Archimedische Spirallinie, bei welcher der constante Abstand zweier auf einander folgender Windungen $2a$ beträgt.

Digitized by Google

III. Ueber die Nabelpunkte auf dem Ellipsoid.

Auf jedem dreiaxigen Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

wobei $a>b>c$ vorausgesetzt werden soll, kann man bekanntlich kreisförmige Schnitte dadurch hervorbringen, dass man die schneidende Ebene durch die mittlere Axe $2b$ unter einem solchen Neigungswinkel ϑ gegen die Ebene XY legt, dass

$$\operatorname{tang}\vartheta=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$$

ist. Die Coordinaten desjenigen auf der Oberfläche des Ellipsoids gelegenen Punkts, in welchem ein solcher Kreis sich mit der durch die Axen $2a$ und $2c$ bestimmten, in der Ebene XZ liegenden Ellipse durchschneidet, sind

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1&=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\\ y_1&=0,\\ z_1&=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}. \end{aligned}$$

Im Ganzen giebt es natürlich vier solche Punkte, von denen je zwei in einem Durchmesser der Ellipse $(2a, 2c)$ liegen.

Es giebt aber auf dem dreiaxigen Ellipsoid auch vier Punkte, in welchen die Fläche eine sphärische Krümmung besitzt, so dass rings herum alle Normalschnitte gleich grosse Krümmungshalbmesser haben, und diese Punkte, die sogenannten Nabelpunkte (ombilics) liegen ebenfalls auf dem Umfange der Ellipse $(2a, 2c)$. Man weiss, dass die Existenz so wie die Ausmittelung dieser Punkte von der Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} (1+q^2)s-pqt&=0,\\ (1+q^2)r-(1+p^2)t&=0,\\ (1+p^2)s-pqr&=0 \end{aligned}$$

abhängt, von denen die dritte jedesmal eine Folge der beiden andern ist, und wobei in herkömmlicher Weise durch p, q, r, s, t die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$ vorgestellt werden *). Auf das Ellipsoid

*) Vergl. z. B. Cauchy Applications du Calc. infinités. à la Géometrie. Leç. XIX. p. 354. Leroy Analyt. Geom. §. 397. und §. 429. Moigno Calc. diff. et Calc. intégr. T. I. Leç. XXXIV. p. 372.

Digitized by Google

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bezogen, nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$\frac{(b^2-c^2)\,c^4xy}{a^2b^4z^3}=0,$$

$$\frac{(a^2-b^2)\,c^4}{a^2b^2z^3}\left[\left(\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-1\right]=0,$$

$$\frac{(a^2-c^2)\,c^4xy}{a^4b^2z^3}=0;$$

und man erhält daraus, mit Rücksicht auf die gegebene Gleichung des Ellipsoids, für die Coordinaten eines Nabelpunktes die Werthe:

$$(2)\qquad x_2=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad y_2=0,\qquad z_2=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den bei (1) aufgestellten führt nun zu einem interessanten Lehrsatze. Um diesen aber mit grösserer Leichtigkeit entwickeln zu können, will ich den geneigten Leser ersuchen, sich, wenigstens in Gedanken, folgende einfache Figur zu entwerfen. Eine halbe Ellipse stelle den durch die Coordinatenebene XZ hervorgebrachten elliptischen Hauptschnitt mit den Axen $2a$ und $2c$ vor, ihr Mittelpunkt sei O, und an die Endpunkte der grossen Axe $2a$ seien die Buchstaben A, A', an den Endpunkt der Halbaxe c sei C gesetzt. Nun nehme man auf dem elliptischen Quadranten AC einen Punkt M an, welcher den Scheitel eines kreisförmigen Schnitts vorstellen möge, und fälle das Perpendikel MP auf OA, so dass den Gleichungen (1) zu Folge

$$OP=+x_1=a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

$$MP=\quad z_1=c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

sein soll. Ferner nehme man auf dem elliptischen Quadranten CA' einen Punkt N an, welcher den auf diesem benachbarten Quadranten gelegenen Nabelpunkt vorstellen möge, und fälle das Perpendikel NQ auf OA', so ist den Gleichungen (2) zu Folge

$$OQ=-x_2=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

$$NQ=\quad z_2=c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Digitized by Google

Es besteht also die Gleichung

$$OP \times MP = OQ \times NQ,$$

oder die Proportion

$$OQ : MP = OP : NQ.$$

Dies sind aber, wie allgemein bekannt ist, die charakteristischen Relationen, welche zwischen den Coordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Diameter in der Ellipse Statt finden; wir haben also folgenden Lehrsatz:

Wenn man einerseits den auf dem elliptischen Quadranten $\begin{Bmatrix} AC \\ A'C \end{Bmatrix}$ gelegenen Scheitel eines kreisförmigen Schnitts, andererseits den auf dem benachbarten Quadranten $\begin{Bmatrix} A'C \\ AC \end{Bmatrix}$ gelegenen Nabelpunkt mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids verbindet, so ist der eine dieser Semidiameter mit dem andern conjugirt.

Mit Anwendung dieses Satzes würde man, sobald es darauf ankäme, die Formeln (2) für die Coordinaten eines Nabelpunkts möglichst bequem zu reproduciren, und wenn man auch die Formeln (1) erst entwickeln müsste, folgende einfache Rechnung zu machen haben. Da der durch die Axe $2b$ und den Punkt M gehende Schnitt des Ellipsoids ein Kreis sein soll, so muss $OM^2 = b^2$, d. h.

$$x_1^2 + z_1^2 = b^2,$$

aber auch

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

sein. Hieraus erhält man

$$x_1^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{b^2}{c^2} - 1,$$

also

$$x_1 = a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a_2 - c^2}}$$

und

$$z_1^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

also

$$z_1 = c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Digitized by Google

Nun ist zu Folge der bekannten Eigenschaft conjugirter Diameter und ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Coordinaten

$$x_2 : z_1 = a : c,$$
$$x_1 : z_2 = a : c;$$

folglich

$$x_2 = \frac{a}{c} \cdot z_1 = a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$
$$z_2 = \frac{c}{a} \cdot x_1 = c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}};$$

welches die verlangten Formeln sind

Dem vorher gefundenen Lehrsatze lässt sich jedoch auch noch eine andere Seite abgewinnen. Alle das Ellipsoid schneidende Ebenen, welche nicht durch den Mittelpunkt O gehen, aber parallel zu der durch $2b$ und M gelegten Ebene sind, liefern bekanntlich lauter kreisförmige Schnitte, und da die an die Ellipse ACA' im Punkte N zu construirende Tangente vermöge der Eigenschaft conjugirter Diameter parallel mit OM läuft, so muss offenbar die in N an das Ellipsoid zu legende tangirende Ebene mit den Ebenen der gedachten kreisförmigen Schnitte gleichfalls parallel ausfallen. Deshalb steht ein in N auf diese tangirende Ebene errichtetes Perpendikel senkrecht auf allen diesen kreisförmigen Schnitten, und man kann daher sagen: ein Nabelpunkt auf dem Ellipsoid ist zugleich ein solcher Punkt, dessen Normallinie perpendikulär auf den kreisförmigen Schnitten steht, welcher Satz sich auch umkehren lässt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man für den Krümmungshalbmesser an einem Nabelpunkte des Ellipsoids den einfachen Ausdruck

$$R = \frac{b^3}{ac}$$

findet.

Digitized by Google

IV.

Bestimmung der grössten, in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Stud. der Math. zu Marburg.

Im zweiten Theile dieses Archivs. Seite 400., so wie im vierten Bande. Seite 373., sind von Herrn L. Mossbrugger einige Aufgaben, die Lehre vom Maximum und Minimum betreffend, gelöst worden, unter welchen sich auch folgende findet: die grösste Ellipse in ein gegebenes Parallelogramm zu beschreiben. Mit dieser Aufgabe verwandt ist die Bestimmung der grössten, in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse, welche ich auf folgendem Wege versucht habe.

§. 1.

Es sei (Taf. II. Fig. 15.) ABC das gegebene Dreieck, dessen Seiten a, b, c, und die diesen gegenüber liegenden Winkel α, β, γ heissen mögen. Wir wollen die verlangte Ellipse auf rechtwinklige Coordinaten beziehen und nehmen desshalb AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Coordinaten an.

Die Lage der gesuchten Ellipse wird bestimmt sein, wenn die Coordinaten der Berührungspunkte der Ellipse mit den Seiten des Dreiecks und somit auch die des Mittelpunktes O derselben bekannt sind. Die Berührungspunkte seien M, N, Q und ihre Coordinaten beziehungsweise:

$$x_1, y_1 = 0;\quad x_2, y_2;\quad x_3, y_3.$$

Unser nächstes Ziel ist nun, den Inhalt der gesuchten Ellipse, den wir mit Z bezeichnen wollen, auszudrücken durch diese Coordinaten, nämlich

Digitized by Google

$$Z = f(x_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

darzustellen.

Verbinden wir den Halbirungspunkt K der Sehne QM mit A, so liegt, wie man leicht einsehen wird, der Mittelpunkt der Ellipse in der Verlängerung dieser Linie AK. Dasselbe gilt von der Linie BS, welche durch den Halbirungspunkt der Sehne MN gezogen worden ist; daher wird sich der Mittelpunkt O der Ellipse als der Durchschnitt dieser beiden Geraden ergeben.

Die Gerade AK geht durch die Punkte

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x = \frac{x_1 + x_3}{2} \\ & \text{und} \\ y = 0 & y = \frac{y_3}{2}\ ; \end{array}$$

daher ist ihre Gleichung

$$y = \frac{y_3}{x_1 + x_3} \cdot x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ebenso ergibt sich für die Gerade BS, da sie durch die Punkte

$$\begin{array}{ll} x = c & x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ & \text{und} \\ y = 0 & y = \frac{y_2}{2} \end{array}$$

geht, die Gleichung

$$y = \frac{y_2}{x_1 + x_2 - 2c}(x - c). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) resultirt für die Coordinaten des Durchschnittspunktes O:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{c\, y_2 (x_1 + x_3)}{y_2 (x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \\ y = \frac{c\, y_2 y_3}{y_2 (x_1 + x_2) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Ferner finden wir leicht:

$$\left.\begin{array}{l} AO = \frac{c\, y_2}{\frac{1}{2}(x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\ AK = \frac{1}{2} \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\ OK = \left(\frac{c\, y_2}{y_2 (x_1 + x_3) - y_3 (x_1 + x_2 - 2c)} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y_3^2 + (x_1 + x_3)^2} \\ MK = \frac{1}{2} \sqrt{y_3^2 + (x_1 - x_3)^2} \end{array}\right\} \quad \ldots (4)$$

Digitized by Google

Wird nun AO bis E verlängert, so erkennt man auf der Stelle, dass DE ein der Sehne QM zugeordneter Durchmesser ist. Daher erhalten wir, wenn die conjugirten Diameter mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden, folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} MK^2 &= \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2}(\mathfrak{A}^2 - OK^2) \\ AK &= \frac{\mathfrak{A}^2 - OK^2}{OK} \\ AO &= \frac{\mathfrak{A}^2}{OK} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Setzen wir hier für AO und OK die in (4) gefundenen Werthe, so ergibt sich:

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{cy_2(y_3^2+(x_1+x_3)^2)\,[2cy_2 - y_2(x_1+x_3)+y_3(x_1+x_2-2c)]}{2\,[y_2(x_1+x_3)-y_3(x_1+x_2-2c)]^2} \ldots (6)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{cy_2\,(y_3^2+(x_1-x_3)^2)}{2[y_2(x_1+x_3)-y_3(x_1+x_2-2c)]} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Es ist ferner

$$\text{tang}\, KAM = \frac{y_3}{x_1+x_3};$$

daher

$$\sin KAM = \frac{y_3}{\sqrt{y_3^2+(x_1+x_3)^2}}.$$

Aus dem Dreieck AKM folgt weiter:

$$x_1 : MK = \sin AKM : \sin MAK,$$

woraus

$$\sin AKM = \frac{x_1}{MK}.\sin MAK,$$

d. i.

$$\sin AKM = \frac{x_1\,y_3}{\frac{1}{2}\sqrt{y_3^2+(x_1+x_3)^2}\,\sqrt{y_3^2+(x_1-x_3)^2}} \ldots\ldots (8)$$

Der Inhalt einer Ellipse wird nun bekanntlich ausgedrückt durch

$$Z = \mathfrak{A}.\mathfrak{B}.\pi.\sin AKM,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (6), (7), (8):

$$Z = c.\pi\frac{x_1\,y_2\,y_3}{N}\sqrt{\frac{2cy_2}{N}-1} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Digitized by Google

wo der Kürze wegen

$$y_2(x_1+x_3)-y_2(x_1+x_2-2c)=N$$

gesetzt ist.

§. 2.

In dieser Formel für Z kommen vor die Grössen: x_1, x_2, y_2, x_3, y_3. Da aber der Inhalt der Ellipse bestimmt wird durch zwei beliebige, jedoch von einander unabhängige von diesen fünf Grössen, weil die Lage und Gestalt einer in ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Ellipse schon durch zwei Berührungspunkte vollkommen determinirt ist, so kommt es jetzt darauf an, Z als Function von zwei independenten Variabeln, etwa $Z=f(x_1, y_2)$ darzustellen. Hierzu sind drei neue Gleichungen zwischen jenen fünf Grössen erforderlich, welche man, wie folgt, erhält.

Verbinden wir A, B, C mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten N, Q, M der Ellipse, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien nach einem bekannten Satze in einem Punkte, und man hat die Relation:

$$AM.QC.BN=AQ.CN.BM,$$

d. i.

$$x_1(b-x_3\sec\alpha)\frac{y_2}{\sin\beta}=x_3\sec\alpha\,(a-\frac{y_2}{\sin\beta})(x-x_1)\quad\ldots(10)$$

Ausserdem haben wir noch:

$$\left.\begin{array}{l} y_3=x_3\,\mathrm{tang}\,\alpha \\ y_2=(c-x_2)\,\mathrm{tang}\,\beta \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

Aus (10) ergibt sich:

$$x_3=\frac{b\,x_1\,y_2\cos\alpha}{(2x_1-c)\,y_2+a\,(c-x_1)\sin\beta}\ldots\ldots(12)$$

daher aus (11):

$$y_3=\frac{b\,x_1\,y_2\sin\alpha}{(2x_1-c)\,y_2+a\,(c-x_1)\sin\beta}\ldots\ldots(13)$$

$$x_2=c-y_2\,\mathrm{cotg}\,\beta.\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Indem wir die Werthe für x_2, x_3, y_3 aus (12), (13), (14) in (9) substituiren, erhalten wir:

$$Z=\tfrac{1}{2}b\pi c\sin\alpha\frac{U^2}{W^2}(c-x_1)y_2.\ldots\ldots(15)$$

wo $U=bx_1\sin\alpha-x_1y_2$ und $W=x_1y_2+b\sin\alpha(c-x_1)$.

Digitized by Google

§. 3.

Damit nun dieser Ausdruck ein Maximum werde, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial y_2}\right)=0:$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung:

$$\tfrac{1}{2}bc\pi\sin\alpha\left[(c-x_1)y_2.\tfrac{1}{2}U^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-U^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}\cdot y_2-\tfrac{3}{2}U^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}(c-x_1)y_2\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\right]=0,$$

$$\tfrac{1}{2}bc\pi\sin\alpha(c-x_1)\left[U^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}y_2U^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-\tfrac{3}{2}y_2U^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)\right]=0;$$

oder einfacher:

$$(c-x_1)\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)-2U-3(c-x_1)\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=0,$$

$$2U+y_2\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)-3y_2\frac{U}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=0.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)=b\sin\alpha-y_2=\frac{U}{x_1}\text{ und }\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=y_2-b\sin\alpha=-\frac{U}{x_1},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)=-x_1\qquad\text{und }\left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)=x_1.$$

Daher lässt sich die erste der beiden gefundenen Bedingungsgleichungen durch U, die andere durch x_1 dividiren, und man erhält, sobald mit W multiplicirt worden ist, die Gleichungen

$$2x_1y_2-b(c-x_1)\sin\alpha=0,$$

$$2x_1y_2+2b(c-x_1)\sin\alpha=3cy_2.$$

Wird die erste mit 2 multiplicirt und zur andern addirt, so ergibt sich sofort

$$x_1=\frac{c}{2};$$

alsdann ist

$$y_2=\frac{a}{2}\sin\beta=\frac{b}{2}\sin\alpha;$$

Digitized by Google

daher aus (14): $x_2 = c - \frac{a}{2}\cos\beta$,

„ (13): $y_3 = \frac{b}{2}\sin\alpha$,

„ (12): $x_3 = \frac{b}{2}\cos\beta$.

Wir haben somit das interessante Resultat gefunden, dass die grösste Ellipse, die in ein Dreieck beschrieben werden kann, die Seiten desselben in ihren Mitten berührt, und dass ihr Mittelpunkt in Folge dessen mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammenfällt.

Der Inhalt dieser Ellipse selbst ergibt sich aus (15), indem man für x_1 und y_2 die oben gefundenen Werthe substituirt, als:

$$J = \frac{1}{6\sqrt{3}}\, b\, c\, \pi \sin\alpha.$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC ist aber $= \frac{b\,.\,c}{2}\sin\alpha$. Daher besteht die Proportion:

$$\text{Dreieck} : \text{Ellipse} = \frac{b.c}{2}\sin\alpha : \frac{1}{6\sqrt{3}}\, b\,.\,c\,.\,\pi \sin\alpha$$
$$= 3\sqrt{3} : \pi\ ^*).$$

---

*) Ueber die Bestimmung der grössten in ein gegebenes Viereck zu beschreibenden Ellipse, womit die in dem obigen Aufsatze aufgelöste Aufgabe begreiflicherweise nahe zusammenhängt, da ein Viereck in ein Dreieck übergeht, wenn man eine Seite desselben verschwinden lässt, s. m. eine treffliche Abhandlung von Gauss in der monatlichen Correspondenz. Band XXII. S. 112. und Aufsätze von Pfaff, Mollweide und Schumacher ebendas. S. 223., S. 227. und S. 507.; auch eine Abhandlung von mir in dem ersten Theile meiner Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg. 1838. 4. G.

Digitized by Google

V.

Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten.

Von

dem Herausgeber.

Zur Uebung der Anfänger in der Rechnung mit imaginären Grössen scheint mir folgende Auflösung der quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten, die ich dem Wesentlichen nach aus den Exercices de Mathématiques par Cauchy. 4me et 41me Livr. p. 79. entlehne, recht zweckmässig zu sein.

Wir wollen zuerst die reine Gleichung des zweiten Grades

1) $$x^2 = a + b\sqrt{-1}$$

auflösen, wo a und b reelle Grössen bezeichnen, und setzen zu dem Ende

2) $$x = p + q\sqrt{-1},$$

wo p und q ebenfalls reelle Grössen bezeichnen. Führen wir diesen Ausdruck von x in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir die Gleichung

3) $$p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1},$$

aus der sich zur Bestimmung der Grössen p und q die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

4) $$p^2 - q^2 = a,\ 2pq = b.$$

Wegen der zweiten dieser beiden Gleichungen und der Gleichung 2) hat man

5) $$x = p + \frac{b}{2p}\sqrt{-1}$$

oder

Digitized by Google

6) $$x = \frac{b}{2q} + q\sqrt{-1}.$$

Quadrirt man aber die beiden Gleichungen 4) und addirt sie dann zu einander, so erhält man

7) $$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2+b^2},$$

wo natürlich, weil p^2+q^2 stets eine positive Grösse ist, die Quadratwurzel positiv genommen werden muss. Aus den beiden Gleichungen

$$p^2 - q^2 = a, \quad p^2 + q^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

ergiebt sich nun auf der Stelle durch Addition und Subtraction

8) $$p^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \quad q^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Also ist

9) $$p = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad q = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und nach 5) und 6) erhält man daher für x die beiden Werthe.

10) $$x = \pm\left\{\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\}.$$

oder

11) $$x = \pm\left\{\frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\}.$$

Für $b=0$ und ein positives a liefert die Gleichung 10) die beiden folgenden Werthe für x:

12) $$x = \pm a^{\frac{1}{2}}.$$

Für $b=0$ und ein negatives a liefert die Gleichung 11) die beiden folgenden Werthe für x:

13) $$x = \pm(-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Für $a=0$ und ein positives b liefern die Gleichungen 10) und 11) die beiden folgenden Werthe für x:

14) $$x = \pm\left\{\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right\}$$

oder

Digitized by Google

15) $$x = \pm \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt{-1}).$$

Für $a=0$ und ein negatives b liefern die Gleichungen 10) und 11) die beiden folgenden Werthe für x:

16) $$x = \pm \left\{(-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}} - (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right\},$$

oder

17) $$x = \pm (-\frac{b}{2})^{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{-1}).$$

Man hat, um alles dieses richtig zu verstehen, nur stets festzuhalten, dass nach dem Obigen $\sqrt{a^2 + b^2}$ jederzeit positiv zu nehmen ist.

Die zwei Wurzeln der Gleichung

18) $$x^2 = \sqrt{-1}$$

sind also nach 14) und 15):

19) $$x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

oder

20) $$x = \pm \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Die zwei Wurzeln der Gleichung

21) $$x^2 = -\sqrt{-1}$$

sind dagegen nach 16) und 17):

22) $$x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

oder

23) $$x = \pm \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Haben wir nun die Gleichung

24) $$x^2 + Ax + B = 0$$

aufzulösen, so lässt sich dieselbe bekanntlich auf die Form

25) $$(x + \frac{A}{2})^2 = \frac{A^2}{4} - B$$

Digitized by Google

bringen, und nun ganz wie die Gleichung 1) auflösen, welches wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die gegebene Gleichung sei

$$26) \qquad x^2 - (5+4\sqrt{-1})\,x + 6 + 8\sqrt{-1} = 0,$$

so bringt man dieselbe zuerst leicht auf die Form

$$\left\{x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})\right\}^2 = (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})^2 - (6+8\sqrt{-1}),$$

d. i. auf die Form

$$\left\{x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1})\right\}^2 = -\tfrac{15}{4} + 2\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun im Obigen $a = -\frac{15}{4}$, $b = 2$, so ist nach 10):

$$27) \qquad x - (\tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1}) = \pm(\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{-1}),$$

und folglich

$$28) \qquad x = \tfrac{5}{2} + 2\sqrt{-1} \pm (\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{-1}).$$

Also hat die Gleichung 26) die beiden folgenden Wurzeln:

$$29) \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 2\sqrt{-1} - (\frac{1}{2} + 2\sqrt{-1}) = 2, \\ x = \frac{5}{2} + 2\sqrt{-1} + (\frac{1}{2} + 2\sqrt{-1}) = 3 + 4\sqrt{-1}; \end{cases}$$

von denen die erste reell, die zweite imaginär ist.

Dieses Exempel ist deshalb lehrreich, weil man aus demselben sieht, dass eine quadratische Gleichung mit imaginären Coefficienten eine reelle und eine imaginäre Wurzel haben kann, da bekanntlich im Gegentheil die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten beide reell sind, immer entweder beide reell, oder beide imaginär sind.

Eine ähnliche Ausführung für die cubischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten wird eine gute Uebung für Schüler sein.

Digitized by Google

VI.

Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch.

Von

Herrn P. Seeling,

Elementarlehrer zu Hückeswagen im Regierungsbezirk Düsseldorf.

---

§. 1.

Vermittelst der Kettenbrüche kann man aus unvollständigen Kuben die Wurzel ziehen. Dieses soll zuerst an einem Beispiele in Zahlen gezeigt und dann auch allgemein dargestellt werden.

Es sei $x = \sqrt[3]{10}$.

Die grösste in $\sqrt[3]{10}$ enthaltene ganze Zahl ist $= 2$. Also ist

$$x = 2 + \frac{\sqrt[3]{10} - 2}{1}.$$

Der Bruch $\frac{\sqrt[3]{10}-2}{1}$ ist kleiner als 1. Man setze denselben $= \frac{1}{x^I}$; so ist

$$x^I = \frac{1}{\sqrt[3]{10} - 2},$$

und zwar $x^I > 1$. Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4$ [1]). Dann erhält derselbe die Form:

$$\frac{\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4}{10 - 8} = \frac{\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4}{2}.$$

---

1) Weil $(a-b).(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

Digitized by Google

Die grösste in $\sqrt[3]{100}$ steckende ganze Zahl ist 4, und die grösste in $2\sqrt[3]{10}$ steckende ebenfalls 4. Demnach ist die grösste in

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}$$

enthaltene ganze Zahl $=6$, und

$$\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4}{2}$$

ist also

$$=6+\frac{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}-8}{2}.$$

Diesen letzten Bruch setze man $=\frac{1}{x^{II}}$, so ist

$$x^{II}=\frac{2}{\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}-8}.$$

Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$(\sqrt[3]{100})^2+(2\sqrt[3]{10})^2+8^2-\sqrt[3]{100}.2\sqrt[3]{10}+8.\sqrt[3]{100}+8.2\sqrt[3]{10}\ ^{2})$$
$$=12\sqrt[3]{100}+26\sqrt[3]{10}+44.$$

Dann erhält man:

$$x^{II}=\frac{2(12\sqrt[3]{100}+26\sqrt[3]{10}+44)}{100+80-512+480}=\frac{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}+22}{37}.$$

Die grösste in diesem Bruche, den man auch so schreiben kann:

$$\frac{\sqrt[3]{21600}+\sqrt[3]{21970}+22}{37},$$

enthaltene ganze Zahl ist

$$\frac{27+28+22}{37}=2.$$

Demnach ist

$$x^{II}=2+\frac{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}-52}{37}.$$

---

2) Weil $(a+b-c).(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)=a^3+b^3-c^3+3abc$.

Digitized by Google

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{III}}$, so ist

$$x^{III} = \frac{37}{6\sqrt[3]{100}+13\sqrt[3]{10}-52}.$$

Um den Nenner rational zu machen, multiplizire man Zähler und Nenner mit $481\sqrt[3]{100}+1036\sqrt[3]{10}+1924$ (siehe Anmerkung 2). Dann erhält der Bruch die Form:

$$\frac{37(481\sqrt[3]{100}+1036\sqrt[3]{10}+1924)}{21600+21970-140608+131680} = \frac{13\sqrt[3]{100}+28\sqrt[3]{10}+52}{18}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl ist

$$\frac{60+60+52}{18} = 9.$$

In dieser Weise kann die Berechnung der Quotienten beliebig weit fortgesetzt werden.

Die Wurzelgrösse $\sqrt[3]{10}$ ist also

$$= 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \text{u. s. w.}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

Kettenbruchsnenner: 2, 6, 2, 9, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{265}{123}$, u. s. w.

§. 2.

Um das Verfahren übersichtlich darzustellen, werde hier noch ein Beispiel aufgelöset.

Es sei:

$$x = \sqrt[3]{19} = 2 + \left(\frac{\sqrt[3]{19}-2}{1} = \frac{1}{x^I}\right),$$

$$x^I = \frac{1}{\sqrt[3]{19}-2} = \frac{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}+4}{11} = 1 + \left(\frac{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}-7}{11} = \frac{1}{x^{II}}\right),$$

$$x^{II} = \frac{11}{\sqrt[3]{361}+2\sqrt[3]{19}-7}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}+1}{8} = 2+\left(\frac{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}{8} = \frac{1}{x^{III}}\right),$$

$$x^{III} = \frac{8}{\sqrt[3]{361}+3\sqrt[3]{19}-15}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}+21}{1} = 63+\left(\frac{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42}{1} = \frac{1}{x^{IIII}}\right),$$

$$x^{IIII} = \frac{1}{3\sqrt[3]{361}+8\sqrt[3]{19}-42} = \frac{190\sqrt[3]{361}+507\sqrt[3]{19}+1308}{2843} = 1+ \text{ u. s. w.}$$

Die Näherungswerthe von $\sqrt[3]{19}$ werden demnach sein:

Kettenbruchsnenner: 2, 1, 2, 63, 1, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{507}{190}, \frac{515}{193}$, u. s. w.

§. 3.

Obiges Verfahren soll nun allgemein dargestellt werden. Es sei A eine ganze Zahl, aber kein vollständiger Kubus. Ferner sei die grösste in $\sqrt[3]{A}$ enthaltene ganze Zahl $= a$. Dann ist

$$x = \sqrt[3]{A} = a + \frac{\sqrt[3]{A}-a}{1}.$$

Diesen Bruch setze man $= \frac{1}{x^I}$, so ist

$$x^I = \frac{1}{\sqrt[3]{A}-a} = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{A-a^3} \text{ (s. Anm. 1.).}$$

Man setze $A-a^3=b$, so ist

$$x^I = \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2}{b}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^I, so ist

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2}+a\sqrt[3]{A}+a^2-a^Ib}{b},$$

Digitized by Google

oder, wenn man $a^I b - a^2 = c$ setzt,

$$x^I = a^I + \frac{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c}{b}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{II}}$, so ist

$$x^{II} = \frac{b}{\sqrt[3]{A^2} + a\sqrt[3]{A} - c} = \frac{b[(a^2+c)\sqrt[3]{A^2} + (A+ac)\sqrt[3]{A} + c^2 - aA]}{A^2 + a^3 A - c^3 + 3aAc}$$

(siehe Anmerkung 2.)

$$= \frac{b^2[a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a]}{b^2[-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1]}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}b - 2a^2a^I - a}{-a^{I3}b + 3a^2a^{I2} + 3aa^I + 1}$$

$$= \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{(aa^I+1)^3 - a^{I3}A}.$$ [3]

Man setze $(aa^I+1)^3 - a^{I3}A = d$, so ist

$$x^{II} = \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2}{d}.$$

Die grösste hierin enthaltene ganze Zahl sei a^{II}. Dann ist

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} + a^{I2}A - a(aa^I+1)^2 - a^{II}d}{d},$$

oder, wenn man $a^{II}d + a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A = e$ setzt,

$$x^{II} = a^{II} + \frac{a^I\sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} - e}{d}.$$

Setzt man diesen Bruch $= \frac{1}{x^{III}}$, so ist

---

3) Man wird sich von der Richtigkeit dieser und der folgenden Reductionen überzeugen, wenn man für die Grössen b, c, d, e nach einander ihre Werthe einsetzt.

Digitized by Google

$$x^{III} = \frac{d}{a^I \sqrt[3]{A^2} + (aa^I+1)\sqrt[3]{A} - e}$$

$$= \frac{d\{[(aa^I+1)^2 + a^I e]\sqrt[3]{A^2} + [a^{I2}A + e(aa^I+1)]\sqrt[3]{A} + e^2 - a^I(aa^I+1)A\}}{a^{I3}A^2 + (aa^I+1)^3 A - e^3 + 3a^I(aa^I+1)Ae} \quad \text{(s. Anm. 2)}$$

$$= \frac{d^2\{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^I+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{I2}d + 2a^{II}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] + a^3 a^I + a^2 - a^I A\}}{d^2 - a^{II3}d - 3a^{II2}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3 a^I + a^2 - a^I A) + A - a^3\}}$$

$$= \frac{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [(aa^I+1)a^{II}+a]\sqrt[3]{A} + a^{I2}d + 2a^{II}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] + a^3 a^I + a^2 - a^I A}{-a^{II2}d - 3a^{II2}[a(aa^I+1)^2 - a^{I2}A] - 3a^{II}(a^3 a^I + a^2 - a^I A) + A - a^3}$$

$$= \frac{(a^I a^{II}+1)\sqrt[3]{A^2} + [a^{II}(aa^I+1)+a]\sqrt[3]{A} + (aa^I+1)\cdot[a^{II}(aa^I+1)+a]^2 - a^I(a^I a^{II}+1)^2 A}{(a^I a^{II}+1)^3 A - [a^{II}(aa^I+1)+a]^3}$$

$$= a^{III} + \text{u. s. w.}$$

Fährt man auf diese Weise fort, die vollständigen Quotienten zu entwickeln, so wird man sie im Allgemeinen von der Form

$$x^{(n)} = \frac{Q\sqrt[3]{A^2} + P\sqrt[3]{A} + J}{D}$$

finden.

Digitized by Google

Die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ist demnach gleich dem Kettenbruche:

$$a+\cfrac{1}{a^I+\cfrac{1}{a^{II}+\cfrac{1}{a^{III}+\cfrac{1}{a^{IIII}+\text{ u. s. w.}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

Kettenbruchsnenner: $a,\ a^I,\ a^{II},\ a^{III}$, u. s. w.

Näherungswerthe: $\frac{1}{0},\ \frac{a}{1},\ \frac{aa^I+1}{a^I},\ \frac{a^{II}(aa^I+1)+a}{a^Ia^{II}+1}$, u. s. w.

§. 4.

Es seien

$$\frac{p}{q^0},\ \frac{p}{q},\ \frac{p^I}{q^I},\ \text{u. s. w.}$$

einige auf einander folgende Näherungswerthe von $\sqrt[3]{A}$. Die zu denselben gehörigen (sie ergänzenden) vollständigen Quotienten seien

$$\frac{Q^0\sqrt[3]{A}+P^0\sqrt[3]{A}+J^0}{D^0},\ \frac{Q\sqrt[3]{A^2}+P\sqrt[3]{A}+J}{D},\ \frac{Q^I\sqrt[3]{A^2}+P^I\sqrt[3]{A}+J^I}{D^I},\ \text{u. s. w.}$$

und die hierin steckenden grössten ganzen Zahlen: m^0, m, m^I, u. s. w. Dann ist

$$p^I=mp+p^0,\ q^I=mq+q^0;\ p^{II}=m^Ip^I+p,\ q^{II}=m^Iq^I+q;\ \text{u. s. w.}$$

Betrachtet man nun genau die Berechnung im vorhergehenden Paragraphen, so wie auch die gefundenen vollständigen Quotienten, und vergleicht man letztere mit den ebendaselbst berechneten Näherungswerthen für $\sqrt[3]{A}$, so findet man Folgendes:

1. Jeder vollständige Quotient lässt sich, nachdem man den Nenner rational gemacht und die nöthigen Reductionen vorgenommen, durch das Quadrat des früheren Zählers aufheben.

2. Es ist allgemein (so weit die Berechnung in §. 3. reicht) $Q=q$, $P=p$; J abwechselnd $=+(p^0p^2-q^0q^2A)$ und $-(p^0p^2-q^0q^2A)$; und D abwechselnd $=-(p^3-q^3A)$ und $+(p^3-q^3A)$; überhaupt

$$x^{(n)}=\frac{Q\sqrt[3]{A^2}+P\sqrt[3]{A}+J}{D}=\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)},$$

wobei die obern Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader

Digitized by Google

Ordnung, und die untern für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten, wenn man $\frac{a}{1}$ als den ersten Näherungsbruch ansieht.

Die Richtigkeit dieser beiden Sätze in Beziehung auf die 3 ersten vollständigen Quotienten geht aus der Berechnung in §. 3. hervor. Soll also ihre allgemeine Gültigkeit bewiesen werden, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irgend einen beliebigen vollständigen Nenner gelten, dies auch für den nächstfolgenden der Fall ist; mit andern Worten: dass, wenn $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^I}{q^I}$ drei auf einander folgende Näherungswerthe für $\sqrt[3]{A}$ sind, und wenn der zu $\frac{p}{q}$ gehörige vollständige Quotient

$$x^{(n)} = \frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A)}{\mp (p^3 - q^3A)}$$

ist, alsdann der folgende, zu $\frac{p^I}{q^I}$ gehörige, vollständige Quotient

$$x^{(n+1)} = \frac{q^I\sqrt[3]{A^2} + p^I\sqrt[3]{A} \mp (pp^{I2} - qq^{I2}A)}{\pm (p^{I3} - q^{I3}A)}$$

ist. Dies soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§. 5

$$x^{(n)} = \frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A)}{\mp (p^3 - q^3A)}$$

$$= m + \left(\frac{q\sqrt[3]{A^2} + q\sqrt[3]{A} \pm (p^0p^2 - q^0q^2A) \pm m(p^3 - q^3A)}{\mp (p^3 - q^3A)} = \frac{1}{x^{(n+1)}} \right),$$

$$x^{(n+1)} = \frac{\mp (p^3 - q^3A)}{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p''p^2 - q^0q^2A) \pm m(p^3 - q^3A)}.$$

Der Nenner dieses Bruches wird rational gemacht nach der Formel:

$$(a+b\pm c).(a^2+b^2+c^2-ab\mp ac\mp bc) = a^3+b^3\pm c^3\mp 3abc.$$

Man erhält dann:

Digitized by Google

$$x^{(n+1)} = \frac{\mp(p^3-q^3A)\cdot\left\{\left[p^2\mp q(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)\right]\sqrt{A^2+\left[q^2A\mp p(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)\right]\sqrt{A}}\right\}}{q^3A^2+p^3A\pm(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)^3\mp 3pqA(p^0p^2-q^0q^2A+mp^3-mq^3A)} \quad \ldots\ldots (Z)$$

Digitized by Google

Ehe wir zur Reduction dieses Bruches schreiten, bedenken wir, dass im vorliegenden Falle (siehe Egen's Handb. d. allgem. Arithm. Thl. I. §. 269.) $pq^0 - p^0q = \mp 1$. Daraus folgt:

1) $p^3q^0 - p^0p^2q = \mp p^2$
$p^3q^0 - p^0p^2q \pm p^2 = 0$
$p^2 \mp p^0p^2q = \mp p^3q^0$ . . . . . (A)

2) $pq^0q^2A - p^0q^3A = \mp q^2A$
$pq^0q^2A - p^0q^3A \pm q^2A = 0$
$q^2A \pm pq^0q^2A = \pm p^0q^3A$ . . . . . (B)

3) $p^2q^{0\,2} - 2p^0pq^0q + p^{0\,2}q^2 = +1$ . . . . . (I)
$-2p^0pq^0q - 1 = -p^2q^{0\,2} - p^{0\,2}q^2$
$-2p^0p^2q^0q^2A - pqA = -p^3q^{0\,2}qA - p^{0\,2}pq^3A$ . . . . . (C)

4) Aus (I) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{0\,2} + p^{0\,2}q^2$ (mit $\mp 3mp^4qA$ multiplizirt)
$\mp 6mp^0p^5q^0q^2A \mp 3mp^4qA = \mp 3mp^6q^{0\,2}qA \mp 3mp^{0\,2}p^4q^3A$...(D)

5) $2p^0pq^0q + 1 = p^2q^{0\,2} + p^{0\,2}q^2$ (mit $\pm 3mpq^4A^2$ multiplizirt)
$\pm 6mp^0p^2q^0q^5A^2 \pm 3mpq^4A^2 = \pm 3mp^3q^{0\,2}q^4A^2 \pm 3mp^{0\,2}pq^6A^2$...(E)

6) $p^3q^{0\,3} - 3p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 - p^{0\,3}q^3 = \mp 1$ . . . . . (II)
(I) mit $3p^0q$ multiplizirt, gibt:
$3p^0p^2q^{0\,2}q - 6p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^{0\,3}q^3 = 3p^0q$
$3p^0p^2q^{0\,2}q - 6p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^{0\,3}q^3 - 3p^0q = 0$...(III)
(II) + (III) $p^3q^{0\,3} + 2p^{0\,3}q^3 - 3p^{0\,2}pq^0q^2 - 3p^0q = \mp 1$
$3p^{0\,2}pq^0q^2 + 3p^0q \mp 1 = p^3q^{0\,3} + 2p^{0\,3}q^3$ (mit $\mp p^3A$ mult.)
$\mp 3p^{0\,2}p^4q^0q^2A \mp 3p^0p^3qA + p^3A = \mp p^6q^{0\,3}A \mp 2p^{0\,3}p^3q^3A$...(F)

7) (I) mit $3pq^0$ multiplizirt gibt:
$3p^3q^{0\,3} - 6p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 = 3pq^0$
$3p^3q^{0\,3} - 6p^0p^2q^{0\,2}q + 3p^{0\,2}pq^0q^2 - 3pq^0 = 0$...(IV)
(IV) — (II) $2p^3q^{0\,3} + p^{0\,3}q^3 - 3p^0p^2q^{0\,2}q - 3pq^0 = \pm 1$
$3p^0p^2q^{0\,2}q + 3pq^0 \pm 1 = 2p^3q^{0\,3} + p^{0\,3}q^3$ (mit $\pm q^3A^2$ mult.)
$\pm 3p^0p^2q^{0\,2}q^4A^2 \pm 3pq^0q^3A^2 + q^3A^2 = \pm 2p^3q^{0\,3}q^3A^2 \pm p^{0\,3}q^6A^2$...(G)

Man entwickele nun die einzelnen Grössen im Zähler und Nenner des obigen Bruches (Z), indem man jedoch den Faktor $\mp(p^3 - q^3A)$ für sich bestehen lässt. Dann setze man: in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A^2}$ statt des 1sten Theils der obigen Gleichung (A) den 2ten Theil derselben; in den Coefficienten von $\sqrt[3]{A}$ statt des 1sten Theils der Gleichung (B) den 2ten Theil derselben: in den rationalen Theil des Zählers statt des 1sten Theils der Gleichung (C) den 2ten Theil derselben, und endlich in den Nenner statt des 1sten Theils der Gleichungen (D), (E), (F) und (G) den 2ten Theil dieser Gleichungen. So erhält man einen Bruch von folgendem Zähler und Nenner:

Digitized by Google

$$\text{Zähler: } \mp(p^3-q^3A)\cdot\left\{\begin{array}{l}[\mp p^3q^0\mp q^0q^3A\mp mp^3q\pm mq^4A]\sqrt[3]{A^2}\\ +[\mp p^0p^2\pm p^0q^3A\mp mp^4\pm mpq^3A]\sqrt[3]{A}\\ +p^0{}^2p^4+q^0{}^2q^4A^2+m^2p^6+m^2q^6A^2-p^3q^0{}^2qA-p^0{}^2pq^3A\\ +2mp^0p^5-2mp^0p^2q^3A-2mp^3q^0{}^2A+2mq^0{}^2q^6A^2\\ -2m^2p^3q^3A\end{array}\right\}.$$

$$\text{Nenner: } \left\{\begin{array}{l}\pm m^3p^6\pm 3m^2p^0p^5\pm 3mp^0{}^2p^4\pm p^0{}^3p^3\mp 3m^3p^3q^3A\mp 3m^2p^2q^0A\\ \mp 3mp^0{}^2q^2A\mp p^0{}^3qA\mp 6m^2p^0p^4q^3A\mp 6mp^0{}^2p^3q^3A\mp 2p^0{}^3p^2q^3A\\ \pm 3m^3p^3q^6A^2\pm 6m^2p^3q^0q^3A^2\pm 6mp^0{}^2q^4A^2\pm 2p^3q^0{}^3q^3A^2\pm 3m^2p^0p^2q^6A^2\\ \pm 3mp^0{}^2q^6A^2\pm p^0{}^3q^6A^2\mp m^3q^9A^3\mp 3m^2q^0q^8A^3\mp 3mp^0{}^2q^7A^3\mp q^0{}^3q^6A^3\end{array}\right\}.$$

Dieser Bruch reducirt sich auf:

$$x^{(n+1)} =$$

$$\frac{(p^3-q^3A)^2\left\{\begin{array}{c}(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A}\\ \mp(m^2p^3+2mp^0p^2+p^0{}^2p-m^2q^3A-2mq^0q^2A-q^0{}^2qA)\end{array}\right\}}{(p^3-q^3A)^2.\left\{\begin{array}{c}\pm m^3p^3\pm 3m^2p^0p^2\pm 3mp^0{}^2p\pm p^0{}^3\\ \mp m^3q^3A\mp 3m^2q^0q^2A\mp mq^0{}^2qA\mp q^0{}^3A\end{array}\right\}}$$

$$= \frac{(mq+q^0)\sqrt[3]{A^2}+(mp+p^0)\sqrt[3]{A}\mp[p(mp+p^0)^2-q(mq+q^0)^2A]}{\pm[(mp+p^0)^3-(mq+q^0)^3A]}$$

$$= \frac{q^{I}\sqrt[3]{A^2}+p^{I}\sqrt[3]{A}\mp(pp^{I2}-qq^{I2}A)}{\pm(p^{I3}-q^{I3}A)}.$$

Und dieses war zu beweisen.

Digitized by Google

§. 6.

Aus der Berechnung in §. 3. und §. 5. geht unmittelbar hervor, dass D und J immer ganze Zahlen sind. D ist aber auch immer positiv. Denn:

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist $D=-(p^3-q^3A)$. Alsdann ist aber (da der erste Näherungsbruch $\frac{a}{1}$ zu klein ist) $\frac{p}{q}<\sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3}<A$, und $p^3<q^3A$; also D positiv.

2. Ist hingegen $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist $D=+(p^3-q^3A)$. Dann ist auch $\frac{p}{q}>\sqrt[3]{A}$; folglich $\frac{p^3}{q^3}>A$, und $p^3>q^3A$; also D wieder positiv.

Anders verhält es sich mit J.

1. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist $\frac{p}{q^0}>\frac{p}{q}$; also $p^0>\frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p}>\frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt mit $p^3<q^3A$ (siehe oben), gibt $p^0p^2\gtrless q^0q^2A$.

2. Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist $\frac{p^0}{q^0}<\frac{p}{q}$; also $p^0<\frac{pq^0}{q}$, und $\frac{p^0}{p}<\frac{q^0}{q}$. Dieses, multiplizirt mit $p^3>q^3A$, gibt wieder $p^0p^2\gtrless q^0q^2A$.

Da nun $J=\pm(p^0p^2-q^0q^2A)$, so kann J in beiden Fällen positiv, oder $=0$, oder negativ sein [4]).

§. 7.

Der die Grösse $\sqrt[3]{A}$ ausdrückende Kettenbruch ist nie ein periodischer. Denn da $p^I>p$, $p^{II}>p^I$, u. s. w., und $q^I>q$, $q^{II}>q^I$, u. s. w.; so kann nicht derselbe vollständige Quotient zweimal vorkommen. Auch können nicht 2 vollständige Quotienten einander gleich sein. Denn wenn etwa

---

4) In allen Zahlenbeispielen, die ich bisher auflöste, fand ich nur im zweiten vollständigen Quotienten $J=0$, und dieses auch nur dann, wenn A von der Form $(n-1)n^2$. Es gelang mir indessen noch nicht diesen Satz als allgemein gültig zu erweisen.

Digitized by Google

$$\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}\pm(p^0p^2-q^0q^2A)}{\mp(p^3-q^3A)}=\frac{q_I\sqrt[3]{A^2}+p_I\sqrt[3]{A}\pm(p_I{}^0p_I{}^2-q_I{}^0q_I{}^2A)}{\mp(p_I{}^3-q_I{}^3A)}$$

sein sollte, so müsste letzterer Bruch sich so verkleinern lassen, dass er die Form des ersteren erhielte. Da aber (s. Egen. §. 271.) p_I und q_I keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so sind auch q_I und $p_I{}^3$, und, da $q_I{}^3A$ ein Vielfaches von q_I, auch q_I und $p_I{}^3-q_I{}^3A$ incommensurabel. Obige 2 Brüche sind demnach nicht auf einerlei Form zu bringen, können also auch nicht einander gleich sein.

Aus diesem Allen folgt, dass nicht eine gewisse Reihe von Kettenbruchsnennern periodisch wiederkehren kann.

§. 8.

Das in §. 1. dargestellte Verfahren wird jetzt bedeutend abgekürzt werden können, wenn man gleichzeitig die Näherungsbrüche entwickelt. Etwa auf folgende Weise:

		Nenner.	Zähler.	
$x = \sqrt[3]{4} = 1 + \frac{1}{x^I}$		0	1	$J = +(1.1^2 - 0.1^2.4) = 1$ $D = -(1^3 - 1^3.4) = 3$
$x^I = \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1}{3}$	$= 1 + \frac{1}{x^{II}}$	1	1	$J = -(1.2^2 - 1.1^2.4) = 0$ $D = +(2^3 - 1^3.4) = 4$
$x^{II} = \frac{\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4}}{4}$	$= 1 + \frac{1}{x^{III}}$	1	2	$J = +(2.3^2 - 1.2^2.4) = 2$ $D = -(3^3 - 2^3.4) = 5$
$x^{III} = \frac{2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 2}{5}$	$= 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3	$J = -(3.8^2 - 2.5^2.4) = 8$ $D = +(8^3 - 5^3.4) = 12$
$x^{IV} = \frac{5\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{4} + 8}{12}$	$= 2 + \frac{1}{x^V}$	5	8	$J = +(8.19^2 - 5.12^2.4) = 8$ $D = -(19^3 - 12^3.4) = 53$
$x^V = \frac{12\sqrt[3]{16} + 19\sqrt[3]{4} + 8}{53}$	$= 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	10	$J = -(19.27^2 - 12.17^2.4) = 21$ $D = +(27^3 - 17^3.4) = 31$
$x^{VI} = \frac{17\sqrt[3]{16} + 27\sqrt[3]{4} + 21}{31}$	$= 3 + \frac{1}{x^{VII}}$	17	27	$J = +(27.100^2 - 17.63^2.4) = 108$ $D = -(100^3 - 63^3.4) = 188$
$x^{VII} = \frac{63\sqrt[3]{16} + 100\sqrt[3]{4} + 108}{188}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	63	100	$J = -(100.227^2 - 63.143^2.4) = 248$ $D = +(227^3 - 143^3.4) = 255$
u. s. w.		143	227	

Die grösste Schwierigkeit bei dieser Berechnung ist, die in $Q\sqrt[3]{A^2}$ und in $P\sqrt[3]{A}$ enthaltenen grössten ganzen Zahlen zu finden.

Es ist aber, wenn $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, $\sqrt[3]{A} - \frac{p}{q} < \frac{1}{qq'}$ (Egen. §. 272.); folglich

Digitized by Google

$$\sqrt[3]{A^2} - \frac{p\sqrt[3]{A}}{q} < \frac{\sqrt[3]{A}}{qq^I}, \text{ und } q\sqrt[3]{A^2} - p\sqrt[3]{A} < \frac{\sqrt[3]{A}}{q^I}.$$

Ebenso wird bewiesen, dass

$$p^I\sqrt[3]{A} - q^I\sqrt[3]{A^2} < \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}}, \quad q^{II}\sqrt[3]{A^2} - p^{II}\sqrt[3]{A} < \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}}, \text{ u. s. w.}$$

Da nun $q^{II} > q^I$, $q^{III} > q^{II}$, u. s. w.; so ist

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}} < \frac{\sqrt[3]{A}}{q^I}, \quad \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{III}} < \frac{\sqrt[3]{A}}{q^{II}}, \text{ u. s. w.;}$$

folglich werden die Unterschiede zwischen $Q\sqrt[3]{A^2}$ und $P\sqrt[3]{A}$, abgesehen von den Zeichen, immer kleiner. Daher werden die in diesen beiden Grössen enthaltenen grössten ganzen Zahlen gar bald einander gleich sein (in obiger Berechnung z. B. schon bei x^{II}); wesshalb man dann von da an jedesmal nur eine derselben zu suchen und dieselbe doppelt zu nehmen hat.

§. 9.

Man kann die irrationale Grösse $\sqrt[3]{A}$ noch auf eine andere Weise in einen Kettenbruch verwandeln. Setzt man nämlich $x = \sqrt[3]{A}$; so ist $x^3 = A$, und $x^3 - A = 0$. Vervollständigt man diese Gleichung durch die Glieder $\pm 0.x^2$ und $\pm 0.x$; so kann dieselbe diese 4 Formen erhalten:

$$x^3 + 0.x^2 + 0.x - A = 0, \quad x^3 + 0.x^2 - 0.x - A = 0,$$
$$x^3 - 0.x^2 + 0.x - A = 0, \quad x^3 - 0.x^2 - 0.x - A = 0.$$

Die 1ste, 2te und 4te dieser Gleichungen enthalten jede 2 Folgen und eine Abwechselung der Zeichen; die 3te aber 3 Abwechselungen. Dieser Widerspruch deutet auf imaginäre Wurzeln. Demnach hat die Gleichung $x^3 - A = 0$ (Egen. Thl. II. §. 404. Folg. 2. und 4.) nur eine reelle, und zwar eine positive Wurzel. Sucht man diese (welche im vorliegenden Falle irrational ist) näherungsweise nach der Methode von Lagrange (Egen. §. 458. ff.); so wird dadurch die Grösse $\sqrt[3]{A}$ in einen Kettenbruch verwandelt.

Angenommen, die Gleichung:

$$\text{(I)} \quad Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0$$

habe nur eine reelle, und zwar irrationale Wurzel, und diese sei enthalten zwischen r und $r+1$. Setzt man dann $x = r + \frac{1}{x^I}$ (wo $x^I > 1$ sein wird), und ordnet den Werth der Gleichung (I) nach den Potenzen von x^I; so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\text{(II)} \quad E^I x^{I3} + F^I x^{I2} + G^I x^I + H^I = 0.$$

Digitized by Google

Durch wirkliche Berechnung findet man:

$$E^I = Er^3 + Fr^2 + Gr + H,$$
$$F^I = 3Er^2 + 2Fr + G,$$
$$G^I = 3Er + F,$$
$$H^I = E.$$

Der Coefficient E^I drückt den Werth der Gleichung (I), r für x gesetzt, aus. Da nun $r < x$, so wird E^I stets negativ sein. Soll also in der abgeleiteten Gleichung (II) das erste Glied positiv werden, so muss man alle Zeichen derselben in die entgegengesetzten umändern.

§. 10.

Nach dieser Methode soll nun $\sqrt[3]{4}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man hat also die Gleichung:

$$x^3 - 4 = 0.$$

Hier ist $E=1$, $F=0$, $G=0$, $H=-4$, und, da x zwischen 1 und 2 liegt, $r=1$. Demnach ist (§. 9.) $E^I=-3$, $F^I=3$, $G^I=3$, $H^I=1$. Die abgeleitete Gleichung wird also sein, nachdem man die Zeichen verändert:

$$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0.$$

Durch Tatonniren findet man leicht, dass x^I zwischen 1 und 2 enthalten ist. Sieht man nun diese Gleichung wieder als die erste an und setzt also $E=3$, $F=-3$, $G=-3$, $H=-1$ und $r=1$, so erhält man auf dieselbe Weise die zweite abgeleitete Gleichung:

$$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0.$$

So fortfahrend gelangt man nach und nach zu folgenden Resultaten:

$x^3 - 4 = 0$	$x = 1 + \frac{1}{x^I}$
$3x^{I3} - 3x^{I2} - 3x^I - 1 = 0$	$x^I = 1 + \frac{1}{x^{II}}$
$4x^{II3} - 6x^{II} - 3 = 0$	$x^{II} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$
$5x^{III3} - 6x^{III2} - 12x^{III} - 4 = 0$	$x^{III} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$
$12x^{IV3} - 24x^{IV2} - 24x^{IV} - 5 = 0$	$x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^V}$
$53x^{V3} - 24x^{V2} - 48x^V - 12 = 0$	$x^V = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$

Digitized by Google

$$31x^{VI3}-63x^{VI2}-135x^{VI}-53=0 \qquad x^{VI}=3+\frac{1}{x^{VII}}$$

$$188x^{VII3}-324x^{VII2}-216x^{VII}-31=0 \qquad x^{VII}=2+\frac{1}{x^{VIII}}$$

u. s. w.

Es ist also

$$\sqrt[3]{4}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\text{ u. s. w.}}}}}}}}$$

Dasselbe Resultat wurde schon in §. 8. auf andere Weise gefunden.

§. 11.

Es sei allgemein $x=\sqrt[3]{A}$, also $x^3-A=0$. Ferner sei x zwischen a und $a+1$ enthalten. Dann ist $E=1$, $F=0$, $G=0$, $H=-A$, und $r=a$; folglich (§. 9.) $E^I=a^3-A$, $F^I=3a^2$, $G^I=3a$, $H^I=1$. Demnach ist die erste abgeleitete Gleichung, nachdem die Zeichen geändert worden:

$$(A-a^3)\,x^{I3}-3a^2\,x^{I2}-3ax^I-1=0.$$

Angenommen, x^I sei enthalten zwischen a^I und a^I+1. Man betrachte ferner die Gleichung in x^I wieder als die erste, und setze also $E=A-a^3$, $F=-3a^2$, $G=-3a$, $H=-1$, und $r=a^I$. Dann erhält man ebenso die zweite abgeleitete Gleichung:

$$[1+3aa^I+3a^2a^{I2}-(A-a^3)\,a^{I3}]x^{II3}-[3(A-a^3)\,a^{I2}-6a^2a^I-3a]\,x^{II2}$$
$$-[3(A-a^3)\,a^I-3a^2]\,x^{II}-(A-a^3)=0.$$

Diese reducirt sich auf folgende:

$$[(aa^I+1)^3-a^{I3}A]\,x^{II3}-3\,[a^{I2}A-a(aa^I+1)^2]\,x^{II2}$$
$$-3[a^I(A-a^3)-a^2]\,x^{II}-(A-a^3)=0.$$

Diese Gleichung kann man abermals als die erste ansehen, indem man annimmt, dass x^{II} zwischen a^{II} und $a^{II}+1$ liege,

u. s. w. Dadurch wird die Grösse $\sqrt[3]{A}$ sich verwandeln in den Kettenbruch:

$$a+\cfrac{1}{a^I+\cfrac{1}{a^{II}+\text{ u. s. w.}}}$$

§. 12.

Vergleicht man die in §. 10. gefundenen abgeleiteten Gleichungen der Reihe nach mit den vollständigen Quotienten in §. 8. so wie die abgeleiteten Gleichungen in §. 11. mit den vollständigen Quotienten in §. 3.; so findet man (die in §. 4. und §. 9. angenommene Bezeichnungsweise beibehalten) Folgendes:

$$E=D,\ F=-3J,\ G=-3(m^0D^0-J^0),\ H=-D^0.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze für die 2 ersten vollständigen Quotienten und die 2 ersten abgeleiteten Gleichungen geht aus §. 3. und §. 11. unmittelbar hervor. Soll nun bewiesen werden, dass sie für alle Quotienten und Gleichungen allgemein gültig sind, so ist nur noch darzuthun, dass, wenn sie für irgend einen vollständigen Quotienten und die mit demselben correspondirende Gleichung gelten, dies auch bei dem nächstfolgenden Quotienten und der nächstfolgenden Gleichung der Fall sei. Mit andern Worten: Sind

$$\frac{q\sqrt[3]{A^2}+p\sqrt[3]{A}+J}{D} \text{ und } \frac{q^I\sqrt[3]{A^2}+p^I\sqrt[3]{A}+J^I}{D^I}$$

zwei zunächst auf einander folgende vollständige Quotienten, und m und m^I die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zahlen; sind ferner

$$Ex^3+Fx^2+Gx+H=0 \text{ und } E^Ix^{I3}+F^Ix^{I2}+G^Ix^I+H^I=0$$

die diesen Quotienten entsprechenden abgeleiteten Gleichungen; ist endlich

$$E=D,\ F=-3J,\ G=-3(m^0D^0-J^0),\ H=-D^0;$$

so muss bewiesen werden, dass auch

$$E^I=D^I,\ F^I=-3J^I,\ G^I=-3(mD-J),\ H^I=-D$$

sei.

Nach §. 5. ist:

$$D=\mp(p^3-q^3A), \text{ und } D^I=\pm(p^{I3}-q^{I3}A);$$
$$-3J=\mp3(p^0p^2-q^0q^2A), \text{ und } -3J^I=\pm3(pp^{I2}-qq^{I2}A);$$

Digitized by Google

$-3(m^0D^0-J^0) = \mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A) \mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)$, und
$-3(mD-J) = \pm 3m(p^3-q^3A) \pm 3(p^0p^2-q^0q^2A)$;
$-D^0 = \mp(p^{03}-q^{03}A)$, und $-D = \pm(p^3-q^3A)$.

Nach unserer obigen Annahme ist also auch:

$E = \mp(p^3-q^3A)$, $F = \mp 3(p^0p^2-q^0q^2A)$,
$G = \mp 3m^0(p^{03}-q^{03}A) \mp 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A)$, $H = \mp(p^{03}-q^{03}A)$.

Hieraus folgt nun nach §. 9. (da die Grösse r daselbst im vorliegenden Falle $= m$ ist):

$$\left.\begin{aligned} \text{I. } E^I &= \pm m^3(p^3-q^3A) \pm 3m^2(p^0p^2-q^0q^2A) \pm 3m^0m(p^{03}-q^{03}A) \\ &\quad \pm 3m(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A) \pm (p^{03}-q^{03}A)\ ^{5}) \\ &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02}+p^{03}) \\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02}+q^{03})A \end{aligned}\right\} \ldots(\alpha)$$

Diese letztere Gleichung lässt sich reduciren. Denn es ist:

$m^0p^0+p^{00} = p$, und $m^0q^0+q^{00} = q$
(mit $3mp^{02}$ multiplizirt) (mit $3mq^{02}$ multiplizirt)
$3m^0mp^{03}+3mp^{00}p^{02} = 3mp^{02}p$ $3m^0mq^{03}+3mq^{00}q^{02} = 3mq^{02}q$.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (α) in folgende.

$$\begin{aligned} E^I &= \pm(m^3p^3+3m^2p^0p^2+3mp^{02}p+p^{03}) \\ &\quad \mp(m^3q^3+3m^2q^0q^2+3mq^{02}q+q^{03})A, \\ E^I &= \pm(mp+p^0)^3 \mp(mq+q^0)^3A, \\ E^I &= \pm p^{13} \mp q^{13}A, \\ E^I &= \pm(p^{13}-q^{13}A), \\ E^I &= D^I. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{II. } F^I &= \pm 3m^2(p^3-q^3A) \pm 6m(p^0p^2-q^0q^2A) \\ &\quad \pm 3m^0(p^{03}-q^{03}A) \pm 3(p^{00}p^{02}-q^{00}q^{02}A) \\ &= \pm 3(m^2p^3+2mp^0p^2+m^0p^{03}+p^{00}p^{02}) \\ &\quad \mp 3(m^2q^3+2mq^0q^2+m^0q^{03}+q^{00}q^{02})A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(\beta)$$

Es ist wieder:

$m^0p^0+p^{00} = p$, und $m^0q^0+q^{00} = q$
(mit p^{02} multiplizirt) (mit q^{02} multiplizirt)
$m^0p^{03}+p^{00}p^{02} = p^{02}p$, $m^0q^{03}+q^{00}q^{02} = q^{02}q$.

---

5) Man vergesse hier nicht, dass, um das 1ste Glied der neu abgeleiteten Gleichung positiv zu machen, alle Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt werden müssen!

Digitized by Google

Hiedurch reducirt sich die Gleichung (β) auf folgende:

$$F^I = \pm 3(m^2p^3 + 2mp^0p^2 + p^{0\,2}p) \mp 3(m^2q^3 + 2mq^0q^2 + q^{0\,2}q)A\,,$$
$$F^I = \pm 3p\,(mp + p^0)^2 \mp 3q\,(mq + q^0)^2 A\,,$$
$$F^I = \pm 3\,(pp^{I2} - qq^{I2}A),$$
$$F^I = -3J^I.$$

III. $$G^I = \pm 3m(p^3 - q^3A) \pm 3\,(p^0p^2 - q^0q^2A),$$
$$G^I = -3(mD - J).$$

IV. $$H^I = \pm\,(p^3 - q^3A),$$
$$H^I = -\,D.$$

VII.

Ueber gewisse bei einer besonderen Klasse astronomischer Aufgaben häufig in Anwendung kommende Gleichungen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Zuerst will ich die bekannten Grundformeln der sphärischen Astronomie bloss mit Hülfe der Principien der analytischen Geometrie entwickeln, und werde mich dabei, so wie überhaupt in diesem Aufsatze, der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Polhöhe	φ
Höhe eines Gestirns	h
Zenithdistanz	z
Azimuth	ω

Digitized by Google

Stundenwinkel . . . . . σ
Declination . . . . . δ
Polardistanz . . . . . p
Rectascension . . . . . α

Alle diese Elemente werden auf die aus der Astronomie allgemein bekannte Weise genommen. Nur rücksichtlich des Azimuths mag bemerkt werden, dass dasselbe im Folgenden immer von Süden durch Westen hindurch, d. i. im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre, von 0 bis 360° gezählt werden soll.

Um nun die zwischen den genannten Elementen Statt findenden Relationen in völliger Allgemeinheit zu entwickeln, nehmen wir den Mittelpunkt der Sphäre als den Anfang zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$ an. Die Ebene der xy soll die Ebene des Horizonts, und die positiven Theile der Axen der x und y sollen vom Mittelpunkte der Sphäre an respective nach Süden und nach Westen, der positive Theil der Axe der z aber soll von dem Mittelpunkte der Sphäre an nach dem Zenith gerichtet sein. Die Ebene der $x'y'$ soll die Ebene des Aequators sein, der positive Theil der Axe der x' sei die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene der südlichen Hälfte des Meridians *), der positive Theil der Axe der y' soll vom Mittelpunkte der Sphäre nach Westen, der positive Theil der Axe der z' vom Mittelpunkte der Sphäre nach dem Nordpole gerichtet sein. Dies vorausgesetzt, ist offenbar, wenn die Coordinaten x, y, z und x', y', z' sich auf denselben Stern in demselben Zeitmomente beziehen, und der Halbmesser der Sphäre immer der Längeneinheit gleich gesetzt wird, in völliger Allgemeinheit:

$$1)\quad \begin{cases} x = \cos\omega \cos h, \\ y = \sin\omega \cos h, \\ z = \sin h \end{cases}$$

und

$$2)\quad \begin{cases} x' = \cos\sigma \cos\delta, \\ y' = \sin\sigma \cos\delta, \\ z' = \sin\delta. \end{cases}$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man aber offenbar die folgenden Gleichungen:

$$x = x' \cos(90^\circ - \varphi) - z' \sin(90^\circ - \varphi),$$
$$y = y',$$
$$z = x' \sin(90^\circ - \varphi) + z' \cos(90^\circ - \varphi)$$

*) Der Meridian wird durch die Weltaxe in zwei Hälften getheilt, von denen die, in welcher Süden liegt, die südliche, die, in welcher Norden liegt, die nördliche Hälfte des Meridians genannt wird.

oder

$$3)\quad \begin{cases} x = x' \sin\varphi - z' \cos\varphi, \\ y = y', \\ z = x' \cos\varphi + z' \sin\varphi; \end{cases}$$

aus denen sehr leicht auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination mit Hülfe einer bekannten goniometrischen Gleichung umgekehrt

$$4)\quad \begin{cases} x' = x \sin\varphi + z \cos\varphi, \\ y' = y, \\ z' = -x \cos\varphi + z \sin\varphi \end{cases}$$

erhalten wird.

Führt man nun in diese beiden Systeme von Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z und x', y', z' die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke dieser Coordinaten ein, so ergeben sich sogleich die beiden folgenden wichtigen Systeme von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \cos\omega \cos h = \cos\sigma \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi, \\ \sin\omega \cos h = \sin\sigma \cos\delta, \\ \sin h = \cos\sigma \cos\delta \cos\varphi + \sin\delta \sin\varphi \end{cases}$$

und

$$6)\quad \begin{cases} \cos\sigma \cos\delta = \cos\omega \cos h \sin\varphi + \sin h \cos\varphi, \\ \sin\sigma \cos\delta = \sin\omega \cos h, \\ \sin\delta = -\cos\omega \cos h \cos\varphi + \sin h \sin\varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung des ersten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\omega = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \operatorname{tang}\delta \cos\varphi}{\sin\sigma},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega}{\cos\varphi}.$$

Dividirt man auf ähnliche Art die erste Gleichung des zweiten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot\sigma = \frac{\cos\omega \sin\varphi + \operatorname{tang} h \cos\varphi}{\sin\omega},$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} h = \frac{\cot\sigma \sin\omega - \cos\omega \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Digitized by Google

Also hat man noch die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \operatorname{tang}\delta\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\ \operatorname{tang} h = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi} \end{cases}$$

und

$$8)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \operatorname{tang} h\cos\varphi}{\sin\omega}, \\ \operatorname{tang}\delta = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Führt man in die vorhergehenden vier Systeme statt der Höhe und Declination die Zenithdistanz und Polardistanz ein, so werden dieselben:

$$5^*)\quad \begin{cases} \cos\omega\sin z = \cos\sigma\sin p\sin\varphi - \cos p\cos\varphi, \\ \sin\omega\sin z = \sin\sigma\sin p, \\ \cos z = \cos\sigma\sin p\cos\varphi + \cos p\sin\varphi; \end{cases}$$

$$6^*)\quad \begin{cases} \cos\sigma\sin p = \cos\omega\sin z\sin\varphi + \cos z\cos\varphi, \\ \sin\sigma\sin p = \sin\omega\sin z, \\ \cos p = -\cos\omega\sin z\cos\varphi + \cos z\sin\varphi; \end{cases}$$

$$7^*)\quad \begin{cases} \cot\omega = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \cot p\cos\varphi}{\sin\sigma}, \\ \cot z = \dfrac{\cot\sigma\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

$$8^*)\quad \begin{cases} \cot\sigma = \dfrac{\cos\omega\sin\varphi + \cot z\cos\varphi}{\sin\omega}, \\ \cot p = \dfrac{\cos\sigma\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Diese Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie scheint mir viel einfacher und der Sache angemessener, als die gewöhnliche Entwickelung derselben mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie.

§. 2.

Es giebt nun eine gewisse, vorzüglich zuerst von Gauss hervorgehobene Klasse interessanter astronomischer Aufgaben, bei denen vorausgesetzt wird, dass drei Sterne unter solchen Umständen beobachtet worden sind, dass gewisse gleichnamige Elemente

Digitized by Google

derselben einander gleich sind, indem man diese Sterne z. B. in gleichen Höhen, oder in gleichen Azimuthen, oder bei gleichen Stundenwinkeln, u. s. w. beobachtet. Eine vollständige Behandlung aller möglichen Aufgaben dieser Art ist nicht ohne Interesse, würde jedoch im Archive einen zu grossen Raum für sich in Anspruch nehmen, wenn sie mit der erforderlichen Ausführlichkeit gegeben werden sollte. Diesen Aufgaben liegen aber, wenn man sie unter allgemeine Gesichtspunkte fasst, hauptsächlich gewisse Relationen zum Grunde, welche ich, weil dieselben auch an sich interessant sind, im folgenden Paragraphen im Zusammenhange entwickeln, und von denselben vielleicht späterhin weitere Anwendungen machen werde.

§. 3.

1. Zuerst wollen wir, die Polhöhe wie früher auch jetzt immer durch φ bezeichnend, annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne die gleichen Höhen h, h, h dieser Sterne entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 6) die drei Gleichungen:

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega' \cos h \cos\varphi,$$
$$\sin\delta'' = \sin h \sin\varphi - \cos\omega'' \cos h \cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega' - \cos\omega'', \quad \cos\omega'' - \cos\omega, \quad \cos\omega - \cos\omega',$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil

$$(\cos\omega' - \cos\omega'') + (\cos\omega'' - \cos\omega) + (\cos\omega - \cos\omega') = 0,$$
$$\cos\omega(\cos\omega' - \cos\omega'') + \cos\omega'(\cos\omega'' - \cos\omega) + \cos\omega''(\cos\omega - \cos\omega') = 0$$

ist, die folgende, h und φ gar nicht mehr enthaltende Relation zwischen den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω'':

$$9) \quad \left.\begin{aligned} &\sin\delta\ (\cos\omega' - \cos\omega'') \\ &+ \sin\delta'\ (\cos\omega'' - \cos\omega) \\ &+ \sin\delta''(\cos\omega - \cos\omega') \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

$$10) \quad \left.\begin{aligned} &\cos\omega\ (\sin\delta' - \sin\delta'') \\ &+ \cos\omega'\ (\sin\delta'' - \sin\delta) \\ &+ \cos\omega''(\sin\delta - \sin\delta') \end{aligned}\right\} = 0.$$

oder

Digitized by Google

$$11)\quad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\,\sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega'')\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega'') \\ +\sin\delta'\,\sin\tfrac{1}{2}(\omega''+\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega) \\ +\sin\delta''\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$12)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\omega\,\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta'') \\ +\cos\omega'\,\cos\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta) \\ +\cos\omega''\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') \end{array}\right\} = 0.$$

Ferner hat man nach 5) die drei Gleichungen:

$$\sin h = \sin\delta\,\sin\varphi + \cos\sigma\,\cos\delta\,\cos\varphi,$$
$$\sin h = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\sigma'\,\cos\delta'\cos\varphi,$$
$$\sin h = \sin\delta''\sin\varphi + \cos\sigma''\cos\delta''\cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin\delta'-\sin\delta'',\ \sin\delta''-\sin\delta,\ \sin\delta-\sin\delta',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$13)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\sigma\,\cos\delta\,(\sin\delta'-\sin\delta'') \\ +\cos\sigma'\cos\delta'\,(\sin\delta''-\sin\delta) \\ +\cos\sigma''\cos\delta''(\sin\delta-\sin\delta') \end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$14)\quad \left.\begin{array}{l} \cos\sigma\,\cos\delta\,\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta'') \\ +\cos\sigma'\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta)\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta) \\ +\cos\sigma''\cos\delta''\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') \end{array}\right\} = 0.$$

Endlich hat man nach 7) die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h = \cot\sigma\,\sin\omega - \cos\omega\,\sin\varphi,$$
$$\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h = \cot\sigma'\,\sin\omega' - \cos\omega'\,\sin\varphi,$$
$$\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h = \cot\sigma''\sin\omega'' - \cos\omega''\sin\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\omega'-\cos\omega'',\ \cos\omega''-\cos\omega,\ \cos\omega-\cos\omega',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$15)\quad \left.\begin{array}{l} \cot\sigma\,\sin\omega\,(\cos\omega'-\cos\omega'') \\ +\cot\sigma'\,\sin\omega'\,(\cos\omega''-\cos\omega) \\ +\cot\sigma''\sin\omega''(\cos\omega-\cos\omega') \end{array}\right\} = 0$$

oder

Digitized by Google

$$16)\quad \left.\begin{array}{l} \cot\sigma \sin\omega \sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega'') \sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'') \\ +\cot\sigma' \sin\omega' \sin\frac{1}{2}(\omega''+\omega) \sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega) \\ +\cot\sigma'' \sin\omega'' \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega') \sin\frac{1}{2}(\omega-\omega') \end{array}\right\} = 0.$$

II. Ferner wollen wir annehmen, dass den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω'' dreier Sterner die gleichen Stundenwinkel σ, σ, σ entsprechen.

Dann haben wir zuvörderst nach 5) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\sigma \cos\delta \cos\varphi, \\ \sin h' &= \sin\delta' \sin\varphi + \cos\sigma \cos\delta' \cos\varphi, \\ \sin h'' &= \sin\delta'' \sin\varphi + \cos\sigma \cos\delta'' \cos\varphi. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\delta'-\delta''),\ \sin(\delta''-\delta),\ \sin(\delta-\delta')$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man, weil, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\begin{aligned} &\sin\delta \sin(\delta'-\delta'') + \sin\delta' \sin(\delta''-\delta) + \sin\delta'' \sin(\delta-\delta') = 0, \\ &\cos\delta \sin(\delta'-\delta'') + \cos\delta' \sin(\delta''-\delta) + \cos\delta'' \sin(\delta-\delta') = 0 \end{aligned}$$

ist, die Gleichung

$$17)\quad \sin h \sin(\delta'-\delta'') + \sin h' \sin(\delta''-\delta) + \sin h'' \sin(\delta-\delta') = 0.$$

Ferner hat man nach 8) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\varphi \operatorname{tang}\delta &= \cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega, \\ \cos\varphi \operatorname{tang}\delta' &= \cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega', \\ \cos\varphi \operatorname{tang}\delta'' &= \cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma \cot\omega''. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\operatorname{tang}\delta' - \operatorname{tang}\delta'',\ \operatorname{tang}\delta'' - \operatorname{tang}\delta,\ \operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\delta'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$18)\quad \left.\begin{array}{l} \cot\omega\ (\operatorname{tang}\delta' - \operatorname{tang}\delta'') \\ +\cot\omega'\ (\operatorname{tang}\delta'' - \operatorname{tang}\delta) \\ +\cot\omega''(\operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\delta') \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$19)\quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{tang}\delta\ (\cot\omega' - \cot\omega'') \\ +\operatorname{tang}\delta'\ (\cot\omega'' - \cot\omega) \\ +\operatorname{tang}\delta''\ (\cot\omega - \cot\omega') \end{array}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

oder

$$20)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega\ \frac{\sin(\delta'-\delta'')}{\cos\delta'\ \cos\delta''}\\ &+\cot\omega'\ \frac{\sin(\delta''-\delta)}{\cos\delta''\ \cos\delta}\\ &+\cot\omega''\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\ \cos\delta'}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$21)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega\ \cos\delta\ \sin(\delta'-\delta'')\\ &+\cot\omega'\cos\delta'\sin(\delta''-\delta)\\ &+\cot\omega''\cos\delta''\sin(\delta-\delta')\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$22)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}\delta\ \frac{\sin(\omega'-\omega'')}{\sin\omega'\ \sin\omega''}\\ &+\operatorname{tang}\delta'\frac{\sin(\omega''-\omega)}{\sin\omega''\sin\omega}\\ &+\operatorname{tang}\delta''\frac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega\sin\omega'}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder

$$23)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}\delta\ \sin\omega\ \sin(\omega'-\omega'')\\ &+\operatorname{tang}\delta'\sin\omega'\sin(\omega''-\omega)\\ &+\operatorname{tang}\delta''\sin\omega''\sin(\omega-\omega')\end{aligned}\right\}=0.$$

Endlich ist nach 7)

$$\begin{aligned}\cos\varphi\operatorname{tang}h &= \cot\sigma\sin\omega\ -\cos\omega\ \sin\varphi,\\ \cos\varphi\operatorname{tang}h' &= \cot\sigma\sin\omega'-\cos\omega'\sin\varphi,\\ \cos\varphi\operatorname{tang}h'' &= \cot\sigma\sin\omega''-\cos\omega''\sin\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\omega'-\omega''),\ \sin(\omega''-\omega),\ \sin(\omega-\omega')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die folgende Gleichung:

$$24)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}h\ \sin(\omega'-\omega'')\\ &+\operatorname{tang}h'\ \sin(\omega''-\omega)\\ &+\operatorname{tang}h''\sin(\omega-\omega')\end{aligned}\right\}=0.$$

III. Den Declinationen δ, δ', δ'' und den Höhen h, h', h''; oder den Declinationen δ, δ', δ'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'';

oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne mögen jetzt die gleichen Azimuthe ω, ω, ω entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega\cos h \cos\varphi,\\ \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos\omega\cos h' \cos\varphi,\\ \sin\delta'' &= \sin h'' \sin\varphi - \cos\omega\cos h'' \cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

25) $$\sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h') = 0.$$

Ferner ist nach 8):

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma \sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta' &= \cos\sigma' \sin\varphi - \sin\sigma'\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta'' &= \cos\sigma'' \sin\varphi - \sin\sigma''\cot\omega.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\sigma'-\sigma''),\ \sin(\sigma''-\sigma),\ \sin(\sigma-\sigma')$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung.

26) $$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tang}\,\delta\ \sin(\sigma'-\sigma'')\\ &+\mathrm{tang}\,\delta'\ \sin(\sigma''-\sigma)\\ &+\mathrm{tang}\,\delta''\ \sin(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Endlich ist nach 7):

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h &= \cot\sigma \sin\omega - \cos\omega\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h' &= \cot\sigma' \sin\omega - \cos\omega\sin\varphi,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,h'' &= \cot\sigma'' \sin\omega - \cos\omega\sin\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cot\sigma'-\cot\sigma'',\ \cot\sigma''-\cot\sigma,\ \cot\sigma-\cot\sigma',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

27) $$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tang}\,h\ (\cot\sigma'-\cot\sigma'')\\ &+\mathrm{tang}\,h'\ (\cot\sigma''-\cot\sigma)\\ &+\mathrm{tang}\,h''\ (\cot\sigma-\cot\sigma')\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

Digitized by Google

$$28)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\sigma\ (\operatorname{tang} h' - \operatorname{tang} h'') \\ &+\cot\sigma'\ (\operatorname{tang} h'' - \operatorname{tang} h) \\ &+\cot\sigma''\ (\operatorname{tang} h - \operatorname{tang} h') \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

$$29)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} h\ \frac{\sin(\sigma'-\sigma'')}{\sin\sigma'\ \sin\sigma''} \\ &+\operatorname{tang} h'\ \frac{\sin(\sigma''-\sigma)}{\sin\sigma''\ \sin\sigma} \\ &+\operatorname{tang} h''\ \frac{\sin(\sigma-\sigma')}{\sin\sigma\ \sin\sigma'} \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$30)\quad \left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} h\ \sin\sigma\ \sin(\sigma'-\sigma'') \\ &+\operatorname{tang} h'\ \sin\sigma'\ \sin(\sigma''-\sigma) \\ &+\operatorname{tang} h''\ \sin\sigma''\ \sin(\sigma-\sigma') \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

$$31)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\sigma\ \frac{\sin(h'-h'')}{\cos h'\ \cos h''} \\ &+\cot\sigma'\ \frac{\sin(h''-h)}{\cos h''\ \cos h} \\ &+\cot\sigma''\ \frac{\sin(h-h')}{\cos h\ \cos h'} \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$32)\quad \left.\begin{aligned} &\cot\sigma\ \cos h\ \sin(h'-h'') \\ &+\cot\sigma'\ \cos h'\ \sin(h''-h) \\ &+\cot\sigma''\ \cos h''\ \sin(h-h') \end{aligned}\right\} = 0.$$

IV. Endlich wollen wir nun auch annehmen, dass den Höhen h, h', h'' und den Azimuthen ω, ω', ω''; oder den Höhen h, h', h'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ''; oder den Azimuthen ω, ω', ω'' und den Stundenwinkeln σ, σ', σ'' dreier Sterne (oder eines Sterns) die gleichen Declinationen δ, δ, δ entsprechen.

Dann ist zuvörderst nach 6):

$$\sin\delta = \sin h\ \sin\varphi - \cos\omega\ \cos h\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta = \sin h'\ \sin\varphi - \cos\omega'\ \cos h'\ \cos\varphi,$$
$$\sin\delta = \sin h''\ \sin\varphi - \cos\omega''\ \cos h''\ \cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin h' - \sin h'',\ \sin h'' - \sin h,\ \sin h - \sin h'$$

Digitized by Google

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$33)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\omega\,\cos h\,(\sin h' - \sin h'') \\ &+\cos\omega'\,\cos h'\,(\sin h'' - \sin h) \\ &+\cos\omega''\cos h''\,(\sin h - \sin h')\end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$34)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\omega\,\cos h\,\cos\tfrac{1}{2}(h'+h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'-h'') \\ &+\cos\omega'\cos h'\cos\tfrac{1}{2}(h''+h)\sin\tfrac{1}{2}(h''-h) \\ &+\cos\omega''\cos h''\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Nach 5) ist ferner

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma\,\cos\delta\cos\varphi,\\ \sin h' &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma'\cos\delta\cos\varphi,\\ \sin h'' &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\sigma''\cos\delta\cos\varphi.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma' - \cos\sigma'',\ \cos\sigma'' - \cos\sigma,\ \cos\sigma - \cos\sigma'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung.

$$35)\quad \left.\begin{aligned} &\sin h\,(\cos\sigma' - \cos\sigma'') \\ &+\sin h'\,(\cos\sigma'' - \cos\sigma) \\ &+\sin h''\,(\cos\sigma - \cos\sigma')\end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$36)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\sigma\,(\sin h' - \sin h'') \\ &+\cos\sigma'\,(\sin h'' - \sin h) \\ &+\cos\sigma''\,(\sin h - \sin h')\end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$37)\quad \left.\begin{aligned} &\sin h\,\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'') \\ &+\sin h'\,\sin\tfrac{1}{2}(\sigma''+\sigma)\,\sin\tfrac{1}{2}(\sigma''-\sigma) \\ &+\sin h''\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\,\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder

$$38)\quad \left.\begin{aligned} &\cos\sigma\,\cos\tfrac{1}{2}(h'+h'')\sin\tfrac{1}{2}(h'-h'') \\ &+\cos\sigma'\cos\tfrac{1}{2}(h''+h)\sin\tfrac{1}{2}(h''-h) \\ &+\cos\sigma''\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Nach 8) ist endlich:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma\,\sin\varphi - \sin\sigma\cot\omega,\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma'\sin\varphi - \sin\sigma'\cot\omega',\\ \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta &= \cos\sigma''\sin\varphi - \sin\sigma''\cot\omega''.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\sigma' - \cos\sigma'', \quad \cos\sigma'' - \cos\sigma, \quad \cos\sigma - \cos\sigma'$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$39) \quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega \sin\sigma (\cos\sigma' - \cos\sigma'') \\ &+ \cot\omega' \sin\sigma' (\cos\sigma'' - \cos\sigma) \\ &+ \cot\omega'' \sin\sigma'' (\cos\sigma - \cos\sigma') \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$40) \quad \left.\begin{aligned} &\cot\omega \sin\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma'') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma'') \\ &+ \cot\omega' \sin\sigma' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''+\sigma) \sin\tfrac{1}{2}(\sigma''-\sigma) \\ &+ \cot\omega'' \sin\sigma'' \sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \end{aligned}\right\} = 0.$$

Dies sind die Relationen, deren kurze Entwickelung der Zweck des vorliegenden Aufsatzes war.

VIII.

Ueber eine astronomische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Dass man aus den in demselben Azimuth etwa mit einem Theodoliten gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre, d. h. deren Rectascensionen und Declinationen, bekannt sind, die Polhöhe und die Zeit bestimmen kann, ist hinreichend bekannt. Bezeichnen wir nämlich die Polhöhe durch φ, die in den Azimuthen ω, ω', welche von Süden an nach Westen hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen, gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Declinationen δ, δ' sind, durch h, h'; so haben wir bekanntlich nach den Fundamentalgleichungen der sphärischen Astronomie die beiden folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

Digitized by Google

$$1)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega' \cos h' \cos\varphi. \end{cases}$$

Setzen wir nun $\omega' = \omega + (\omega' - \omega)$, so wird

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin h' \sin\varphi - \cos(\omega'-\omega)\cos\omega\cos h'\cos\varphi \\ &\quad + \sin(\omega'-\omega)\sin\omega\cos h'\cos\varphi \\ &= \sin h'\sin\varphi - \cos\omega\cos h'\cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)^2\cos\omega\cos h'\cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\omega\cos h'\cos\varphi \\ &= \sin h'\sin\varphi - \cos\omega\cos h'\cos\varphi \\ &\quad + 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos h'\cos\varphi, \end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\sin\delta\cos h' - \sin\delta'\cos h \\ &= \sin(h-h')\sin\varphi - 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos h\cos h'\cos\varphi, \end{aligned}$$

also

$$2)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta\cos h' - \sin\delta'\cos h}{\sin(h-h')} - \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\cos h\cos h'}{\sin(h-h')}\cos\varphi.$$

Sind nun die beiden Sterne in demselben Azimuth beobachtet worden, so ist $\omega = \omega'$, also $\omega - \omega' = 0$, und folglich

$$3)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\delta\cos h' - \sin\delta'\cos h}{\sin(h-h')}.$$

Ist nicht genau $\omega - \omega' = 0$, so ist nach 2)

$$-\frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\cos h\cos h'}{\sin(h-h')}\cos\varphi$$

der Fehler, mit welchem $\sin\varphi$ behaftet ist, wenn man genau $\omega - \omega' = 0$ setzt, woraus man sich leicht Regeln abstrahiren wird, wie die Beobachtungen am vortheilhaftesten anzustellen sind, indem man z. B. sogleich übersieht, dass der Fehler sehr gross werden kann, wenn nahe $\sin(h-h') = 0$ ist, was man also zu vermeiden haben wird.

Wie man, wenn man die Polhöhe gefunden hat, dann leicht noch das Azimuth, die Stundenwinkel der Sterne, und aus diesen mittelst der bekannten Rectascensionen der Sterne die Zeit bestimmen kann, ist aus den Elementen der Astronomie hinreichend bekannt, und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Nicht so bekannt wie das Vorhergehende dürfte es sein, dass man, wenn man mit den Messungen der Höhen zweier bekannten

Digitized by Google

Sterne in demselben Azimuth noch die Messung der Höhe eines dritten bekannten Sterns in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth verbindet, was bekanntlich bei der Anwendung des Theodoliten nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert, ausser der Polhöhe auch noch den Collimationsfehler des Instruments bestimmen, oder vielmehr die Polhöhe unabhängig von dem Collimationsfehler des Instrumentes erhalten kann, was mir in praktischer Rücksicht nicht ganz unwichtig und uninteressant zu sein scheint.

Bezeichnen wir nämlich die Declination und die gemessene Höhe des dritten Sterns respective durch δ'' und h'', so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h' \sin\varphi - \cos\omega \cos h' \cos\varphi, \\ \sin\delta'' = \sin h'' \sin\varphi + \cos\omega \cos h'' \cos\varphi. \end{cases}$$

Multipliciren wir nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'+h''),\ \sin(h+h''),\ \sin(h-h'),$$

und ziehen dann die zweite und dritte von der ersten ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sin\delta \sin(h'+h'') - \sin\delta' \sin(h+h'') - \sin\delta'' \sin(h-h') \\ &= \{\sin h \sin(h'+h'') - \sin h' \sin(h+h'') - \sin h'' \sin(h-h')\} \sin\varphi \\ &- \{\cos h \sin(h'+h'') - \cos h' \sin(h+h'') + \cos h'' \sin(h-h')\} \cos\omega \cos\varphi. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie man durch leichte Entwickelung findet:

$$5)\quad \begin{cases} \sin h \sin(h'+h'') - \sin h' \sin(h+h'') - \sin h'' \sin(h-h') = 0, \\ \cos h \sin(h'+h'') - \cos h' \sin(h+h'') + \cos h'' \sin(h-h') = 0; \end{cases}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$6)\quad \sin\delta \sin(h'+h'') - \sin\delta' \sin(h+h'') - \sin\delta'' \sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die gemessenen Höhen h, h', h'' sämmtlich als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Ist aber das Instrument mit einem Collimationsfehler oder Indexfehler i behaftet, und sind also $h+i$, $h'+i$, $h''+i$ die wahren Höhen *), so hat man natürlich statt der Gleichung 6) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin\{(h'+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta' \sin\{(h+i)+(h''+i)\} \\ -&\sin\delta'' \sin\{(h+i)-(h'+i)\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

*) Wobei vorausgesetzt wird, dass die gemessenen Höhen wegen der Refraction gehörig corrigirt sind.

Digitized by Google

d. i.

$$7)\qquad \left.\begin{array}{l} \sin\delta\ \sin(h'+h''+2i) \\ -\sin\delta'\ \sin(h+h''+2i) \\ -\sin\delta''\sin(h-h') \end{array}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man leicht:

$$\left.\begin{array}{l} \{\sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'')\}\cos 2i \\ +\{\sin\delta\cos(h'+h'')-\sin\delta'\cos(h+h'')\}\sin 2i \end{array}\right\} = \sin\delta''\sin h-h'),$$

und folglich, wenn man die Hülfsgrössen μ, Θ mittelst der Gleichungen

$$8)\qquad \begin{cases} \sin\delta\ \sin(h'+h'')-\sin\delta'\ \sin(h+h'') = \mu\sin\Theta, \\ \sin\delta\cos(h'+h'')-\sin\delta'\cos(h+h'') = \mu\cos\Theta \end{cases}$$

berechnet, was keine Schwierigkeit hat:

$$9)\qquad \mu\sin(\Theta+2i) = \sin\delta''\sin(h-h'),$$

also

$$10)\qquad \sin(\Theta+2i) = \frac{\sin\delta''\sin(h-h')}{\mu}.$$

Hat man mittelst dieser Gleichung den Collimationsfehler bestimmt, so kann man wegen desselben die gemessenen Höhen sämmtlich corrigiren, und muss dann natürlich, wenn man mittelst der Formel 3) die Polhöhe bestimmt, in diese Formel die wegen des Collimationsfehlers gehörig corrigirten gemessenen Höhen einführen.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn man in demselben Azimuth die Höhen dreier bekannter Sterne gemessen hat, und die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional zu setzen berechtigt ist, die Refraction bestimmen kann, ohne den Collimationsfehler des Instrumentes gerade mit völliger Genauigkeit kennen zu müssen. Unter der gemachten Voraussetzung hat man nämlich die drei folgenden Gleichungen:

$$11)\qquad \begin{cases} \sin\delta = \sin h\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h\ \cos\varphi, \\ \sin\delta' = \sin h'\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h'\cos\varphi. \\ \sin\delta'' = \sin h''\ \sin\varphi-\cos\omega\cos h''\cos\varphi. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(h'-h''),\ \sin(h''-h),\ \sin(h-h');$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil, wie man durch leichte Rechnung findet:

Digitized by Google

$$12)\quad \begin{cases} \sin h \sin(h'-h'') + \sin h' \sin(h''-h) + \sin h'' \sin(h-h') = 0, \\ \cos h \sin(h'-h'') + \cos h' \sin(h''-h) + \cos h'' \sin(h-h') = 0 \end{cases}$$

ist, die Gleichung:

$$13)\quad \sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') = 0.$$

Hierbei sind die Höhen als fehlerfrei vorausgesetzt worden. Setzen wir aber die Refraction den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional, so sind, wenn ϱ eine constante Grösse bezeichnet, die wegen der Refraction corrigirten Höhen:

$$h-\varrho\cot h,\quad h'-\varrho\cot h',\quad h''-\varrho\cot h'';$$

und die Gleichung 13) nimmt also eigentlich folgende Gestalt an:

$$14)\quad \left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin\{h'-h''-\varrho(\cot h'-\cot h'')\} \\ &+\sin\delta' \sin\{h''-h-\varrho(\cot h''-\cot h)\} \\ &+\sin\delta'' \sin\{h-h'-\varrho(\cot h-\cot h')\} \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$15)\quad \left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin\left\{h'-h''+\varrho\frac{\sin(h'-h'')}{\sin h' \sin h''}\right\} \\ &+\sin\delta' \sin\left\{h''-h+\varrho\frac{\sin(h''-h)}{\sin h'' \sin h}\right\} \\ &+\sin\delta'' \sin\left\{h-h'+\varrho\frac{\sin(h-h')}{\sin h \sin h'}\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da die Differenzen $h-h'$, $h'-h''$, $h''-h$ von dem Collimationsfehler unabhängig sind und ϱ immer eine sehr kleine Grösse ist, so wird die Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung nicht wesentlich gestört werden, wenn wegen des nicht mit völliger Genauigkeit bekannten Collimationsfehlers eine nur unvollkommene Correction der gemessenen Höhen möglich gewesen ist.

Da die Grössen

$$\varrho\frac{\sin(h'-h'')}{\sin h' \sin h''},\quad \varrho\frac{\sin(h''-h)}{\sin h'' \sin h},\quad \varrho\frac{\sin(h-h')}{\sin h \sin h'}$$

meistens der Null sehr nahe kommen werden, so giebt die Gleichung 15) nach gehöriger Entwickelung die folgende näherungsweise richtige Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta \sin(h'-h'') + \sin\delta' \sin(h''-h) + \sin\delta'' \sin(h-h') \\ &+\tfrac{1}{2}\varrho\left\{\frac{\sin\delta \sin 2(h'-h'')}{\sin h' \sin h''} + \frac{\sin\delta' \sin 2(h''-h)}{\sin h'' \sin h} + \frac{\sin\delta'' \sin 2(h-h')}{\sin h \sin h'}\right\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

also

Digitized by Google

$$16)\quad \tfrac{1}{2}\varrho = -\frac{\sin\delta\sin(h'-h'') + \sin\delta'\sin(h''-h) + \sin\delta''\sin(h-h')}{\frac{\sin\delta\sin 2(h'-h'')}{\sin h'\sin h''} + \frac{\sin\delta'\sin 2(h''-h)}{\sin h''\sin h} + \frac{\sin\delta''\sin 2(h-h')}{\sin h\sin h'}}.$$

Hat man mittelst dieser Formel einen ersten Näherungswerth von ϱ gefunden, so wird man mit Hülfe der Gleichung 15) diese Grösse mittelst der bekannten Näherungsmethoden auch leicht genauer finden können.

Fasset man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so wird sich überhaupt folgende Methode zur Bestimmung der Polhöhe *) ergeben.

In demselben Azimuth messe man die Höhen dreier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre bekannt sind, und in einem von dem vorhergehenden Azimuth um 180° verschiedenen Azimuth die Höhe eines vierten Sterns, dessen Position auf der Sphäre ebenfalls bekannt ist, wobei man sich am besten eines Theodoliten oder auch eines mit einem zweckmässig eingerichteten Stativ versehenen Sextanten bedient. Ist nun durch eine der verschiedenen hinreichend bekannten Methoden der Collimationsfehler des Instrumentes annähernd bestimmt worden, so corrigire man wegen desselben die gemessenen Höhen der drei ersten Sterne, und bestimme hierauf die Refraction mittelst der Formeln 16) und 15). Dann corrigire man die gemessenen Höhen des ersten, zweiten und vierten Sterns wegen der Refraction, indem man immer (was freilich auch nur näherungsweise richtig ist) die Refractionen den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional setzt, und bestimme mittelst der Gleichungen 8) und 10) den Collimationsfehler. Nun corrigire man endlich die schon wegen der Refraction corrigirten gemessenen Höhen des ersten und zweiten Sterns noch wegen des jetzt genau ermittelten Collimationsfehlers, und bestimme die Polhöhe mittelst der Gleichung 3). Dass man sich übrigens bei diesem hier nur im Allgemeinen skizzirten Verfahren auch der sogenannten Methode der successiven Näherungen bedienen und dasselbe dadurch zu grösserer Genauigkeit erheben kann, versteht sich von selbst.

---

*) Und dann ferner auch der Zeit, was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Digitized by Google

IX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aus der Gleichung

$$abc = x\{a\sqrt{4x^2-a^2} + b\sqrt{4x^2-b^2} + c\sqrt{4x^2-c^2}\};$$

durch Rechnung den Ausdruck

$$x = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, herzuleiten.

Ein Dreieck durch eine gerade Linie so in zwei Theile zu theilen, dass die beiden Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und die ihre Schwerpunkte verbindende gerade Linie auf der Theilungslinie senkrecht steht.

Die vier gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Höhen der vier Dreiecke, welche von den Seiten und den beiden Diagonalen eines in einen Kreis beschriebenen beliebigen Vierecks gebildet werden, liegen jederzeit auf dem Umfange eines dem Kreise, in welchen das Viereck beschrieben ist, gleichen Kreises.

Wenn A und B die Flächenräume zweier um und in einen Kreis beschriebenen regulären Polygone von gleicher Seitenzahl sind, so ist die Differenz $A-B$ der Fläche eines regulären Polygons von derselben Seitenzahl gleich, welches entweder um oder in einen Kreis beschrieben ist, dessen Halbmesser im ersten Falle der halben Seite des Polygons B, im zweiten Falle der halben Seite des Polygons A gleich ist.

Digitized by Google

Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, welcher entsteht, wenn ein reguläres Polygon — ein reguläres Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, u. s. w. — sich um eine seiner Seiten herumdreht.

Bezeichnen wir die Seite des regulären Vielecks durch a, den körperlichen Inhalt des durch Umdrehung desselben um eine seiner Seiten entstandenen Körpers durch V; so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3$;
für das reguläre Viereck: $V = \pi a^3$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{2}{3}\pi a^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = 3\pi a^3(7+4\sqrt{3})$.

Man kann diese körperlichen Räume auch sowohl durch den Halbmesser des um, als auch durch den Halbmesser des in das reguläre Vieleck beschriebenen Kreises ausdrücken. Bezeichnet z. B. r den Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist

für das reguläre Dreieck: $V = \frac{3}{4}\pi r^3\sqrt{3}$;
für das reguläre Viereck: $V = 2\pi r^3\sqrt{2}$;
für das reguläre Fünfeck: $V = \frac{5}{4}\pi r^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
für das reguläre Sechseck: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$;
für das reguläre Achteck: $V = 2\pi r^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;
für das reguläre Zehneck: $V = \frac{5}{2}\pi r^3\sqrt{5}$;
für das reguläre Zwölfeck: $V = 3\pi r^3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

Unter allen Prismen von derselben Grundfläche und Höhe hat das gerade Prisma die grösste Oberfläche.

Wenn man aus einem Punkte O in der Verlängerung eines Durchmessers AB eines Kreises eine denselben in den beiden Punkten M und M' schneidende gerade Linie, und nach den Punkten M und M' die Halbmesser CM und CM' des Kreises zieht, so soll man beweisen, dass das Product

$$\operatorname{tang}\frac{MCO}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{M'CO}{2}$$

eine constante Grösse ist, welche Lage man auch der von dem Punkte O aus gezogenen Secante des Kreises geben mag.

Digitized by Google

Wenn man auf eine feste gerade Linie in der Ebene einer Parabel von den Endpunkten M, M' einer durch den Brennpunkt F gehenden Chorde derselben die Perpendikel MN, $M'N'$ fällt, so ist, was man auch der durch den Brennpunkt F gehenden Chorde MM' für eine Lage geben mag, die Summe

$$\frac{MN}{MF} + \frac{M'N'}{M'F}$$

eine constante Grösse.

In jeder Parabel steht die Summe der Entfernungen der Endpunkte einer jeden durch den Brennpunkt gehenden Sehne von dem Brennpunkte zu dem Producte dieser Entfernungen in einem constanten Verhältnisse.

Den geometrischen Ort des Scheitels eines rechten Winkels zu bestimmen, dessen Schenkel auf einem gegebenen Kegelschnitte senkrecht stehen.

Wenn zwei Kreise, der eine mit constantem, der andere mit veränderlichem Halbmesser, sich von Aussen berühren, und an diese beiden Kreise eine gemeinschaftliche Berührende gezogen wird, so liegen die sämmtlichen Berührungspunkte mit dem Kreise, dessen Halbmesser als veränderlich angenommen wird, in einer Cissoide.

X.

Miscellen.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Schulraths J. H. T. Müller, Directors des Realgymnasiums zu Wiesbaden, an den Herausgeber.

Da Sie jetzt durch zwei Abhandlungen, welche ich mit vielem Interesse gelesen, die Aufmerksamkeit auf die kubischen Gleichungen wieder hingelenkt haben, so erlaube ich mir die Behandlungsweise in Erinnerung zu bringen, deren sich Kramp in seiner Arithmétique universelle (von der ich vor Jahren eine Uebersetzung

Digitized by Google

gefertigt, die aber nicht erschienen ist) bedient hat und die darum der Vergessenheit entrissen zu werden verdiente, weil sie auf die Wegschaffung des zweiten Gliedes verzichtet und eine tiefe Einsicht in den ganzen Gang der Untersuchung gewährt. Derselbe geht von der einfachsten Gleichung $x^3-1=0$ aus und bezeichnet sehr passend die verdoppelten beiden imaginären Wurzeln derselben $-1+i\sqrt{3}$ und $-1-i\sqrt{3}$ mit $2J$ und $2J''$. Daran schliesst sich unmittelbar die Gleichung $x^3-C=0$, die für $C=h^3$ die Wurzeln h, hJ, hJ'' giebt. Hierauf behandelt Kramp den Fall $x^3-3Ax^2+3A^2x-C=0$, worin die drei ersten Glieder Bestandtheile eines vollständigen Kubus sind, so dass man für $C-A^3=h^3$ die drei Wurzeln $A+h$, $A+hJ$, $A+hJ''$ erhält. Nach Erörterung einiger anderer Fälle geht derselbe zur Aufsuchung der Bedingungen über, welchen die Coefficienten der vollständigen allgemeinen Gleichung

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

zu genügen haben, damit 1) eine der Wurzeln das arithmetische Mittel zwischen den beiden übrigen, 2) die zweite Wurzel gleich der dritten, 3) nur eine Wurzel reell und 4) keine Wurzel weder einer andern gleich noch auch imaginär sei.

1. Für α, β, γ als Wurzeln der Gleichung und $2\beta=\alpha+\gamma$ erhält man $3\beta=\alpha+\beta+\gamma=A$, also $\beta=\frac{1}{3}A$ als zweite Wurzel. Da hiernach

$$x^3-Ax^2+Bx-C=(x-\beta)(x^2-2\beta x-2\beta^2+B)+(-2\beta^3+B\beta-C)$$

ist, so giebt der zweite Factor des ersten Gliedes die beiden übrigen Wurzeln $3x=A\pm\sqrt{3}.\sqrt{(A^2-3B)}$ und der Divisionsrest $-2\beta^3+B\beta-C$, welcher unter der obigen Voraussetzung verschwinden muss, die Bedingungsgleichung für diese Annahme, nämlich

$$2A^3-9AB+27C=0.$$

2. Sind α, β, β die drei Wurzeln, so muss $\alpha+2\beta=A$, $2\alpha\beta+\beta^2=B$, $\alpha\beta^2=C$ sein. Durch Eliminirung von α aus der 1sten und 2ten Gleichung erhält man, wenn der schon in 1. vorkommende Ausdruck

$$A^2-3B=r^2$$

gesetzt wird, $3\beta=A\pm r$ und $3\alpha=A\mp 2r$. Durch Multiplication des Quadrats der ersten dieser beiden Gleichungen mit der zweiten erhält man

$$2A^3-9AB+27C=\mp 2r^3,$$

und wenn beiderseits quadrirt wird, die Bedingungsgleichung für zwei gleiche gleichstimmige Wurzeln, nämlich

$$(2A^3-9AB+27C)^2=4(A^2-3B)^3.$$

Digitized by Google

3 Sind zwei Wurzeln zugeordnete complexe Ausdrücke, also die drei Wurzeln α, $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$; so ist $\alpha+2\lambda=A$, $2\alpha\lambda+\lambda^2+\mu^2=B$, $\alpha(\lambda^2+\mu^2)=C$, woraus man

$$A^2-3B=(\alpha-\lambda)^2-3\mu^2, \text{ also } A^2-3B>(\alpha-\lambda)^2$$

und

$$2A^3-9AB+27C=2(\alpha-\lambda)^3+18(\alpha-\lambda)\mu^2,$$

also

$$(2A^3-9AB+27C)^2-4(A^2-3B)^3=\{6(\alpha-\lambda)^2\mu\sqrt{3}+6\mu^3\sqrt{3}\}^2>0$$
$$=R^2$$

erhält. Hieraus findet man

$$2A^3-9AB+27C+R=2(\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3})^3=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-R=2(\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3})^3=2q^3.$$

so dass p und q bekannt sind.

Werden die beiden Gleichungen

$$\alpha-\lambda+\mu\sqrt{3}=p,$$
$$\alpha-\lambda-\mu\sqrt{3}=q$$

durch Addition und Subtraction verbunden und zieht man die frühere Gleichung $\alpha+2\lambda=A$ hinzu, so ergiebt sich $3\alpha=A+p+q$, $6\lambda=2A-p-q$, $6\mu=(p-q)\sqrt{3}$. Es sind demnach

$$A+p+q,$$
$$A+pJ'+qJ'',$$
$$A+pJ''+qJ'$$

die dritten Theile der drei Wurzeln der Gleichung $x^3-Ax^2+Bx-C=0$, wenn die oben angegebene Bedingung statt findet.

4. Zur Betrachtung endlich des Falles dreier ungleicher reeller Wurzeln bahnt sich Kramp den Weg durch die Vergleichung des Productes der Unterschiede zwischen den drei kreisförmig geordneten Wurzeln x', x'', x''' des in 3. untersuchten Falles. Es ist nämlich

$$(x'-x'')(x''-x''')(x'''-x')=R.3i\sqrt{3},$$

woraus er folgert, dass R imaginär, also R^2 negativ sein muss, wenn die drei Wurzeln reell und ungleich sind, d. h. dass in diesem Falle stets

$$(3A^3-9AB+27C)^2<4(A^2-3B)^3$$

ist. Demnach wird jetzt

$$2A^3-9AB+27C+iR=2p^3,$$
$$2A^3-9AB+27C-iR=2q^3.$$

Digitized by Google

Setzt man, was erwiesenermassen erlaubt ist, $p=z+iy$, $q=z-iy$, so ergiebt sich, dass die Bestimmung der Werthe von z und y wiederum auf die Auflösung einer kubischen Gleichung von derselben Beschaffenheit führt, als die gegebene Gleichung war, und langt so zuletzt bei dem Casus irreducibilis an.

Bemerkung zu der Aufgabe des Herrn A. Ritman.

(Thl. VI. S. 330. des Archivs.)

Von dem Herrn Dr. T. Wittstein zu Hannover.

Es ist das Achsendreieck eines (schiefen) Kegels gegeben, und in einer Seitenlinie desselben ein Punkt. Man soll durch diesen Punkt Ebenen normal zur Ebene des Achsendreiecks legen, und den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dadurch entstehenden Kegelschnitte angeben.

Der gegebene Punkt sei der Pol eines Polarcoordinaten-Systems, und r der Radius vector der gesuchten Curve, so hat man bekanntlich

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2},$$

wenn a und b die beiden Halbachsen irgend eines Kegelschnitts — die erstere in der Ebene des Achsendreiecks, die zweite rechtwinklig darauf — bezeichnen und die Ellipse als Grundform der Schnitte angesehen wird. Hier sind a und b veränderliche Grössen, deren Ausdruck durch den veränderlichen Winkel des Systems und die gegebenen Constanten wir jedoch nicht hersetzen wollen.

Nun giebt es bekanntlich im schiefen Kegel zwei Schnitte durch den gegebenen Punkt, welche Kreise sind; in beiden wird also $b=a$, folglich auch $r=a$, und mithin vereinigen sich in jedem dieser Schnitte die beiden Arme des gesuchten geometrischen Orts in Einen Punkt. Zwischen beiden Schnitten aber wird, wovon man sich leicht durch Ausführung der Rechnung überzeugt, $b>a$, folglich r imaginär; es findet mithin hier keine Curve in der Ebene des Achsendreiecks statt, und damit pflegt man gewöhnlich eine derartige Betrachtung abzuschliessen.

Indessen können wir auch selbst in diesem Falle der Gleichung

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2},$$

welche alsdann die Form annimmt

$$r = a \pm i\sqrt{b^2-a^2},$$

eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Denken wir uns nämlich die Schnittebene als Ebene der complexen Zahlen, und in ihr die Achse der reellen Zahlen zusammenfallend mit der Achse

Digitized by Google

$2a$ und die Achse der imaginären Zahlen rechtwinklig darauf, so werden wir den complexen Radius vector construiren, indem wir von der Mitte der Achse $2a$ aus uns rechtwinklig von der Ebene des Achsendreiecks erheben, und zwar sowohl nach der einen als nach der andern Seite hin, um eine Entfernung $=\sqrt{b^2-a^2}$. Und in der That, wenn b die grosse und a die kleine Halbachse einer Ellipse bezeichnet, so liegt der Brennpunkt auf der Halbachse b um einen Abstand $=\sqrt{b^2-a^2}$ vom Mittelpunkte; folglich gelangen wir durch jene Construction wirklich zu den ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks liegenden Brennpunkten. Es enthält mithin die Gleichung

$$r = a \pm \sqrt{a^2-b^2}$$

vollständig den geometrischen Ort aller Brennpunkte, welche in den gegebenen Schnittebenen enthalten sind; selbst diejenigen eingeschlossen, welche ausserhalb der Ebene des Achsendreiecks fallen.

Wir haben diese kurze Notiz vorzüglich desshalb nicht unterdrücken wollen, weil hier, wie es uns scheint, durch eine schlagende Thatsache die Coincidenz unserer geometrischen Interpretation der complexen Zahlen mit der Natur der geometrischen Grössenbeziehungen selbst dargethan wird.

Berichtigung.

Von dem Herrn Dr. Dippe, Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

In dem Archive Thl. VI. S. 333. wird die unbeschränkte Gültigkeit des Satzes: „Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression," in Zweifel gezogen, indem dieselbe an die Bedingung geknüpft wird, dass $\cot\frac{1}{2}\alpha \cdot \cot\frac{1}{2}\gamma = 3$ sei.

Der Zweifel ist leicht als unbegründet aufzuzeigen. Denn aus $\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta$ folgt

$$1) \qquad 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

mithin

$$2) \qquad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

und hieraus

Digitized by Google

3) $$3 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

folglich auch

4) $$3 = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Da dies eine nothwendige Folge der Voraussetzung ist, so kann es keine Beschränkung der Behauptung involviren.

Es ergiebt sich die Richtigkeit derselben auch sehr einfach aus 2), wonach man hatte

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

d. i.

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

oder

$$2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\beta}{2}.$$

Dividirt man nämlich die Gleichung

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$$

durch die eben erhaltene, so folgt

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},$$

und wenn man die Zähler entwickelt und den Division ausführt:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2},$$

was behauptet wurde.

Digitized by Google

XI.

Ueber die Theorie der Proportionen.

Von dem

Herrn Doctor Lehmann zu Berlin.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn von 4 Grössen die 1ste mit der 2ten, und die 3te mit der 4ten gleichartig ist, und ein Vielfaches eines aliquoten Theils der 1sten Grösse ist gleich der 2ten, und das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse gleich der 4ten, so ist jedes andere Vielfache jedes andern aliquoten Theils der 1sten Grösse $\gtrless$ (d. h. grösser oder ebenso gross oder kleiner) als die 2te Grösse, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\gtrless$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Es sei von den 4 Grössen a, b, c, d, unter denen a mit b gleichartig, und c mit d gleichartig ist, $b=\frac{n}{m}a$ (wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten), und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei b auch $=\frac{q}{p}a$ (wo q und p wiederum beliebige ganze Zahlen sind), so ist $\frac{n}{m}a=\frac{q}{p}a$, also (beiderseits das $m\times p$fache genommen) $npa=mqa$, also (weil np und mq zwei gleiche ganze Zahlen sind) auch $npc=mqc$, also (wenn man beiderseits den $m\times p$ten Theil nimmt) $\frac{n}{m}c=\frac{q}{p}c$, d. i. $d=\frac{q}{p}c$.

Es sei aber nun $b=\frac{n}{m}a$, und $d=\frac{n}{m}c$; dagegen sei $b>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, so ist $\frac{n}{m}a>\frac{q}{p}a$ und $<\frac{q+1}{p}a$, also $npa>qma$ und $<(q+1)ma$, also (weil np, qm und $(q+1)m$ ganze Zahlen sind) auch $npc>qmc$ und $<(q+1)mc$, also $\frac{n}{m}c>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$, d. i. $d>\frac{q}{p}c$ und $<\frac{q+1}{p}c$. Ist aber

Digitized by Google

$$b > \frac{q}{p}a \text{ und } < \frac{q+1}{p}a, \qquad d > \frac{q}{p}c \text{ und } < \frac{q+1}{p}c;$$

o ist um so mehr

$$b > \frac{q-1}{p}a,\ b < \frac{q+2}{p}a; \qquad d > \frac{q-1}{p}c,\ d < \frac{q+2}{p}c;$$
$$b > \frac{q-2}{p}a,\ b < \frac{q+3}{p}a; \qquad d > \frac{q-2}{p}c,\ d < \frac{q+3}{p}c;$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w. u. s. w.

§. 2. Lehrsatz.

Zu 3 Grössen, wovon die 1ste der 2ten gleichartig, ist allemal eine, aber auch nur Eine, vierte, der 3ten gleichartige Grösse möglich, von der Art, dass jedes Vielfache jedes aliquoten Theils der 1sten Grösse $\geq$ ist als die 2te, je nachdem das Ebensovielfache des ebensovielsten Theils der 3ten Grösse $\geq$ ist als die 4te Grösse.

Beweis. Die 3 ersten Grössen seien a, b, c. Nun haben entweder a und b einen aliquoten Theil, der in beide aufgeht (ein gemeinschaftliches Maass), oder nicht.

Haben a und b ein gemeinschaftliches Maass, ist nämlich $b = \frac{n}{m}a$, so hat die 4te Grösse $d = \frac{n}{m}c$ nach dem vorigen Paragraphen die verlangte Eigenschaft.

Haben aber a und b, falls das möglich ist, kein gemeinschaftliches Maass, so nehme man einen beliebigen aliquoten, den $m$ten, Theil der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$. Man nehme zwischen $\frac{n}{m}a$ und $\frac{n+1}{m}a$, d. i. zwischen $\frac{2n}{2m}a$ und $\frac{2n+2}{2m}a$, die Mitte, $\frac{2n+1}{2m}a$, so liegt b entweder zwischen $\frac{2n}{2m}a$ und $\frac{2n+1}{2m}a$, oder zwischen $\frac{2n+1}{2m}a$ und $\frac{2n+2}{2m}a$; im 1sten Fall schreibe man p statt $2n$, im 2ten Fall aber p statt $2n+1$, so kann man in jedem Fall sagen, b liegt zwischen $\frac{p}{2m}a$ und $\frac{p+1}{2m}a$. Fährt man so fort, die aliquoten Theile von a zu halbiren, so sei

$$b > \frac{n}{m}a \text{ und } < \frac{n+1}{m}a,$$
$$b > \frac{p}{2m}a \text{ und } < \frac{p+1}{2m}a,$$
$$b > \frac{q}{4m}a \text{ und } < \frac{q+1}{4m}a,$$

u. s. w.;

Digitized by Google

auf diese Art wird die Entfernung der beiden Grenzen von einander, zwischen denen b eingeschlossen ist, mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt. Diesen Grenzen

$$\frac{n}{m}a,\ \frac{n+1}{m}a;$$
$$\frac{p}{2m}a,\ \frac{p+1}{2m}a;$$
$$\frac{q}{4m}a,\ \frac{q+1}{4m}a;$$
u. s. w.

entsprechen, wenn man von der Grösse c die ebensovielsten Theile ebensovielmal nimmt, die Grössen

$$\frac{n}{m}c,\ \frac{n+1}{m}c;$$
$$\frac{p}{2m}c,\ \frac{p+1}{2m}c;$$
$$\frac{q}{4m}c,\ \frac{q+1}{4m}c;$$
u. s. w.

Da nun auch hier der Unterschied mit jedem folgenden Schritte auf die Hälfte reducirt wird, so kann er kleiner werden als jede gegebene mit c gleichartige Grösse; folglich giebt es Eine, aber auch nur Eine Grösse d, welche $> \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$ ist, und welcher sich die Grössen $\frac{n}{m}c$, $\frac{p}{2m}c$, $\frac{q}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen, und die Grössen $\frac{n+1}{m}c$, $\frac{p+1}{2m}c$, $\frac{q+1}{4m}c$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen immer mehr nähern, ohne sie jemals genau zu erreichen.

Wir beweisen nun erstlich, dass c und d kein gemeinschaftliches Maass haben. Hätten c und d ein gemeinschaftliches Maass, so sei $d = \frac{\nu}{\mu}c$. Dann wäre

$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{n}{m}c$ und $< \frac{n+1}{m}c$	also auch $\frac{\nu}{\mu}a > \frac{n}{m}a$ und $< \frac{n+1}{m}a$
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{p}{2m}c$ und $< \frac{p+1}{2m}c$	$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{p}{2m}a$ und $< \frac{p+1}{2m}a$
$\frac{\nu}{\mu}c > \frac{q}{4m}c$ und $< \frac{q+1}{4m}c$	$\frac{\nu}{\mu}a > \frac{q}{4m}a$ und $< \frac{q+1}{4m}a$
u. s. w.	u. s. w.

Da aber der Unterschied zwischen $\frac{n}{m}a$ und $\frac{n+1}{m}a$ doppelt so gross ist als der Unterschied zwischen $\frac{p}{2m}a$ und $\frac{p+1}{2m}a$, dieser

Digitized by Google

aber wieder doppelt so gross als der Unterschied zwischen $\frac{q}{4m}a$ und $\frac{q+1}{4m}a$, u. s. w., so wird der Unterschied $<$ als jede gegebene mit a gleichartige Grösse; der Grenzwerth ist also $\frac{\nu}{\mu}a$. Vorher aber sahen wir, dass dieser Grenzwerth $=b$. Folglich wäre $b=\frac{\nu}{\mu}a$, und folglich hätten a und b ein gemeinschaftliches Maass, gegen die Voraussetzung. Folglich ist die Annahme falsch, und c und d haben kein gemeinschaftliches Maass.

Man nehme nun einen beliebigen aliquoten, den μten, Theil der Grösse a von b so oft weg, als es angeht; es sei demnach $b>\frac{\nu}{\mu}a$ und $<\frac{\nu+1}{\mu}a$, so beweisen wir, dass d nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ und nicht $>\frac{\nu+1}{\mu}c$ sein könne.

Es sei, wo möglich, $d<\frac{\nu}{\mu}c$, so wäre

$\frac{\nu}{\mu}c>d$ und, wie wir gesehen haben, $d>\frac{n}{m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{p}{2m}c$;

$\frac{\nu}{\mu}c>d$, „ „ „ „ „ $d>\frac{q}{4m}c$;

u. s. w.

also um so mehr $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{n}{m}c$; also auch $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{n}{m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{p}{2m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{p}{2m}a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu}{\mu}c>\frac{q}{4m}c$; $\frac{\nu}{\mu}a>\frac{q}{4m}a$;

u. s. w.

Da nun die Grössen $\frac{n}{m}a$, $\frac{p}{2m}a$, $\frac{q}{4m}a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Wachsen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass das noch Fehlende kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu}{\mu}a$ nicht $<b$ sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b>\frac{\nu}{\mu}a$, d. i. $\frac{\nu}{\mu}a<b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und d kann nicht $<\frac{\nu}{\mu}c$ sein.

Es sei aber nun, wo möglich, $d>\frac{\nu+1}{\mu}c$, so wäre

Digitized by Google

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, und, wie wir gesehen haben, $d < \frac{n+1}{m} c$;

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, „ „ „ „ „ $d < \frac{p+1}{2m} c$;

$\frac{\nu+1}{\mu} c < d$, „ „ „ „ „ $d < \frac{q+1}{4m} c$;

u. s. w.

also um so mehr $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{n+1}{m} c$, also auch $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{n+1}{m} a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{p+1}{2m} c$, $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{p+1}{2m} a$;

„ „ „ „ $\frac{\nu+1}{\mu} c < \frac{q+1}{4m} c$, $\frac{\nu+1}{\mu} a < \frac{q+1}{4m} a$;

u. s. w.

Da nun die Grössen $\frac{n+1}{m} a$, $\frac{p+1}{2m} a$, $\frac{q+1}{4m} a$, u. s. w. in ihrem allmäligen Abnehmen sich, wie wir gesehen haben, immer mehr der Grösse b nähern, so dass der Ueberschuss kleiner wird als jede gegebene mit a und b gleichartige Grösse, so kann $\frac{\nu+1}{\mu} a$ nicht $> b$ sein, da doch vorausgesetzt war, dass wirklich $b < \frac{\nu+1}{\mu} a$, d. i. $\frac{\nu+1}{\mu} a > b$ sei. Da dies sich widerspricht, so ist wiederum die Annahme falsch, und d kann nicht $> \frac{\nu+1}{\mu} c$ sein.

Da also d nicht $= \frac{\nu}{\mu} c$ und nicht $< \frac{\nu}{\mu} c$, desgleichen d nicht $= \frac{\nu+1}{\mu} c$ und nicht $> \frac{\nu+1}{\mu} c$, so kann d nur $> \frac{\nu}{\mu} c$ und $< \frac{\nu+1}{\mu} c$ sein. Die Grösse d hat folglich die verlangte Eigenschaft.

Es mögen nun a und b ein gemeinschaftliches Maass haben oder nicht, so beweisen wir, dass nicht zwei verschiedene vierte Grössen, d und e, von denen $e > d$ ist, die verlangte Eigenschaft haben können.

Man nehme an, dieses sei möglich; dann nehme man einen aliquoten Theil der Grösse c, welcher $< e - d$ ist, den $m$ten, so oft von e weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m} c$ zwischen d und e liegen; es sei demnach $\frac{n}{m} c > d$ und $< e$, so müsste, weil sowohl d als e die verlangte Eigenschaft hat, $\frac{n}{m} a > b$ und $< b$ sein. Da dies sich widerspricht, so ist die Annahme falsch, und es giebt zu a, b und c nur Eine vierte Grösse von der verlangten Eigenschaft.

Digitized by Google

§. 3. Lehrsatz.

Wenn 4 Grössen die im vorigen Paragraphen angeführte Eigenschaft haben, und man nimmt von der 1sten und 3ten beliebige Gleichvielfache, und von der 2ten und 4ten, wenn auch nicht Ebensovielfache, doch unter sich Gleichvielfache, so ist allemal das Vielfache der 1sten $\gtrless$ als das Vielfache der 2ten, je nachdem das Vielfache der 3ten $\gtrless$ ist als das Vielfache der 4ten.

Beweis. Die 4 Grössen seien a, b, c, d, so wollen wir beweisen, dass $na \gtrless mb$ (wo n und m beliebige ganze Zahlen bedeuten), je nachdem $nc \gtrless md$. Nach der Voraussetzung ist $\frac{n}{m}a \gtrless b$, je nachdem $\frac{n}{m}c \gtrless d$, also (wenn man beiderseits das $m$fache nimmt) $na \gtrless mb$, je nachdem $nc \gtrless md$.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn 4 Grössen die in §. 3. angeführte Eigenschaft haben, so haben sie auch die in §. 2. angeführte Eigenschaft.

Beweis. Wenn die 4 Grössen a, b, c, d so beschaffen sind, dass $na \gtrless mb$, je nachdem $nc \gtrless md$, welche ganze Zahlen man auch für m und n setzen mag, so ist (wenn man beiderseits den $m$ten Theil nimmt) $\frac{n}{m}a \gtrless b$, je nachdem $\frac{n}{m}c \gtrless d$, d. h. die 4 Grössen a, b, c, d haben die in §. 2. angeführte Eigenschaft.

§. 5. Zusatz.

Da $mb \gtrless na$ (d. h. mb kleiner oder ebensogross oder grösser als na), je nachdem $na \gtrless mb$, und ebenso $md \gtrless nc$, je nachdem $nc \gtrless md$, so folgt, dass man die 4 Grössen a, b, c, d auch in der Ordnung b, a, d, c schreiben kann. Dass man a, b, c, d auch in der Ordnung c, d, a, b, desgleichen b, a, d, c auch in der Ordnung d, c, b, a schreiben kann, versteht sich nach dem bisher Entwickelten von selbst.

§. 6. Erklärung.

Von den 4 Grössen a, b, c, d, welche die bisher beschriebene Eigenschaft haben, sagt man, dass sie in Proportion stehen oder eine Proportion bilden, oder dass sich a zu b verhalte wie c zu d, oder b zu a wie d zu c, oder c zu d wie a zu b, oder d zu c wie b zu a, und schreibt:

$a:b=c:d$, oder $b:a=d:c$, oder $c:d=a:b$, oder $d:c=b:a$.

Die 1ste und 2te Grösse heissen, auf diese Art zusammengestellt, das vorangehende Verhältniss, die 3te und 4te Grösse aber das nachfolgende Verhältniss, und man sagt

Digitized by Google

von 2 Verhältnissen, welche eine Proportion bilden, dass sie einander gleich seien. Jedes Verhältniss besteht aus einem vorangehenden und einem nachfolgenden Gliede, und in jeder Proportion heissen die Glieder Eines Verhältnisses, oder auch das vorangehende Glied des einen und das vorangehende Glied des andern Verhältnisses, oder auch das nachfolgende Glied des einen und das nachfolgende Glied des andern Verhältnisses, gleichnamige (homologe) Glieder, die beiden mittleren Glieder aber oder die beiden äusseren ungleichnamige Glieder. Ein Verhältniss heisst dagegen grösser als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $>$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall (wenn $a:b$ und $c:d$ die beiden Verhältnisse sind) $a:b>c:d$. Und ein Verhältniss heisst kleiner als ein anderes, wenn das 1ste Glied des 1sten Verhältnisses sich zum 2ten Glied des 1sten Verhältnisses verhält wie eine Grösse, welche $<$ ist als das 1ste Glied des 2ten Verhältnisses, zum 2ten Glied des 2ten Verhältnisses, und man schreibt in diesem Fall $a:b<c:d$.

§. 7. Zusatz.

Wenn in zwei Proportionen 3 Glieder der einen den 3 entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind auch die noch übrigen Glieder (mögen dies nun der Ordnung nach die 1sten oder die 2ten oder die 3ten oder die 4ten sein) einander gleich, d. i.

$$\frac{a:b=c:d \quad e:b=c:d}{a=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:e=c:d}{b=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:b=e:d}{c=e} \qquad \frac{a:b=c:d \quad a:b=c:e}{d=e.}$$

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen 2 Glieder der einen den beiden entsprechenden der andern einzeln genommen gleich sind, so sind die noch übrigen Glieder der einen Proportion entweder den entsprechenden der andern einzeln genommen gleich, oder, wenn es gleichnamige Glieder sind, in der einen Proportion grösser als in der andern, und, wenn es ungleichnamige Glieder sind, das eine der beiden übrigen Glieder in der einen Proportion grösser als in der andern, und das noch übrige Glied in der ersten Proportion kleiner als in der andern.

Beweis. 1) Wenn die 1sten und 3ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=c:f$, und $e>b$, so beweisen wir, dass auch $f>d$ sei. Man nehme einen aliquoten Theil der Grösse a, welcher $<e-b$ ist, den $m$ten, von e so oft weg, als es angeht, so wird wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{m}a$ zwischen b und e fallen; es sei demnach

Digitized by Google

$\frac{n}{m}a > b$ und $< e$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $\frac{n}{m}c > d$ und $< f$, folglich um so mehr $f > d$.

2) Wenn die 1sten und 2ten Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $a:b=e:f$, und $e>c$, so beweisen wir, dass auch $f>d$ sei. Es mögen erstlich a und b ein gemeinschaftliches Maass haben; es sei $b=\frac{n}{m}a$, so ist nach dem Begriff der Proportion auch $d=\frac{n}{m}c$, und $f=\frac{n}{m}e$. Da nun $e>c$, so ist auch $\frac{n}{m}e>\frac{n}{m}c$, d. i. $f>d$. Wenn aber a und b kein gemeinschaftliches Maass haben, so sei

$b>\frac{n}{m}a$ und $<\frac{n+1}{m}a$	$d>\frac{n}{m}c$ und $<\frac{n+1}{m}c$	$f>\frac{n}{m}e$ und $<\frac{n+1}{m}e$
$b>\frac{p}{2m}a$ und $<\frac{p+1}{2m}a$	$d>\frac{p}{2m}c$ und $<\frac{p+1}{2m}c$	$f>\frac{p}{2m}e$ und $<\frac{p+1}{2m}e$
$b>\frac{q}{4m}a$ und $<\frac{q+1}{4m}a$	$d>\frac{q}{4m}c$ und $<\frac{q+1}{4m}c$	$f>\frac{q}{4m}e$ und $<\frac{q+1}{4m}e$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

so ist, weil $e>c$, und die Unterschiede durch fortgesetzte Halbirung kleiner werden als jede gegebene Grösse derselben Art, f wenigstens nicht kleiner als d. Es kann aber auch f nicht $=d$ sein, weil sonst (nach dem vorigen Paragraphen) $e=c$ wäre, gegen die Voraussetzung. Folglich ist auch in diesem Fall $f>d$.

3) Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=f:g$, und $e>b$, und $f>c$, so ist (nach Nro. 1) und Nro. 2)) um so mehr $g>d$.

4) Wenn die mittleren Glieder in beiden Proportionen gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $e:b=c:f$, und $e>a$, so beweisen wir, dass $f<d$. Erstlich kann f nicht $=d$ sein, weil sonst auch $e=a$ wäre, gegen die Voraussetzung. Ferner kann f nicht $>d$ sein, weil sonst aus den Proportionen $c:d=a:b$ und $c:f=e:b$ nach Nro. 3) folgen würde $b>b$, welches ungereimt ist. Folglich ist $f<d$.

5) Wenn die 2ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b=c:d$. und $e:b=f:d$, und $e>a$, so beweisen wir, dass auch $f>c$. Aus $a:b=c:d$ folgt durch Umkehrung $b:a=d:c$, aus $e:b=f:d$ aber $b:e=d:f$, aus $b:a=d:c$ und $b:e=d:f$ aber nach Nro. 1) $f>c$.

6) Wenn die 3ten und 4ten Glieder gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $e:f=c:d$, und $e>a$, so beweisen wir, dass auch $f>b$ sei. Aus $a:b=c:d$ folgt $c:d=a:b$, aus $e:f=c:d$ aber $c:d=e:f$, aus $c:d=a:b$ und $c:d=e:f$ aber nach Nro. 2) $f>b$.

7) Wenn die äusseren Glieder gleich sind. Es sei $a:b=c:d$, und $a:e=f:d$, und $e>b$, so beweisen wir, dass $f<c$ sei. Aus

Digitized by Google

$a:b=c:d$ folgt $b:a=d:c$, aus $a:e=f:d$ aber $e:a=d:f$, aus $b:a=d:c$ und $e:a=d:f$ aber nach Nro. 4) $f<c$.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn $a:b>c:d$, so ist $b:a<d:c$, desgleichen $c:d<a:b$, dagegen wiederum $d:c>b:a$.

Beweis. Wenn $a:b>c:d$, und $a:b=e:d$, so ist nach §. 6. $e>c$. Aus $a:b=e:d$ folgt $b:a=d:e$. Macht man nun $b:a=f:c$, so ist, weil $c<e$, nach §. 8. auch $f<d$, folglich $b:a<d:c$. Aus $a:b=e:d$ folgt $e:d=a:b$. Macht man nun $c:d=g:b$, so ist, weil $c<e$, nach §. 8. auch $g<a$, also $c:d<a:b$. Aus $c:d=g:b$ folgt durch Umkehrung $d:c=b:g$. Macht man nun $d:c=h:a$, so ist, weil $a>g$, nach §. 8. auch $h>b$, also $d:c>b:a$.

§. 10. Erklärung.

Eine Proportion, worin die mittleren Glieder gleich sind, heisst eine **stetige**, eine solche aber, worin die mittleren Glieder nicht gleich sind, eine **discrete**. In einer stetigen Proportion heisst das mittlere Glied die **mittlere Proportionale** zwischen den beiden äusseren Gliedern. Wenn in einer Reihe gleichartiger Grössen die 1ste sich zur 2ten verhält wie die 2te zur 3ten, die 2te zur 3ten wie die 3te zur 4ten, u. s. w., so heisst die Reihe eine **geometrische Reihe**, und die zwischen dem 1sten und letzten Gliede derselben enthaltenen Glieder die **erste, zweite, dritte ... mittlere stetige Proportionale** zwischen dem 1sten und letzten Gliede.

§. 11. Lehrsatz.

Zwischen jeden zwei gleichartigen Grössen findet allemal eine, aber auch nur Eine mittlere Proportionale statt, und diese ist, wenn die beiden äusseren Glieder einander gleich sind, eben so gross, wenn aber die äusseren Glieder ungleich sind, grösser als das kleinere und kleiner als das grössere von beiden Gliedern.

Beweis. Man lasse, bei ungeändertem 1sten Gliede a, das mittlere von dem Werthe a an stetig wachsen, so ist aus dem Begriffe der Proportion klar, dass das letzte Glied, anfangs $=a$, nachher $>a$ ist, aus §. 8. aber, dass auch das letzte Glied stetig wächst. Lässt man auf diese Weise das mittlere Glied über alle Grenzen hinaus wachsen, so wächst um so mehr das letzte über alle Grenzen hinaus. Lässt man dagegen das mittlere Glied von dem Werthe a an stetig abnehmen, so ist das letzte Glied, anfangs $=a$, nachher $<a$, und nimmt stetig ab. Läss man auf diese Art das mittlere Glied kleiner werden als jede gegebene Grösse derselben Art, so wird um so mehr das letzte Glied kleiner als jede gegebene Grösse derselben Art. Aus allem diesen folgt das zu Beweisende von selbst.

Digitized by Google

§. 12. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse doppelt so gross ist als eine andere, so hat die mittlere Proportionale zwischen beiden mit keiner von beiden ein gemeinschaftliches Maass.

Beweis. Es sei $a:b=b:2a$. Gesetzt, a und b hätten ein gemeinschaftliches Maass, und es sei $b=\frac{n}{m}a$, so wäre auch $2a=\frac{n}{m}b=\frac{nn}{mm}a$, also $2mma=nna$, also $2mm=nn$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass m und n nicht zugleich gerade Zahlen sind; wäre dieses, so könnte man $\frac{n}{m}$ in $\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}m}$ verwandeln, und mit diesem Aufheben des Bruches so lange fortfahren, bis wenigstens Eine von beiden Zahlen ungerade geworden ist. Es können aber auch m und n nicht zugleich ungerade Zahlen sein; sonst wäre $2mm$ eine gerade Zahl, und nn ungerade, also $2mm$ nicht $=nn$. Es kann auch nicht m gerade und n ungerade sein; sonst wäre wiederum $2mm$ gerade, und nn ungerade. Es kann endlich auch nicht m ungerade uud n gerade sein; sonst wäre mm ungerade, und $\frac{1}{2}nn$ gerade, also mm nicht $=\frac{1}{2}nn$, und $2mm$ nicht $=nn$. Folglich ist die Annahme falsch, und a und b haben kein gemeinschaftliches Maass.

Gesetzt, b und $2a$ hätten ein gemeinschaftliches Maass, so müssten nach dem Begriff der Proportion auch a und b ein gemeinschaftliches Maass haben. Da dies nicht ist, so haben auch b und $2a$ kein gemeinschaftliches Maass.

§. 13. Erklärung.

Zwei gleichartige Grössen, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, heissen commensurabel, zwei gleichartige Grössen aber, welche kein gemeinschaftliches Maass haben, incommensurabel. Zwei commensurable Grössen stehen zu einander in einem rationalen, zwei incommensurable Grössen aber in einem irrationalen Verhältniss.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn 2 gleichnamige Glieder einer Proportion gleichvielmal vervielfältigt, oder statt dessen gleichvielste aliquote Theile genommen werden, so bleibt die Proportion richtig. Wenn dagegen von ungleichnamigen Gliedern das eine vervielfältigt, statt des andern aber der ebensovielste Theil genommen wird, so bleibt die Proportion richtig.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so beweisen wir erstlich, dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, $ma:b=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt nach dem Begriff der Proportion, dass $nma \gtrless pb$, je nachdem $nmc \gtrless pd$, und hieraus wieder, gleichfalls nach dem

Digitized by Google

Begriff der Proportion, $ma:b=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $ma \gtrless npb$, je nachdem $mc \gtrless npd$, und hieraus $a:pb=c:pd$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $mna \gtrless mpb$, je nachdem $mnc \gtrless mpd$, d. i. je nachdem $nc \gtrless pd$, und hieraus $ma:mb=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, hieraus aber $mc:md=a:b$, d. i. $a:b=mc:md$.

Es sei $a:b=c:d$, und $\frac{a}{m}:b=e:d$, so folgt aus der letzteren Proportion

$$\begin{array}{l} a:b=me:d \\ a:b=c:d \\ \hline me=c \quad \text{(nach §. 7.)}, \end{array}$$

also $e=\frac{c}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:b=e:d$ schreiben $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $b:a=d:c$, also $\frac{b}{m}:a=\frac{d}{m}:c$, also $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner, wenn man $\frac{a}{m}:e=c:d$ macht (woraus sich $a:me=c:d$ ergiebt) $me=b$, also $e=\frac{b}{m}$; also kann man statt $\frac{a}{m}:e=c:d$ schreiben $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, also $\frac{c}{m}:\frac{d}{m}=a:b$, d. i. $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$.

Es sei $a:b=c:d$, und $ma:b=c:e$, so folgt aus der letzteren Proportion nach dem Bisherigen $a:\frac{b}{m}=c:e$. Aus $a:b=c:d$ folgt aber auch

$$\begin{array}{l} a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m} \\ \hline e=\frac{d}{m}. \end{array}$$

Also kann man statt $ma:b=c:e$ schreiben $ma:b=c:\frac{d}{m}$. Aus $a:b=c:d$ folgt ferner $c:d=a:b$, und hieraus $mc:d=a:\frac{b}{m}$, d. i. $a:\frac{b}{m}=mc:d$. Aus $a:b=c:d$ folgt auch $\frac{a}{m}:b=\frac{c}{m}:d$, d. i. $\frac{a}{m}:b=c:dm$. Aus $a:b=c:d$ folgt endlich $a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$, und hieraus $a:mb=\frac{c}{m}:d$.

§. 15. Zusatz.

Also kann man in jeder Proportion auch gleichnamige Glieder mit einerlei Bruch multipliciren, oder von ungleichnamigen Gliedern

Digitized by Google

das eine mit einem Bruch, und das andere mit dem umgekehrten Werthe dieses Bruches; man kann also statt $a:b=c:d$ schreiben

$$\frac{m}{n}a:b=\frac{m}{n}c:d,\quad a:\frac{m}{n}b=c:\frac{m}{n}d,\quad \frac{m}{n}a:\frac{m}{n}b=c:d,\quad a:b=\frac{m}{n}c:\frac{m}{n}d,$$

$$\frac{m}{n}a:b=c:\frac{n}{m}d,\quad a:\frac{m}{n}b=\frac{n}{m}c:d.$$

§. 16. Lehrsatz.

Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie (simpliciter ex aequo) auch einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a:b=e:f$. Ist nun $\frac{n}{m}c \gtrless d$, so ist auch $\frac{n}{m}a \gtrless b$; ist aber $\frac{n}{m}a \gtrless b$, so ist $\frac{n}{m}e \gtrless f$. Folglich ist $\frac{n}{m}c \gtrless d$, je nachdem $\frac{n}{m}e \gtrless f$. Folglich verhält sich $c:d=e:f$.

§. 17. Zusatz.

Wenn ein Verhältniss einem andern gleich, aber $>$ ist als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss $>$ als das 3te. Und ist ein Verhältniss einem andern gleich, aber $<$ als ein drittes, so ist auch das 2te Verhältniss $<$ als das dritte. Wenn ein Verhältniss $>$ ist als ein anderes, und dieses $>$ als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss $>$ als das 3te. Und wenn ein Verhältniss $<$ ist als ein anderes, und dieses $<$ als ein 3tes, so ist um so mehr das 1ste Verhältniss $<$ als das 3te.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn in 2 Proportionen das 2te Glied der 1sten und das 1ste Glied der 2ten einander gleich sind, das 4te Glied der 1sten aber dem 3ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten dem 2ten Glied der 2ten gleich ist und das 3te Glied der 1sten dem 4ten Glied der 2ten, so bilden (ordinatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $b:e=d:f$, so verhält sich nach §. 14., welche ganze Zahlen man auch unter m und n verstehen mag, $ma:b=mc:d$, und $b:ne=d:nf$. Ist nun $ma=ne$, so hat man $b:ma=d:nf$, also

$$\begin{array}{l} ma:b=nf:d \\ \underline{ma:b=mc:d} \\ mc=nf \quad (\text{§. 7.}) \end{array}$$

Digitized by Google

Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $<$ ist als $ma - ne$, den $p$ten Theil, von ma so oft weg, als es angeht, so giebt es wenigstens Ein Vielfaches des Theils $\frac{1}{p} b$, welches zwischen ma und ne liegt; es sei demnach $\frac{q}{p} b < ma$ und $> ne$. Aus $ma : b = mc : d$ und $b : ne = d : nf$ folgt nach §. 15. $ma : \frac{q}{p} b = mc : \frac{q}{p} d$, und $\frac{q}{p} b : ne = \frac{q}{p} d : nf$. Da nun $ma > \frac{q}{p} b$, und $\frac{q}{p} b > ne$, so ist auch $mc > \frac{q}{p} d$, und $\frac{q}{p} d > nf$, also um so mehr $mc > nf$. Ist endlich $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mc < nf$. Da also $ma \gtrless ne$, je nachdem $mc \gtrless nf$, welche ganze Zahlen man auch statt m und n setzen mag, so verhält sich $a : e = c : f$. Es sei nun $a : b = c : d$ und $e : a = f : c$, so ist $b : a = d : c$ und $a : e = c : f$, also $b : e = d : f$.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die ersten Glieder einander und die 3ten Glieder einander gleich sind, oder auch die 2ten Glieder einander und die 4ten Glieder einander, so bilden (was man auch ordinatim ex aequo nennt) die übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a : e = c : f$, so ist auch

$$\frac{e : a = f : c}{e : b = f : d} \quad (\text{§. 18.})$$

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $e : b = f : d$, so ist auch

$$\frac{b : e = d : f}{a : e = c : f} \quad (\text{§. 18.})$$

§. 20. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen das 2te Glied der 1sten gleich ist dem 1sten der 2ten, und das 3te der 1sten = dem 4ten der 2ten, oder wenn das 1ste Glied der 1sten gleich ist dem 2ten der 2ten und das 4te der 1sten = dem 3ten der 2ten, so bilden (perturbatim ex aequo) auch die 4 übrigen Glieder nach der Ordnung eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $b : e = f : c$, so ist nach §. 14. auch $ma : b = c : \frac{d}{m}$ und $b : ne = \frac{f}{n} : c$. Ist nun $ma = ne$, so hat man $b : ma = \frac{f}{n} : c$, also

Digitized by Google

$$ma : b = c : \frac{f}{n}$$

$$ma : b = c : \frac{d}{m}$$

$$\frac{d}{m} = \frac{f}{n} \quad (\S.\ 7.)$$

also (wenn man beiderseits das $m \times n$fache nimmt) $nd = mf$. Ist aber $ma > ne$, so nehme man einen aliquoten Theil der Grösse b, welcher $< ma - ne$, den $p$ten, von ma so oft weg, als es angeht, und es sei $\frac{q}{p} b > ne$ und $< ma$. Aus $ma : b = c : \frac{d}{m}$ und $b : ne = \frac{f}{n} : c$ folgt nach §. 15. $ma : \frac{q}{p} b = \frac{p}{q} c : \frac{d}{m}$ und $\frac{q}{p} b : ne = \frac{f}{n} : \frac{p}{q} c$. Da nun $ma > \frac{q}{p} b$, und $\frac{q}{p} b > ne$, so ist auch $\frac{p}{q} c > \frac{d}{m}$, und $\frac{f}{n} > \frac{p}{q} c$, also um so mehr $\frac{f}{n} > \frac{d}{m}$, also $mf > nd$. Ist dagegen $ma < ne$, so wird auf ähnliche Art bewiesen, dass $mf < nd$. Da also $ma \gtrless ne$, je nachdem $mf \gtrless nd$, so verhält sich $a : e = f : d$.

Es sei nun $a : b = c : d$, und $e : a = d : f$, so ist $b : a = d : e$, und $a : e = f : d$, also $b : e = f : c$.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn in zwei Proportionen die 1sten Glieder einander gleich sind und die 4ten einander, oder auch die 2ten Glieder einander gleich und die 3ten einander, so bilden (perturbatim ex aequo) die übrigen Glieder eine Proportion so, dass die übrigen Glieder der einen Proportion die äusseren Glieder, und die übrigen Glieder der andern Proportion die mittleren Glieder werden.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a : e = f : d$, so ist auch

$$\frac{e : a = d : f}{e : b = c : f} \quad (\S.\ 20.),$$

und daher auch $b : e = f : c$.

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $e : b = c : f$, so ist auch

$$\frac{b : e = f : c}{a : e = f : d} \quad (\S.\ 20.)$$ und daher auch $e : a = d : f$.

§. 22. Erklärung.

Wenn man $a : b = c : d$, und $b : e = f : g$ macht, so heisst das Verhältniss $a : e$ aus den Verhältnissen $c : d$ und $f : g$ zusammengesetzt, und wird durch $a : e = (c : d) + (f : g)$ bezeichnet. Auf diese Art kann man so viel Verhältnisse, als man will, zusammensetzen; es sei $a : b = c : d$, $b : e = f : g$, $c : h = i : k$, und

Digitized by Google

$h:l=m:n$, so heisst das Verhältniss $a:l$ aus den Verhältnissen $c:d$, $f:g$, $i:k$ und $m:n$ zusammengesetzt, und wird durch $a:l = (c:d)+(f:g)+(i:k)+(m:n)$ bezeichnet. Sind die zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich, so heisst das zusammengesetzte ein vielfaches Verhältniss (das doppelte, dreifache u. s. w.) und man sagt, wenn $a:b=b:c=c:d=d:e$, dass $a:e$ das Vierfache des Verhältnisses $a:b$ sei, und bezeichnet es durch $a:e=4(a:b)$.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse nach zwei einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, in welcher Ordnung man auch die beiden Verhältnisse zusammensetzen mag, d. h. wenn man $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $a:h=f:g$ und $h:i=c:d$ macht, so ist $e=i$.

Beweis. Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt

simpl. ex aequo $a:b=h:i$, aus $b:e=f:h$ und $a:h=f:g$ aber $b:e=a:h$

perturb. ex aequo $a:e=a:i$; folglich ist $e=i$.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn zwei einfache Verhältnisse einem 3ten, aus 2 Verhältnissen zusammengesetzten, Verhältniss gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, $b:e=f:g$, $h:i=c:d$, und $i:k=f:g$, so beweisen wir, dass $a:e=h:k$.

Aus $a:b=c:d$ und $h:i=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=h:i$,
aus $b:e=f:g$ und $i:k=f:g$ aber $b:e=i:k$

ordinatim ex aeq. $a:e=h:k$.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn eine Proportion aus 4 gleichartigen Gliedern besteht, so kann man die äusseren Glieder mit einander oder die mittleren Glieder mit einander verwechseln, und die Proportion bleibt richtig.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d seien gleichartige Grössen, so ist $a:c=(a:b)+(b:c)$, und $b:d=(b:c)+(c:d)$, also (§. 24.) $a:c=b:d$.

Digitized by Google

§. 26. Zusatz.

Jede Proportion zwischen 4 gleichartigen Grössen kann daher, ohne ein Glied zu ändern, in 8 Ordnungen

$$a:b=c:d,\ a:c=b:d,\ b:a=d:c,\ b:d=a:c,\ c:d=a:b,$$
$$c:a=d:b,\ d:c=b:a,\ d:b=c:a$$

geschrieben werden. Man sieht hieraus, dass jede Ordnung zulässig ist, wofern nur die gleichnamigen Glieder gleichnamig bleiben, auch dass jede Ordnung zulässig ist, wofern nur die ungleichnamigen Glieder ungleichnamig bleiben.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn eine Grösse nach mehreren einfachen Verhältnissen verändert wird, so kommt einerlei Grösse heraus, nach welcher Ordnung man auch die Verhältnisse zusammensetzen mag.

Beweis. Nach §. 23. ist es einerlei, ob man die Grösse a nach den Verhältnissen $b:c$ und $d:e$ oder nach den Verhältnissen $d:e$ und $b:c$ verändert; folglich ist es auch einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $d:e$, $b:c$ und $f:g$ verändert. Folglich kann man die Ordnung $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die Ordnung $d:e$, $b:c$, $f:g$ verwandeln. Macht man nun $a:h=b:c$, so ist es nach §. 23. einerlei, ob man h nach den Verhältnissen $d:e$ und $f:g$ oder nach den Verhältnissen $f:g$ und $d:e$ verändert; also ist es einerlei, ob man a nach den Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$ oder nach den Verhältnissen $b:c$, $f:g$, $d:e$ verwandelt. Auf diese Art kann man nach und nach jedes der 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ in die letzte Stelle bringen, und, während es die letzte Stelle behält, die Ordnung der beiden ersten Stellen beliebig vertauschen. Folglich kann man die 3 Verhältnisse $b:c$, $d:e$, $f:g$ überhaupt in beliebige Ordnung bringen.

Ist a nach 4 Verhältnissen $b:c$, $d:e$, $f:g$, $h:i$ zu verwandeln, so kann man, während das Verhältniss $h:i$ die letzte Stelle behält, die 3 ersten Verhältnisse in beliebige Ordnung stellen; dadurch kommt nach und nach jedes der 3 ersten Verhältnisse in die 3te Stelle, und kann dann nach §. 23. durch Verwechselung der beiden letzten Stellen in die letze Stelle kommen. Während nun jedes der 4 Verhältnisse in der letzten Stelle bleibt, kann man die 3 übrigen Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen; also kann man überhaupt alle 4 Verhältnisse in beliebige Ordnung setzen.

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 4 Verhältnissen auf 5 u. s. w.

Digitized by Google

§. 28. Lehrsatz.

Wenn 2 einfache Verhältnisse einem 3ten, aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweis. Es sei

$$\begin{array}{l|l} a:b = c:d & p:q = c:d \\ b\ \ c = f:g & q:r = f:g \\ e:h = i:k & r:s = i:k \\ h:l = m:n & s:t = m:n \end{array}$$

(wo statt 4 Paar auch jede andere Anzahl Paare von Verhältnissen gesetzt werden kann), so beweisen wir, dass $a:l=p:t$.

Aus $a:b=c:d$ und $p:q=c:d$ folgt simpl. ex aeq. $a:b=p:q$

„ $b:e=f:g$ „ $q:r=f:g$ „ „ „ „ $\underline{b:e=q:r}$

ordin. ex aeq. $a:e=p:r$

„ $e:h=i:k$ „ $r:s=i:k$ „ simpl. ex aeq. $\underline{e:h=r:s}$

ordin. ex aeq. $a:h=p:s$

u. s. w., endlich $a:l=p:t$.

§. 29. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einem dritten gleich sind (gleichviel welche Verhältnisse einfach, und welche zusammengesetzt sind), so sind sie einander gleich.

Beweis. Man setze statt jedes zusammengesetzten Verhältnisses ein ihm gleichbedeutendes einfaches, wovon man das erste Glied beliebig und von beliebiger Art annehmen kann, so folgt das zu Beweisende unmittelbar aus §. 16.

§. 30. Lehrsatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, so hat die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und a, b, c, d gleichartig, so ist $ma \gtrless nb$, je nachdem $mc \gtrless nd$, also auch $ma \gtrless nb$, je nachdem $ma+mc \gtrless nb+nd$, d. i. je nachdem $m(a+c) \gtrless n(b+d)$, also $a:b = a+c:b+d$.

Es sei $a:b=c:d=e:f$, und a, b, c, d, e, f gleichartig, so ist

$$\frac{a:b = \quad a+c:b+d}{a:b = a+c+e:b+d+f}.$$

Digitized by Google

Auf ähnliche Art macht man den Schluss von 3 Verhältnissen auf 4 u. s. w.

§. 31. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, doch so, dass die Vorderglieder der beiden Verhältnisse einander ungleich, und die Hinterglieder einander ungleich sind, so hat die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder das nämliche Verhältniss.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, und $a>c$, so ist auch $b>d$. Man mache

$$\text{simpl. ex aeq.}\ \frac{\begin{array}{l}a:b=a-c:e,\ \text{so ist}\\ a-c:e=c:d=a-c+c:d+e\ (\text{§. 30.}),\ \text{d. i.}\\ a-c:c=a:d+e\\ a-c:e=a:b\end{array}}{d+e=b\ (\text{§. 7.}),\ \text{also}\ e=b-d.}$$

Folglich kann man statt $a:b=a-c:e$ schreiben $a:b=a-c:b-d$.

§. 32. Zusatz.

Wenn mehrere Verhältnisse gleichartiger Grössen einander gleich sind, und man subtrahirt und addirt die Vorderglieder promiscue, und subtrahirt und addirt die Hinterglieder in derselben Ordnung, so erhält man 2 Grössen, welche in dem nämlichen Verhältniss stehen, z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, und es ist $a+c>e$, und $a+c-e+g>i$, so ist auch $b+d>f$, $b+d-f+h>k$, und $a:b=a+c-e+g-i:b+d-f+h-k$. Bei diesen Subtractionen und Additionen kann man (nach §. 14. und §. 15.) Glieder, die zu einerlei Verhältniss gehören, auch mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruch multipliciren; z. B. wenn $a:b=c:d=e:f=g:h=i:k$, und es ist $\frac{3}{4}a+5c>e$, und $\frac{3}{4}a+5e-e+\frac{1}{7}g>i$, so ist auch $\frac{3}{4}b+5d>f$, $\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h>k$, und $a:b=\frac{3}{4}a+5c-e+\frac{1}{7}g-i:\frac{3}{4}b+5d-f+\frac{1}{7}h-k$.

§. 33. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando) das 1ste Glied zur Summe der beiden ersten wie das 3te zur Summe des 3ten und 4ten, auch die Summe der beiden ersten Glieder zum 2ten wie die Summe des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so ist $ma<m(a+b)$, und $mc<m(c+d)$. Ist $m<n$, so ist um so mehr $ma<n(a+b)$, und $mc<n(c+d)$. Ist endlich $m>n$, so ist

Digitized by Google

$(m-n)\,a \gtrless nb$, je nachdem $(m-n)\,c \gtrless nd$

$na = na$ $\qquad$ $nc = nc$

$ma \gtrless n(a+b)$, je nachdem $mc \gtrless n(c+d)$.

Folglich ist überhaupt, welche ganze Zahlen man auch unter m und n verstehen mag, $ma \gtrless n(a+b)$, je nachdem $mc \gtrless n(c+d)$. Folglich verhält sich $a : a+b = c : c+d$. Da aber $b : a = d : c$, so ist auch $b : b+a = d : d+c$, d. i. $a+b : b = c+d : d$.

§. 34. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (differentiando) das 1ste Glied zur Differenz der beiden ersten wie das 3te Glied zur Differenz des 3ten und 4ten, und die Differenz der beiden ersten Glieder zum 2ten wie die Differenz des 3ten und 4ten zum 4ten.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a > b$, so ist auch $c > d$. Man mache

$a : a-b = c : e$, so ist

ord. ex aeq. $a-b : b = e : d$, also (summando) $a-b : a = e : d+e$

$a-b : a = c : c$

$d+e = c$ (§. 7.)

also $e = c-d$. Statt $a : a-b = c : e$ kann man also schreiben

$a : a-b = c : c-d$

$a : \ b \ = c : d$

ord. ex aeq. $a-b : b = c-d : d$.

Es sei dagegen $a : b = c : d$, und $a < b$, so ist $b : a = d : c$, und $b > a$, folglich $b : b-a = d : d-c$, und $b-a : a = d-c : c$, d. i. $b-a : b = d-c : d$, und $a : b-a = c : d-c$.

§. 35. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich (summando et differentiando) die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$, und $a > b$, so verhält sich

$a+b : b = c+d : d$

$a-b : b = c-d : d$

ord. ex aeq. $a+b : a-b = c+d : c-d$.

Es sei aber $a : b = c : d$, und $a < b$, so verhält sich

$a+b : b = c+d : d$

$b-a : b = d-c : d$

ord. ex aeq. $a+b : b-a = c+d : d-c$.

Digitized by Google

§. 36. Lehrsatz.

Wenn mehrere Proportionen, welche aus lauter gleichen Verhältnissen bestehen, Glied für Glied zusammen addirt werden, so erhält man wieder eine richtige Proportion.

Beweis. Es sei

$$\left.\begin{array}{l} a:b=c:d=e:f \\ g:h=i:k=e:f \\ l:m=n:p=e:f \\ q:r=s:t=e:f \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

(wo statt 4 Reihen auch jede beliebige Anzahl von Reihen unter einander gesetzt sein können), so beweisen wir, dass

$$a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p+t.$$

Aus $a:b=e:f$, $g:h=e:f$, $l:m=e:f$ und $q:r=e:f$ folgt nach §. 30.

$$a+g+l+q:b+h+m+r=e:f,$$

aus $c:d=e:f$, $i:k=e:f$, $n:p=e:f$ und $s:t=e:f$ aber

$$\frac{c+i+n+s:d+k+p+t=e:f}{\text{simpl. ex aeq. } a+g+l+q:b+h+m+r=c+i+n+s:d+k+p+t}$$

§. 37. Zusatz.

Statt der im vorigen Paragraphen erwähnten Addition kann man auch promiscue addiren und subtrahiren, und dabei jedes Glied mit einer ganzen Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einem Bruch multipliciren; z. B. aus den oben mit (1) bezeichneten Proportionen kann man (wenn $\frac{3}{4}a+5g>l$) schliessen:

$$\tfrac{3}{4}a+5g-\tfrac{1}{7}l+q:\tfrac{3}{4}b+5h-\tfrac{1}{7}m+r=22i+n+\tfrac{2}{5}s:22k+p+\tfrac{2}{5}t.$$

§. 38. Zusatz.

Bei der in §. 35. erwähnten Schlussart summando et differentiando kann man auch gleichnamige Glieder mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren oder mit einerlei Bruch multipliciren z. B. aus $a:b=c:d$ kann man, wenn $6a<\frac{5}{8}b$, schliessen:

$$\tfrac{1}{7}a+\tfrac{1}{3}b:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{7}c+\tfrac{1}{3}d:\tfrac{5}{8}d-6c,$$

und, wenn $\frac{1}{3}b>\frac{1}{7}a$ ist,

$$\tfrac{1}{3}b-\tfrac{1}{7}a:\tfrac{5}{8}b-6a=\tfrac{1}{3}d-\tfrac{1}{7}c:\tfrac{5}{8}d-6c.$$

Digitized by Google

§. 39. Lehrsatz.

Wenn 4 gleichartige Grössen, welche nicht sämmtlich einander gleich sind, in Proportion stehen, so sind entweder 2 und 2 einander gleich, oder es sind nur 2 einander gleich und eine grösser und eine kleiner, oder alle 4 sind ungleich; im ersten Fall sind die gleichen Glieder gleichnamig, im zweiten Fall aber die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig, im dritten Fall endlich das grösste und kleinste Glied ungleichnamig; im zweiten und dritten Fall ist die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $>$ als die Summe der beiden übrigen Glieder.

Beweis. 1) Es sei $a:b=c:d$, und $a=b$, so ist auch $c=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

2) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

3) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, und $b=c$, so ist a das grösste, und d das kleinste Glied, also die gleichen Glieder ungleichnamig und das grösste und kleinste ebenfalls unter einander ungleichnamig. Es ist also $a:b=b:d$. Setzt man $a=b+e$, so wird $b+e:b=b:d$, und setzt man noch $b=d+f$, so wird $d+e+f:d+f=d+f:d$, also die Summe des grössten und kleinsten Gliedes $=2d+e+f$, die Summe der beiden übrigen Glieder aber $=2d+f+f$. Aus $d+e+f:d+f=d+f:d$ folgt nach §. 34. $e:d+f=f:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+f>d$ ist, so ist auch $e>f$, also $2d+e+f>2d+f+f$, d. i. die Summe des grössten und kleinsten Gliedes in der Proportion $a:b=c:d$ grösser als die Summe der beiden übrigen Glieder.

4) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, auch $b>c$, so folgen die 4 Glieder a, b, c, d nach der Ordnung ihrer Grösse, vom grössten bis zum kleinsten, auf einander; wir wollen beweisen, dass $a+d>b+c$. Man setze $c=d+e$, $b=c+f$, $a=b+g$, so kann man statt $a:b=c:d$ schreiben $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$. Folglich ist $a+d=2d+e+f+g$, und $b+c=2d+e+f+e$. Aus $d+e+f+g:d+e+f=d+e:d$ folgt nach §. 34. $g:d+e+f=e:d$. Da in dieser Proportion das Glied $d+e+f>d$ ist, so ist auch $g>e$, also $2d+e+f+g>2d+e+f+e$, d. i. $a+d>b+c$.

5) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, auch $a>c$, aber $b<c$, so ist (weil $a>b$) $c>d$, und (weil $a>c$) $b>d$; folglich ist a das grösste und d das kleinste Glied der Proportion. Durch Verwechselung der mittleren Glieder erhält man $a:c=b:d$, woraus nach Nro. 4) folgt, dass $a+d>b+c$.

6) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, aber $a=d$, so ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 3) $c+b>d+a$.

7) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a>d$, so ist (weil $c>a$) $d>b$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied der Proportion. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach Nro. 5) $c+b>d+a$.

Digitized by Google

8) Es sei $a:b=c:d$, und $a>b$, $a<c$, $a<d$, so ist (weil $a>b$) $c>d$; also ist c das grösste, und b das kleinste Glied. Da nun $c:d=a:b$, so ist nach 4) $c+b>d+a$.

9) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $=c$, so ist auch $b=d$, also die gleichen Glieder gleichnamig.

10) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, und $a=d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 6).

11) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, aber $>c$, auch $a>d$, so ist durch Verwechselung der mittleren Glieder $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 7).

12) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a>c$, $a<d$, so ist wiederum $a:c=b:d$, und wir haben wieder den Fall Nro. 8).

13) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, und $b=c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 3).

14) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b>c$, so ist $d:b=c:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

15) Es sei $a:b=c:d$, und $a<b$, $a<c$, $b<c$, so ist $d:c=b:a$, und wir haben wieder den Fall Nro. 4).

§. 40. Lehrsatz.

Zwischen jeden 2 gleichartigen Grössen kann man so viel mittlere stetige Proportionalgrössen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen.

Beweis. Es seien a und b zwei gleichartige Grössen, und $b>a$; es sollen 3 mittlere stetige Proportionalen gefunden werden. Man bilde die geometrische Reihe a, c, d, e, f, und lasse c von dem Werthe a an stetig über alle Grenzen hinaus wachsen, so ist (nach dem vorigen Paragraphen) stets $c-a<d-c$, $d-c<e-d$, und $e-d<f-e$, also $f-a>4(c-a)$. Da nun $a:c=c:d$, und c stetig wächst, so wächst auch d stetig; da $a:c=d:e$, und c und d stetig wachsen, so wächst auch e stetig; da $a:c=e:f$, und c und e stetig wachsen, so wächst auch f stetig. Da aber $c-a$ über alle Grenzen hinaus wächst, so wächst um so mehr $f-a$ (welche Differenz nach Obigem $>4(c-a)$ ist) über alle Grenzen hinaus; folglich wächst f über alle Gränzen hinaus. Es muss also einen, aber auch nur Einen Werth von c geben, für welchen $f=b$ ist, und diesem Werth von c entspricht nur Ein Werth von d und nur Ein Werth von e.

Es sei aber nun $b<a$, so lassen sich, weil $a>b$ ist, zwischen b und a so viele mittlere Proportionalen finden, als man will, aber, wenn ihre Anzahl gegeben ist, immer nur dieselben Grössen. Diese mittleren Proportionalen sind aber, in umgekehrter Ordnung, die mittleren Proportionalen zwischen a und b.

§. 41. Zusatz.

Zu jedem gegebenen Verhältniss ist allemal ein, aber auch nur Ein Verhältniss möglich, welches, eine gegebene Anzahl mal mit sich selbst zusammengesetzt, das gegebene Verhältniss giebt.

Digitized by Google

§. 42. Erklärung.

Ein solches Verhältniss heisst ein getheiltes Verhältniss (das halbe Verhältniss, das gedrittheilte Verhältniss, das geviertheilte Verhältniss, u. s. w.), und wird durch einen vorgesetzten Bruch bezeichnet; so ist $\frac{1}{4}(a:b)$ das Verhältniss von a zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b.

§. 43. Lehrsatz.

Wenn 2 Verhältnisse einander gleich sind, so sind auch ihre gehalbtheilten, gedrittheilten Verhältnisse u. s. w. einander gleich.

Beweis. Es sei $a:b=c:d$, so beweisen wir, dass a sich z. B. zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen a und b verhält wie c zur ersten der 3 mittleren stetigen Proportionalen zwischen c und d. Es sei $a:e=\frac{1}{4}(a:b)$, und man mache $a:e=c:f$, so ist

$$\begin{array}{l} a:b=4(a:e)=4(c:f) \\ a:b= \qquad\quad c:d \\ \hline \text{simpl. ex aeq. } 4(c:f)=c:d, \text{ also } c:f=\frac{1}{4}(c:d) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c:f=a:e=\frac{1}{4}(a:b) \\ \hline \text{simpl. ex aeq. } \frac{1}{4}(a:b)=\frac{1}{4}(c:d). \end{array}$$

§. 44. Lehrsatz.

Anstatt ein Verhältniss zu theilen und dann zu vervielfältigen, kann man von dem Ebensovielfachen des gegebenen Verhältnisses das ebensovielste getheilte Verhältniss nehmen.

Beweis. Es seien a und b gleichartige Grössen, und m und n beliebige ganze Zahlen; wir wollen beweisen, dass $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$. Das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(a:b)$ ist $a:b$, also das $m$fache des Verhältnisses $n(\frac{1}{m}(a:b)) = n(a:b)$, aber das $m$fache des Verhältnisses $\frac{1}{m}(n(a:b))$ ebenfalls $=n(a:b)$. Folglich ist (nach dem vorigen Paragraphen) $n(\frac{1}{m}(a:b)) = \frac{1}{m}(n(a:b))$.

§. 45. Erklärung.

Das Verhältniss $n(\frac{1}{m}(a:b))$ oder $\frac{1}{m}(n(a:b))$ heisst ein ge-

Digitized by Google

brochenes Verhältniss, und wird kürzer durch $\frac{n}{m}(a:b)$ ausgedrückt; $m:n$ heisst in diesem Fall das Brechungsverhältniss.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn man zwischen einer Grösse und einem aliquoten Theil derselben eine oder mehrere mittlere stetige Proportionalen nimmt, so ist entweder jede mittlere Proportionale ein aliquoter Theil jeder grösseren mittleren Proportionale, oder das getheilte Verhältniss ist ein irrationales.

Beweis. Die gegebene Grösse sei in m gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil sei a, und man mache $\frac{1}{n}(a:ma) = a:b$. Ist alsdann a kein aliquoter Theil von b, so beweisen wir, dass das Verhältniss $a:b$ ein irrationales sei. Gesetzt, $a:b$ sei ein rationales Verhältniss, und es sei $b = \frac{q}{p}a$, so wäre $ma = \frac{q^n}{p^n}a$; also müsste p^n ein aliquoter Theil von q^n sein, welches aber, weil p kein aliquoter Theil von q ist, unmöglich ist. Folglich ist die Annahme falsch, und $a:b$ ein irrationales Verhältniss.

§. 47. Lehrsatz

Jedes Verhältniss einer kleineren Grösse zu einer grösseren kann als ein vielfaches oder getheiltes oder gebrochenes Verhältniss jedes anderen Verhältnisses einer kleineren Grösse zu einer grösseren angesehen werden, und das Brechungsverhältniss ist für jedes gegebene Paar von Verhältnissen nur Eines, wenngleich nicht allemal rational.

Beweis. Es sei $a < b$, und $c < d$, und man mache $c:d = a:e$. Man theile das Verhältniss $c:d$ beliebig; man mache $\frac{1}{m}(c:d) = a:f$. Dann ist entweder das Verhältniss $a:b$ ein Vielfaches von $a:f$, oder es giebt 2 Vielfache $n(a:f) = a:g$ und $(n+1)(a:f) = a:h$ von der Art, dass b zwischen g und h liegt. Im letzteren Falle mache man $\frac{1}{2m}(c:d) = a:i$, und fahre mit der continuirlichen Halbtheilung des Verhältnisses $a:f$ fort, so erhellt das zu Beweisende ganz auf ähnliche Art wie in §. 2., wenn man noch §. 39. zu Hülfe nimmt.

Denn macht man $c:d = b:k$, $\frac{1}{m}(b:k) = b:l$, $\frac{1}{2m}(b:k) = b:n$, $\frac{1}{4m}(b:k) = b:p$, u. s. w., so ist nach §. 39. $l - b < \frac{k-b}{m}$,

Digitized by Google

$n-b < \frac{k-b}{2m}$, $p-b < \frac{k-b}{4m}$, u. s. w.; da man nun durch fortgesetzte Halbirungen ($\frac{k-b}{m}$, $\frac{k-b}{2m}$, $\frac{k-b}{4m}$, u. s. w.) auf eine Grösse kommt, welche kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art, so kommt man um so mehr durch fortgesetzte Halbtheilung des Verhältnisses ($l-b$, $n-b$, $p-b$, u. s. w.) auf einen Unterschied, welcher kleiner ist als jede gegebene Grösse derselben Art; folglich wird um so mehr der Unterschied $h-g$ durch fortgesetzte Halbtheilung des Verhältnisses kleiner als jede gegebene Grösse derselben Art.

§. 48. Zusatz.

Dasselbe findet statt, wenn man jedes Verhältniss einer grösseren Grösse zu einer kleineren mit jedem anderen Verhältniss einer grösseren Grösse zu einer kleineren vergleicht.

XII.

Ueber die Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann.

Von

dem Herausgeber.

In verschiedenen französischen Journalen, namentlich in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées von Liouville, in den Comptes rendus de l'Académie des

Digitized by Google

sciences, und in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono, kommen seit einiger Zeit Untersuchungen über die Bestimmung einer Gränze vor, welche die Anzahl der bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zu machenden Divisionen nicht übersteigen kann. Wenn ich auch diese Untersuchungen nach dem, was jetzt vorliegt, noch nicht für abgeschlossen halte, so will ich doch die mir besonders wichtig und interessant scheinenden Resultate derselben den Lesern des Archivs im Folgenden im Zusammenhange mittheilen, indem ich hoffe, dass dadurch vielleicht einer oder der andere veranlasst werden wird, diesem jedenfalls sehr interessanten Gegenstande noch weiter nachzuforschen.

§. 1.

Wenn wir zwei beliebige ganze Zahlen durch A_1, B_1 bezeichnen, so ist die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers derselben nach der schon von Euklides gelehrten Methode bekanntlich in dem folgenden Schema enthalten:

$$\begin{array}{l|l|l}
B_1 & A_1 & Q_1 \\
\underline{B_1 Q_1} & & \\
B_2 & B_1 & Q_2 \\
\underline{B_2 Q_2} & & \\
B_3 & B_2 & Q_3 \\
\underline{B_3 Q_3} & & \\
B_4 \ldots & & \\
B_{n-1} & B_{n-2} & Q_{n-1} \\
\underline{B_{n-1} Q_{n-1}} & & \\
B_n & B_{n-1} & Q_n \\
\underline{B_n Q_n} & & \\
0 & &
\end{array}$$

wo die Grössen

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n$$

eine fortwährend abnehmende Reihe bilden, und der letzte Divisor B_n, bei welchem die Division aufgeht, welcher Fall bekanntlich immer endlich einmal eintreten muss, der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen A_1, B_1 ist.

Aus dieser Darstellung ergeben sich die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + B_4,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n;
\end{aligned}$$

Digitized by Google

also, wenn man mit D dividirt:

$$\frac{A_1}{D} = \frac{B_1}{D} Q_1 + \frac{B_2}{D},$$
$$\frac{B_1}{D} = \frac{B_2}{D} Q_2 + \frac{B_3}{D},$$
$$\frac{B_2}{D} = \frac{B_3}{D} Q_3 + \frac{B_4}{D},$$

u. s. w.

$$\frac{B_{n-2}}{D} = \frac{B_{n-1}}{D} Q_{n-1} + \frac{B_n}{D},$$
$$\frac{B_{n-1}}{D} = \frac{B_n}{D} Q_n.$$

Ist nun D ein Theiler von A_1 und B_1, so sind offenbar auch

$$\frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

sämmtlich ganze Zahlen, und die nicht verschwindenden Grössen

$$\frac{B_1}{D}, \frac{B_2}{D}, \frac{B_3}{D}, \frac{B_4}{D}, \ldots \frac{B_{n-1}}{D}, \frac{B_n}{D}$$

bilden eine fortwährend abnehmende Reihe. Auch ist klar, dass $\frac{B_n}{D}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass man, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1 zu finden, und um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{D}$ und $\frac{B_1}{D}$ zu erhalten, ganz dieselbe Anzahl von Divisionen machen muss. Weil nun B_n ein Theiler von A_1 und B_1 ist, so kann man im Vorhergehenden $D = B_n$ setzen, und man wird also, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1, und um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{A_1}{B_n}$ und $\frac{B_1}{B_n}$ zu finden, immer ganz dieselbe Anzahl von Divisionen zu machen haben. Deshalb wollen wir im Folgenden annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind, oder wir wollen, was offenbar dasselbe ist, $B_n = 1$ setzen, woraus sich nach der Natur des angewandten Verfahrens ganz von selbst ergiebt, dass die Grössen

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}$$

sämmlich grösser als die Einheit sind, und also der kleinste Werth, welchen eine jede derselben erhalten kann, 2 ist.

Digitized by Google

§. 2.

Wenn nun B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei beliebige einander benachbarte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n$$

sind; so haben wir nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1},$$

aus welcher sich ergiebt, dass immer

$$B_{k-1} \gtreqless B_k + B_{k+1}$$

ist. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$B_n = 1, \quad B_{n-1} \gtreqless 2.$$

Also ist offenbar kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots.$$

welche so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Glied die Summe der beiden unmittelbar vorhergehenden ist. Bezeichnen wir folglich die Glieder dieser Reihe durch

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5, \mathfrak{K}_6, \mathfrak{K}_7, \ldots.$$

und setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_1 &= 1, \\
\mathfrak{K}_2 &= 2, \\
\mathfrak{K}_3 &= \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2, \\
\mathfrak{K}_4 &= \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3, \\
\mathfrak{K}_5 &= \mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}_4, \\
\mathfrak{K}_6 &= \mathfrak{K}_4 + \mathfrak{K}_5, \\
\mathfrak{K}_7 &= \mathfrak{K}_5 + \mathfrak{K}_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ist kein Glied der Reihe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, B_{n-4}, B_{n-5}, \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

Digitized by Google

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5, \mathfrak{K}_6, \mathfrak{K}_7, \ldots.$$

welche wir im Folgenden die Reihe (I) nennen wollen. Also ist, wenn man wie im Vorhergehenden, um den grössten gemeinschaftlichen Theiler von A_1 und B_1 zu finden, n Divisionen zu machen genöthigt war, immer

$$B_1 \geqq \mathfrak{K}_n,$$

woraus sich ergiebt, dass, wenn überhaupt $\mathfrak{K}_\mu$ das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist, die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, nicht grösser als $\mu-1$ ist, weil, wenn die Anzahl dieser Divisionen μ wäre, nach dem Obigen

$$B_1 \geqq \mathfrak{K}_\mu,$$

folglich $\mathfrak{K}_\mu$ nicht das erste, B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) sein würde, wie doch angenommen wurde. Wenn man also eine Grösse finden will, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers der Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, so verfahre man auf folgende Art:

In der Reihe (I) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorhergehenden Glieder der Reihe (I) sein.

Wenn auch im Vorhergehenden angenommen worden ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sein sollen, so kann man diese von Lionnet in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, redigé par Terquem et Gerono. Décembre 1845. p. 622. gegebene Regel doch offenbar auch anwenden, wenn die in Rede stehende Voraussetzung nicht erfüllt ist; nur wird man dann nicht die niedrigste Gränze finden, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann; eine niedrigere Gränze wird sich immer ergeben, wenn man die Regel auf die Quotienten anwendet, welche man erhält, wenn man A_1 und B_1 durch einen ihrer gemeinschaftlichen Theiler dividirt, und die niedrigste Gränze bekommt man durch die Anwendung der Regel auf die Quotienten, welche man erhält, wenn A_1 und B_1 durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden, was wir durch das folgende Beispiel erläutern wollen.

Die Reihe (I) ist

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,$$
$$610, 987, 1597, 2584, 4181, \ldots.$$

Digitized by Google

Ist nun $A_1 = 2904$, $B_1 = 1122$, so ist das erste B_1 übersteigende Glied dieser Reihe 1597, und die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, ist folglich 15. Dividiren wir aber 2904 und 1122 durch 11, so können wir $A_1 = 264$, $B_1 = 102$ setzen, und das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) ist folglich 144, die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 1904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, also 10. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von 2904 und 1122 ist 66, so dass wir also $A_1 = 44$, $B_1 = 17$ setzen können, wo dann das erste B_1 übersteigende Glied der Reihe (I) 21, also die Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 2904 und 1122 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, 6 ist. Die Richtigkeit hiervon zeigt die folgende Rechnung:

```
1122 | 2904 | 2
       2244
       ----
        660 | 1122 | 1
              660
              ---
              462 | 660 | 1
                    462
                    ---
                    198 | 462 | 2
                          396
                          ---
                           66 | 198 | 3
                                198
                                ---
                                 0
```

§. 3.

Eine andere Regel hat der scharfsinnige Lamé in den Comptes rendus de l'Académie des sciences. 28. Octobre 1844. gegeben, zu welcher man auf folgende Weise gelangen kann.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$B_n = 1,$$

$$B_{n-1} \overset{=}{>} 2,$$

$$B_{n-2} \overset{=}{>} 3,$$

$$B_{n-3} \overset{=}{>} 5,$$

$$B_{n-4} \overset{=}{>} 8$$

und

Digitized by Google

$$B_{n-5} \gtreqless 13, \quad B_{n-6} \gtreqless 21;$$

also

$$\begin{aligned} B_{n-5} &> 1 \,.\, 10, \\ B_{n-6} &> 2 \,.\, 10, \\ B_{n-7} &> 3 \,.\, 10, \\ B_{n-8} &> 5 \,.\, 10, \\ B_{n-9} &> 8 \,.\, 10 \end{aligned}$$

und

$$B_{n-10} > 13 \,.\, 10, \quad B_{n-11} > 21 \,.\, 10;$$

also

$$\begin{aligned} B_{n-10} &> 1 \,.\, 10^2, \\ B_{n-11} &> 2 \,.\, 10^2, \\ B_{n-12} &> 3 \,.\, 10^2, \\ B_{n-13} &> 5 \,.\, 10^2, \\ B_{n-14} &> 8 \,.\, 10^2 \end{aligned}$$

und

$$B_{n-15} > 13 \,.\, 10^2, \quad B_{n-16} > 21 \,.\, 10^2$$

also

$$\begin{aligned} B_{n-15} &> 1 \,.\, 10^3, \\ B_{n-16} &> 2 \,.\, 10^3, \\ B_{n-17} &> 3 \,.\, 10^3, \\ B_{n-18} &> 5 \,.\, 10^3, \\ B_{n-19} &> 8 \,.\, 10^3 \end{aligned}$$

und

$$B_{n-20} > 13 \,.\, 10^3, \quad B_{n-21} > 21 \,.\, 10^3;$$

also

$$\begin{aligned} B_{n-20} &> 1 \,.\, 10^4, \\ B_{n-21} &> 2 \,.\, 10^4, \\ B_{n-22} &> 3 \,.\, 10^4, \\ B_{n-23} &> 5 \,.\, 10^4, \\ B_{n-24} &> 8 \,.\, 10^4 \end{aligned}$$

und

$$B_{n-25} > 13 \cdot 10^4, \quad B_{n-26} > 21 \cdot 10^4.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 5k$ ist, immer

$$B_{n-5k} \gtrless 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, $n > 5N$ wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$B_{n-5N} \gtrless 10^N;$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-5N} wäre also mindestens $N+1$. Folglich wäre, da

$$B_1 \gtrless B_{n-5N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$, und demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann nicht $n > 5N$ sein, und es ist folglich immer $n \lesseqgtr 5N$, welches uns zu dem folgenden zuerst von Lamé gefundenen Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erforderlichen Divisionen kann nie die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Auch für diese Regel gilt die schon oben gemachte Bemerkung, dass es bei deren Anwendung nicht unbedingt nöthig ist, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind. Natürlich wird man aber die niedrigste Gränze erhalten, wenn dies der Fall ist. Für die Zahlen 2904 und 1122 liefert uns die Regel von Lamé die Zahl 20 als Gränze, welche höher ist als die Gränze 15, welche uns oben die Regel von Lionnet lieferte. Für die Zahlen 264 und 102 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 15; aus der Regel von Lionnet ergab sich 10 als Gränze. Für die Zahlen 44 und 17 liefert uns die Regel von Lamé die Gränze 10; aus der Regel von Lionnet ergab sich 6 als Gränze. Hieraus erhellet, dass die Regel von Lionnet der Regel von Lamé vorzuziehen ist, wenn auch der von letzterem gefundene Satz allerdings an sich ein besonderes Interesse darbietet.

§. 4.

Es seien jetzt wieder B_{k-1}, B_k, B_{k+1} drei einander benachbarte Glieder der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots B_{n-1}, B_n.$$

Digitized by Google

Wenn $B_k \lessgtr \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist, weil bekanntlich immer $B_{k+1} < B_k$ ist, $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$. Wäre aber zugleich $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ und $B_{k+1} \gtrless \frac{1}{2} B_{k-1}$, so wäre offenbar

$$B_k Q_k + B_{k+1} > B_{k-1},$$

was ungereimt ist, weil bekanntlich

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1}$$

ist. Wenn also $B_k > \frac{1}{2} B_{k-1}$ ist, so ist $B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}$, und es ist folglich immer

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_{k-1}.$$

Hiernach ist also

$$B_3 < \frac{1}{2} B,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_5 < \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_6 < \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_7 < \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

Ist nun $B_2 \lessgtr \frac{1}{2} B_1$, so ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_9 < \frac{1}{2^4} B_1,$$

u. s. w.

Ist aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$, so ist, weil bekanntlich doch immer $B_2 < B_1$ ist:

$$B_3 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_4 < \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_5 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_6 < \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_7 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_8 < \frac{1}{2^3} B_1,$$

u. s. w.

Wenn also $B_2 \lessgtr \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

und folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \gtrless 2^{\frac{n}{2}} \text{ oder } 2^\mu \gtrless 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also

$$\frac{n}{2} \lessgtr \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \lessgtr \mu,$$

Digitized by Google

und folglich

$$n \leqq 2\mu \text{ oder } n \leqq 2\mu + 1.$$

Wenn aber $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1 \text{ oder } B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} B_1,$$

und folglich, weil bekanntlich $B_n = 1$ ist:

$$B_1 > 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } B_1 > 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ist nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$2^\mu \geqq 2^{\frac{n-2}{2}} \text{ oder } 2^\mu \geqq 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also

$$\frac{n-2}{2} \leqq \mu \text{ oder } \frac{n-1}{2} \leqq \mu,$$

und folglich

$$n \leqq 2\mu + 2 \text{ oder } n \leqq 2\mu + 1.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2 ist, so kann, jenachdem $B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1$ oder $B_2 > \frac{1}{2} B_1$ ist, die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, respective nicht grösser als $2\mu+1$ und nicht grösser als $2\mu+2$ sein.

Lionnet giebt a. a. O. p. 620. als Gränze, welche die Anzahl der Divisionen nicht übersteigen kann, allgemein $2\mu + 1$ an. Ich glaube aber, dass nur der Ausdruck des Satzes, wie ich denselben so eben gegeben habe, richtig ist. Wenigstens sehe ich jetzt nicht, wie man durch ganz sichere Schlüsse zu der von Lionnet angegebenen, nach seiner Meinung allgemein gültigen Gränze gelangen kann, glaube aber, wie ich schon im Eingange bemerkt habe, dass dieser Gegenstand überhaupt noch nicht als vollständig erledigt betrachtet werden darf, und halte weitere Untersuchungen über denselben jedenfalls für sehr dankenswerth.

§. 5.

Man kann bei der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen sich auch der folgenden, von der gewöhnlichen etwas verschiedenen Methode bedienen.

In allen den Fällen nämlich, wo bei Anwendung der gewöhnlichen Methode der bleibende Rest grösser als die Hälfte des entsprechenden Divisors ist, vermehre man den Quotienten um Eins, ziehe von dem Producte des Divisors und Quotienten den Dividendus ab, und verfahre sonst übrigens ganz wie bei der gewöhnlichen Methode, d. h. man führe die Rechnung in der angegebenen Weise so lange fort, bis man auf einen verschwindenden Rest kommt, wo dann immer der entsprechende Divisor der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen ist.

Bezeichnen wir, um die so eben angedeutete Methode etwas näher zu betrachten, die beiden gegebenen Zahlen wieder durch A_1 und B_1, die gebrauchten Divisoren durch

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ \ldots.$$

und die entsprechenden Quotienten durch

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5,\ \ldots.;$$

also die entsprechenden Reste durch

$$B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ \ldots.;$$

so haben wir, wenn

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ \ldots.$$

gewisse positive gerade oder ungerade ganze Zahlen bezeichnen, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1\,Q_1 + (-1)^{i_1}.B_2,\\
B_1 &= B_2\,Q_2 + (-1)^{i_2}.B_3,\\
B_2 &= B_3\,Q_3 + (-1)^{i_3}.B_4,\\
B_3 &= B_4\,Q_4 + (-1)^{i_4}.B_5,
\end{aligned}$$

u. s. w.

von denen wir eine beliebige überhaupt durch

$$B_{k-1} = B_k\,Q_k + (-1)^{i_k}.B_{k+1}$$

bezeichnen wollen.

Digitized by Google

Wenn i_k eine gerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen

$$B_{k+1} \leqq \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn dagegen i_k eine ungerade Zahl ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$B_{k-1} - B_k (Q_k - 1) > \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k-1} - B_k Q_k + B_k > \frac{1}{2} B_k,$$

folglich

$$B_k Q_k - B_{k-1} < B_k - \frac{1}{2} B_k,$$

d. i.

$$B_{k+1} < \frac{1}{2} B_k.$$

Wenn man also das oben angegebene Verfahren anwendet, so übersteigt kein Rest die Hälfte des entsprechenden Divisors.

Zugleich erhellet hieraus von selbst, dass

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \ldots.$$

eine Reihe fortwährend abnehmender ganzer Zahlen ist, welche also jederzeit endlich einmal abbrechen, d. h. auf ein verschwindendes Glied führen muss.

Ist nun B_{n+1} der verschwindende Rest, auf welchen man nach dem Vorhergehenden immer endlich einmal kommen muss, so haben wir die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 Q_1 + (-1)^{i_1} . B_2, \\
B_1 &= B_2 Q_2 + (-1)^{i_2} . B_3, \\
B_2 &= B_3 Q_3 + (-1)^{i_3} . B_4, \\
&\text{u. s. w.} \\
B_{n-2} &= B_{n-1} Q_{n-1} + (-1)^{i_{n-1}} . B_n, \\
B_{n-1} &= B_n Q_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhellet leicht, dass B_n ein gemeinschaftlicher Theiler von A_1 und B_1 ist. Eben so leicht erhellet aber aus denselben auch, dass jeder gemeinschaftliche Theiler von

Digitized by Google

A_1 und B_1 auch ein Theiler von B_n sein muss, woraus sich nach der bekannten Schlussweise ergiebt, dass B_n der grösste gemeinschaftliche Theiler von A_1 und B_1 ist, wie behauptet wurde.

Im Folgenden wollen wir nun wieder annehmen, dass A_1 und B_1 relative Primzahlen sind, also $B_n = 1$ ist, wozu wir aus ganz ähnlichen Gründen wie in §. 1. berechtigt sind.

§. 6.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichung:

$$B_{k-1} = B_k Q_k + (-1)^{i_k} . B_{k+1},$$

wo

$$B_k \lessgtr \frac{1}{2} B_{k-1}, \quad B_{k+1} \lessgtr \frac{1}{2} B_k;$$

also

$$B_{k-1} \gtrless 2 B_k, \quad B_k \gtrless 2 B_{k+1}$$

ist. Folglich ist

$$\frac{B_{k-1}}{B_k} \lessgtr 2.$$

Ist nun i_k eine gerade Zahl, so ist, wie aus dem Vorhergehenden und der Natur der Methode auf der Stelle erhellet, jederzeit $Q_k \gtrless 2$, also, wegen der Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k + B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \gtrless 2 B_k + B_{k+1}.$$

Ist dagegen i_k eine ungerade Zahl, so erhellet eben so leicht, dass immer $Q_k - 1 \gtrless 2$, also $Q_k \gtrless 3$, und folglich, wegen der Gleichung

$$B_{k-1} = B_k Q_k - B_{k+1},$$

offenbar

$$B_{k-1} \gtrless 3 B_k - B_{k+1}$$

Digitized by Google

oder

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_k - B_{k+1}$$

ist. Nun ist aber nach dem Obigen $B_k \gtreqless 2B_{k+1}$, also

$$B_k - B_{k+1} \gtreqless B_{k+1},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_{k+1}.$$

Daher ist in allen Fällen

$$B_{k-1} \gtreqless 2B_k + B_{k+1}.$$

Bekanntlich ist nun $B_n = 1$ und $B_{n-1} \gtreqless 2B_n$. Also ist hiernach und wegen der vorhergehenden Gleichung offenbar kein Glied der Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots.$$

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ \ldots.$$

welche so gebildet ist, dass vom dritten Gliede an jedes Glied erhalten wird, wenn man zu dem doppelten vorhergehenden Gliede das vorhergehende Glied addirt. Bezeichnen wir folglich die Glieder dieser Reihe durch

$$\mathfrak{K}'_1,\ \mathfrak{K}'_2,\ \mathfrak{K}'_3,\ \mathfrak{K}'_4,\ \mathfrak{K}'_5,\ \mathfrak{K}'_6,\ \mathfrak{K}'_7,\ \ldots.$$

und setzen also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}'_1 &= 1,\\
\mathfrak{K}'_2 &= 2,\\
\mathfrak{K}'_3 &= \mathfrak{K}'_1 + 2\mathfrak{K}'_2,\\
\mathfrak{K}'_4 &= \mathfrak{K}'_2 + 2\mathfrak{K}'_3,\\
\mathfrak{K}'_5 &= \mathfrak{K}'_3 + 2\mathfrak{K}'_4,\\
\mathfrak{K}'_6 &= \mathfrak{K}'_4 + 2\mathfrak{K}'_5,\\
\mathfrak{K}'_7 &= \mathfrak{K}'_5 + 2\mathfrak{K}'_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ist kein Glied der Reihe

$$B_n,\ B_{n-1},\ B_{n-2},\ B_{n-3},\ B_{n-4},\ B_{n-5},\ \ldots.$$

Digitized by Google

kleiner als das gleichstellige Glied der Reihe

$$\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}'_3, \mathfrak{A}'_4, \mathfrak{A}'_5, \mathfrak{A}'_6, \mathfrak{A}'_7, \ldots.$$

welche wir im Folgenden die Reihe (II) nennen wollen. Hieraus ergiebt sich auf ganz ähnliche Art wie in §. 2. zur Bestimmung einer Gränze, welche die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht übersteigen kann, die in dem folgenden Satze enthaltene Regel:

In der Reihe (II) suche man das erste Glied auf, welches grösser als B_1 ist; dann kann die Anzahl der durch die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 nöthig gemachten Divisionen nicht grösser als die Anzahl der diesem Gliede vorangehenden Glieder der Reihe (II) sein.

Dass bei dieser Regel die Anwendung der in §. 5. näher charakterisirten zweiten Methode zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers vorausgesetzt wird, braucht hier wohl nicht wiederholt in Erinnerung gebracht zu werden.

Für die Zahlen $A_1 = 2904$ und $B_1 = 1122$ liefert die vorhergehende Regel die Gränze 9. Für $A_1 = 264$ und $B_1 = 102$ erhält man die Gränze 6. Für $A_1 = 44$ und $B_1 = 17$ ergiebt sich die Gränze 4, wobei man §. 2. zu vergleichen hat. Die Richtigkeit der letzteren Gränze ergiebt sich aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{r|l|l}
1122 & 2904 & 3 \\
 & \underline{3366} & \\
 & 462 & 1122 \quad 2 \\
 & & \underline{924} \\
 & & 198 \quad 462 \quad 2 \\
 & & \underline{396} \\
 & & 66 \quad 198 \quad 3 \\
 & & \underline{198} \\
 & & 0
\end{array}$$

Die obige Regel hat Lionnet a. a. O. gegeben.

§. 7.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$B_n = 1,$$

$$B_{n-1} \gtreqless 2,$$

$$B_{n-2} \gtreqless 5$$

und

Digitized by Google

$$B_{n-3} \gtrless 12, \quad B_{n-4} \gtrless 29;$$

also

$$B_{n-3} > 1 . 10,$$
$$B_{n-4} > 2 . 10,$$
$$B_{n-5} > 5 . 10$$

und

$$B_{n-6} > 12 . 10, \quad B_{n-7} > 29 . 10;$$

also

$$B_{n-6} > 1 . 10^2,$$
$$B_{n-7} > 2 . 10^2,$$
$$B_{n-8} > 5 . 10^2$$

und

$$B_{n-9} > 12 . 10^2, \quad B_{n-10} > 29 . 10^2;$$

also

$$B_{n-9} > 1 . 10^3,$$
$$B_{n-10} > 2 . 10^3,$$
$$B_{n-11} > 5 . 10^3$$

und

$$B_{n-12} > 12 . 10^3, \quad B_{n-13} > 29 . 10^3;$$

also

$$B_{n-12} > 1 . 10^4,$$
$$B_{n-13} > 2 . 10^4,$$
$$B_{n-14} > 5 . 10^4$$

und

$$B_{n-15} > 12 . 10^4, \quad B_{n-16} > 29 . 10^4.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Es ist also unter der Voraussetzung, dass $n > 3k$ ist, immer

$$B_{n-3k} \gtrless 10^k.$$

Wenn nun, indem N die Anzahl der Ziffern von B_1 bezeichnet, $n > 3N$ wäre, so wäre nach dem Vorhergehenden

Digitized by Google

$$B_{n-3N} \gtreqless 10^N,$$

und die Anzahl der Ziffern von B_{n-3N} wäre also mindestens $N+1$. Folglich wäre, da

$$B_1 \gtreqless B_{n-3N}$$

ist, auch die Anzahl der Ziffern von B_1 mindestens $N+1$, und demnach nicht bloss N, wie doch vorausgesetzt wurde. Daher kann nicht $n > 3N$ sein, und es ist folglich immer $n \lesseqgtr 3N$, welches uns zu dem folgenden ebenfalls von Lionnet gefundenen Satze führt:

Die Anzahl der zu der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erforderlichen Divisionen kann nie die dreifache Anzahl der Ziffern der Zahl B_1 übersteigen.

Früher als Lionnet hat Binet in dem Journal von Liouville (T. VI.) die höhere und also weniger genäherte Gränze $1 + \frac{10}{3} N$ angegeben.

§. 8.

Weil bekanntlich allgemein

$$B_{k+1} \lesseqgtr \frac{1}{2} B_k$$

ist, so ist

$$B_2 \lesseqgtr \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \lesseqgtr \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \lesseqgtr \frac{1}{2} B_3,$$

$$B_5 \lesseqgtr \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \lesseqgtr \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

und folglich

Digitized by Google

$$B_2 \leqq \frac{1}{2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2^5} B_1,$$

u. s. w

Also ist

$$B_n \leqq \frac{1}{2^{n-1}} B_1,$$

woraus sich, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \geqq 2^{n-1}$$

ergiebt. Ist nun 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist

$$2^\mu \geqq 2^{n-1},$$

und folglich $n-1 \leqq \mu$, also $n \leqq \mu+1$, was unmittelbar zu dem folgenden zuerst von Binet gefundenen Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2 ist, so kann die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, niemals grösser als $\mu+1$ sein.

Diesem Satze kann man noch Folgendes beifügen.

Wenn

$$B_3 \leqq \frac{1}{4} B_1$$

ist, so ist, weil

$$B_3 \leqq \frac{1}{2} B_2,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2} B_3,$$

Digitized by Google

$$B_5 \leqq \frac{1}{2} B_4,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2} B_5,$$

u. s. w.

ist:

$$B_2 \leqq \frac{1}{2^2} B_1,$$

$$B_3 \leqq \frac{1}{2^3} B_1,$$

$$B_4 \leqq \frac{1}{2^4} B_1,$$

$$B_5 \leqq \frac{1}{2^5} B_1,$$

$$B_6 \leqq \frac{1}{2^6} B_1,$$

u. s. w.

und folglich

$$B_n \leqq \frac{1}{2^n} B_1,$$

also, weil $B_n = 1$ ist,

$$B_1 \geqq 2^n.$$

Ist nun wieder 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2, so ist

$$2^\mu \geqq 2^n,$$

also $n \leqq \mu$, was zu dem folgenden Satze führt:

Wenn 2^μ die grösste in B_1 enthaltene Potenz von 2 und $B_2 \leqq \frac{1}{4} B_1$ ist, so kann die Anzahl der Divisionen, welche die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von A_1 und B_1 erfordert, niemals grösser als μ sein.

Diese Bemerkung habe ich hier um so weniger unterdrücken wollen, weil sie der in §. 4. über den analogen von Lionnet gefundenen Satz gemachten Bemerkung entspricht, und eine Bestätigung mehr abgiebt, dass der erwähnte Satz in der ihm von Lionnet gegebenen Fassung unrichtig ist, und die ihm oben durch mich zu Theil gewordene Berichtigung wirklich erfordert.

Digitized by Google

Zum Schluss mag hier nun noch bemerkt werden, dass, wie aus dem Obigen sich unzweideutig ergiebt, bei der zweiten neuerlich wohl vorzüglich von Binet hervorgehobenen Methode zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen die Gränze für die Anzahl der erforderlichen Divisionen im Allgemeinen niedriger ist als bei der älteren in allen Lehrbüchern sich findenden Methode des Euklides, weshalb uns allerdings die neuere Methode recht sehr zu verdienen scheint, allgemeineren Eingang in die Lehrbücher und den arithmetischen Unterricht zu finden.

XIII.

Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Wenn sich ein materieller Punkt von einer ihrer Lage nach bekannten Stelle einer Curve aus ohne Anfangsgeschwindigkeit, einzig und allein vermöge seiner Schwere, auf der Curve selbst abwärts bewegt und in Folge dieser Bewegung nach der Zeit t an eine andere Stelle der krummen Linie gekommen ist, so wird die genannte Zeit immer von der Höhendifferenz des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung abhängen, also eine Funktion derselben sein. Man könnte nun die Frage aufstellen, wie die Gleichung der in Rede stehenden Curve beschaffen sein müsse, wenn die Zeit t eine gegebene Funktion jener Höhendifferenz darstellen, oder einer solchen proportional sein soll. Wir wollen diese Frage, welche z. B. die nach der Tautochrone als speziellen Fall in sich fasst, durch die nachstehenden Betrachtungen zu beantworten versuchen.

Sei APC (Taf. III. Fig. 1.) irgend eine krumme Linie, BC eine durch einen beliebigen Punkt in ihr gezogene Vertikallinie und die Höhendifferenz der Punkte A und C, nämlich die Strecke BC von

C bis zum Fusspunkte des von A auf die Vertikale gefällten Perpendikels $= h$. Nach einem bekannten Satze der Dynamik kommt ein materieller Punkt, welcher sich von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit vermöge der Schwere von A nach P bewegt, an dieser Stelle mit eben derselben Geschwindigkeit an, die er bei freiem Falle durch die Strecke BQ, welche die Projektion von AP auf BC ist, am Ende des Falles in Q erlangen würde. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit v, die Beschleunigung der Schwere (30,1835 Fuss) mit g und BQ mit p, so ist hiernach

$$v = \sqrt{2gp}.$$

Nennen wir ferner σ den Bogen AP und τ die Zeit, in welcher der materielle Punkt ihn durchlief, so haben wir andererseits nach den Prinzipien der Dynamik

$$v = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau},$$

und folglich durch Vergleichung dieses Werthes von τ mit dem vorhergehenden:

$$\sqrt{2gp}.\partial\tau = \partial\sigma$$

und

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = \frac{\partial\sigma}{\sqrt{p}}.$$

Nehmen wir aber den Punkt C zum Anfangspunkte der Coordinaten und setzen

$$\text{Arc } CP = s,\ CQ = x,\ BC = h,$$

so wird

$$\sigma = \text{Arc } APC - s,\ p = h - x,$$

und durch Einführung dieser Werthe geht die vorige Differenzialgleichung in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.\partial\tau = -\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

und mithin wird jetzt

$$\sqrt{2g}.\tau = -\int \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}} + \text{Const.}$$

Wollen wir hieraus die Zeit t finden, innerhalb welcher der ganze Bogen APC durchlaufen wird, so müssen wir die Constante so bestimmen, dass die ganze rechte Seite für $x = h$ verschwindet (weil dann der materielle Punkt noch in A befindlich und folglich keine Zeit verwendet worden ist) und darauf $x = 0$ setzen, oder,

Digitized by Google

was auf das Nämliche hinauskommt, wir müssen das Integral zu einem bestimmten machen, welches mit $x=h$ anfängt und mit $x=0$ aufhört. Demnach ist

$$\sqrt{2g}.t = -\int_h^0 \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}},$$

oder, da man in einem bestimmten Integrale die Gränzen vertauschen darf, wenn man ihm das entgegengesetzte Zeichen giebt,

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\partial s}{\sqrt{h-x}}. \qquad (1)$$

Kennt man die Gleichung zwischen den Coordinaten $CQ=x$, $PQ=y$ der Curve, so dient die Formel (1) zur Bestimmung von t, indem man ∂s nach der Relation

$$\partial s = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

berechnet; umgekehrt aber dient sie auch zur Bestimmung der Gleichung der Curve, wenn über das Wachsthum der Zeit t eine besondere Voraussetzung gemacht wird.

In so fern s eine Funktion von x ist, dürfen wir

$$\partial s = \varphi(x)\,\partial x \qquad (2)$$

setzen, so dass

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^h \frac{\varphi(x)\,\partial x}{\sqrt{h-x}} \qquad (3)$$

ist. Führen wir eine neue Veränderliche z dadurch ein, dass wir $x=hz$ nehmen, so wird $\partial x = h\,\partial z$, und wenn x die Werthe $x=0$ und $x=h$ angenommen hat, so ist $z\left(=\frac{x}{h}\right)$ entsprechend $=0$ und $=1$ geworden. Demnach haben wir

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\varphi(hz)\,h\,\partial z}{\sqrt{h-hz}},$$

oder

$$\sqrt{2g}.t = \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}} \sqrt{h}\,\varphi(hz). \qquad (4)$$

Soll nun die Zeit t einer gegebenen Funktion $f(h)$ von h proportional sein, so kann diese Bedingung offenbar nur dadurch erfüllt werden, dass

$$\sqrt{h}\,\varphi(hz) = f(h)\,\psi(z) \qquad (5)$$

Digitized by Google

ist, wo $\psi(z)$ eine blosse Funktion von z bedeutet. In der That geht dann die Gleichung (4) in die folgende über:

$$\sqrt{2g}.t = f(h)\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\,\psi(z); \qquad (6)$$

und da hier das Integral kein h enthält und durch Einführung der Gränzen $z=0$, $z=1$ auch die z herausfallen, so ist der Werth desselben eine blosse Zahl und folglich dann t der Funktion $f(h)$ proportional. Um nun aus der Gleichung (5) die beiden unbekannten Funktionen φ und ψ mit Hülfe der gegebenen f zu bestimmen, verfahren wir folgendermaassen.

Es folgt zunächst aus Nro. (5)

$$\varphi(hz) = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z). \qquad (7)$$

Nun ist aber, wenn $\varphi(hz)$ partiell nach z differenzirt wird:

$$\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = h\varphi'(hz),$$

und ebenso durch partielle Differenziation nach h:

$$\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h} = z\varphi'(hz).$$

Multipliziren wir die erste Gleichung mit z, die zweite mit h, so werden die rechten Seiten einander gleich, und mithin ist

$$z\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = h\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h}.$$

Diese Eigenschaft von $\varphi(hz)$ muss aber vermöge der Gleichung (7) auch dem Quotienten $\frac{f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z)$ zukommen, für welchen

$$z\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial z} = \frac{f(h)}{\sqrt{h}}z\psi'(z),$$

$$h\frac{\partial\varphi(hz)}{\partial h} = h\,\frac{h^{\frac{1}{2}}f'(h) - \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}f(h)}{h}\psi(z) = \frac{hf'(h)-\frac{1}{2}f(h)}{\sqrt{h}}\psi(z)$$

ist. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich jetzt

$$f(h)z\psi'(z) = [hf'(h) - \tfrac{1}{2}f(h)]\psi(z),$$

oder nach beiderseitiger Division mit $f(h)z\psi(z)$:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = [h\frac{f'(h)}{f(h)} - \tfrac{1}{2}]\frac{1}{z}, \qquad (8)$$

Digitized by Google

wobei wir zur Abkürzung

$$h\frac{f'(h)}{f(h)}-\tfrac{1}{2}=\lambda-1,$$

also

$$\lambda=h\frac{f'(h)}{f(h)}+\tfrac{1}{2} \qquad (9)$$

setzen wollen. Bemerken wir ferner, dass in Nro. (8)

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}=\frac{\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}}{\psi(z)}=\frac{\frac{\partial\psi(z)}{\psi(z)}}{\partial z}=\frac{\partial l\psi(z)}{\partial z}$$

ist, so erhalten wir nach beiderseitiger Multiplikation mit ∂z:

$$\partial l\psi(z)=(\lambda-1)\frac{\partial z}{z},$$

folglich durch Integration

$$l\psi(z)=(\lambda-1)^{1}\,l(z^2)+\text{Const.},$$

oder wenn man bemerkt, dass $z=\frac{x}{h}$ nur positive Werthe erhält, mithin $\frac{1}{2}l(z^2)=lz$ ist, und $\text{Const.}=la$, wo a ebenfalls eine beliebige Constante bedeutet, setzt:

$$l\psi(z)=(\lambda-1)lz+la=l(z^{\lambda-1})+la,$$

und mithin

$$\psi(z)=az^{\lambda-1}. \qquad (10)$$

Wir haben aber bereits gesehen, dass $\psi(z)$ eine von h freie Funktion sein muss; da nun in unserem Werthe derselben die Grösse λ vorkommt, welche laut Gleichung (8) von h abhängt, so kann die Aufgabe überhaupt nur dann möglich sein, wenn sich λ von h befreien lässt. Soll aber λ von h unabhängig sein, so ist nach Nro. (8) nur nöthig, dass der Quotient

$$\frac{f'(h)}{f(h)}=\frac{\mu}{h}$$

sei, wenn μ eine constante Grösse bedeutet. Da hier $\frac{f'(h)}{f(h)}=\frac{\partial lf(h)}{\partial h}$ ist, so folgt auf ähnliche Weise wie vorher

$$f(h)=ch^{\mu}, \qquad (11)$$

Digitized by Google

wo c eine durch die Integration hereingebrachte Constante ist. Wir sehen hieraus, dass, wenn die Zeit t einer Funktion von h proportional sein soll, diese Funktion selbst nur eine Potenz von h sein kann. Wir haben nun nach (8) und (11)

$$\lambda = \mu + \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$\psi(z) = a\, z^{\mu-\frac{1}{2}},$$

und nach Nro. (7) vermöge der Werthe von $f(h)$ und $\psi(z)$

$$\varphi(hz) = ac\,(hz)^{\mu-\frac{1}{2}},$$

mithin

$$\varphi(x) = ac\, x^{\mu-\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Die Gleichung der so charakterisirten Curve ergiebt sich jetzt auf folgende Weise. Es ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

mithin

$$y = \int \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1} + \text{Const.},$$

wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $x=0$ auch $y=0$ wird, weil der Punkt C, für welchen $x=0$ ist, auf der Curve selbst liegt. Also ist jetzt

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - 1},$$

oder, weil nach Nro. (2) und Nro. (12)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi(x) = ac\, x^{\mu-\frac{1}{2}}$$

ist,

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{a^2 c^2 x^{2\mu-1} - 1}. \qquad (13)$$

Die Zeit t findet sich nach Formel (6), wenn wir für $f(h)$ und $\psi(z)$ ihre Werthe setzen:

$$\sqrt{2g}.t = ach^\mu \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1-z}}\, z^{\mu-\frac{1}{2}}$$

$$= ach^\mu \int_0^1 z^{\mu+\frac{1}{2}-1} (1-z)^{\frac{1}{2}-1}\, \partial z,$$

Digitized by Google

wobei der Werth des Integrals nach der bekannten Gammafunktionenformel

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}\,(1-z)^{\beta-1}\,\partial z = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

gefunden werden kann, wenn man $\alpha = \mu + \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ nimmt und bemerkt, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist. Man hat daher

$$t = ach^{\mu}\,\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+1)}\sqrt{\frac{\pi}{2g}}, \qquad (14)$$

und in den Gleichungen (13) und (14) ist jetzt die vollständige Lösung des aufgestellten Problems enthalten, da man mittelst der ersteren Formel diejenige Curve bestimmen kann, für welche die Fallzeit t einer gegebenen Potenz der Höhe h proportional ist. Aber auch für den Exponenten dieser Potenz treten noch Beschränkungen ein. Soll nämlich die Gleichung (13) eine reelle Curve, also eine mögliche Lösung der gestellten Aufgabe bedeuten, so darf das Integral auf der rechten Seite weder unendlich gross noch imaginär werden; ob der erstere Fall eintritt, lässt sich erst dann entscheiden, wenn man die unbestimmte Integration bereits ausgeführt hat, dagegen übersieht man auf der Stelle, dass das Integral imaginär ausfallen muss, wenn die Differentialformel selbst entweder ganz, oder während eines bestimmten Intervalles imaginär ist. Diess geschieht aber immer, wenn $2\mu - 1 > 0$ ist, weil dann der Ausdruck

$$\sqrt{a^2 c^2 x^{2\mu-1} - 1}$$

für alle der Null sehr nahen Werthe von x imaginär wird. Es muss also $2\mu - 1 \leqq 0$, folglich $\mu \leqq \frac{1}{2}$ sein, wenn die Aufgabe selbst unter die möglichen gehören soll.

Nimmt man in (14) $\mu = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus (13)

$$y = \sqrt{a^2 c^2 - 1}\,.\,x,$$

also die Curve eine Gerade, wie man ohnehin weiss. Setzt man $\mu = 0$ und die beliebige Constante $c = 1$, so ist t von h unabhängig, und man erhält folglich diejenige Curve, auf welcher alle Bögen, die sich mit dem Punkte C endigen, in gleichen Zeiten durchlaufen werden, also die Tautochrone. Es ist dann nach (13)

$$y = \int_0^x \partial x \sqrt{\frac{a^2}{x} - 1}.$$

Durch unbestimmte Integration findet man leicht

$$y = \sqrt{a^2 x - x^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{2x - a^2}{a^2} + \text{Const.},$$

Digitized by Google

und folglich für $x=0$

$$\text{Const.} = \frac{a^2}{2}\operatorname{Arc\,cos}(-1) = \tfrac{1}{2}a^2\pi,$$

woraus sich ergiebt

$$y = \tfrac{1}{2}a^2\pi + \sqrt{a^2x-x^2} - \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{Arc\,cos}\frac{2x-a^2}{a^2},$$

oder wenn $a=\sqrt{2r}$ gesetzt wird:

$$y = r\pi + \sqrt{2rx-x^2} - r\operatorname{Arc\,cos}\frac{x-r}{r},$$

d. i. die Gleichung der Cykloide, wenn der Punkt C der Scheitel derselben, BC das Perpendikel auf ihre Basis und r der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

Will man das Unendlichwerden der Zeit t vermeiden, so muss man μ so wählen, dass keine der Gammafunktionen $\Gamma(\mu+\frac{1}{2})$ und $\Gamma(\mu+1)$ ein negatives Argument erhält, welche Bedingung durch $\mu+\frac{1}{2}>0$ oder $\mu>-\frac{1}{2}$ befriedigt wird. Nehmen wir hierzu die frühere Bedingung $\mu<\frac{1}{2}$, unter welcher allein eine krumme Linie möglich ist, so erhalten wir den folgenden Satz:

Sollen sich die Zeiten, innerhalb deren ein materieller Punkt verschiedene Bögen einer Curve ohne Anfangsgeschwindigkeit bloss vermöge der Schwere durchläuft, einer gegebenen Funktion der Höhendifferenzen der Anfangs- und Endpunkte jener Bögen proportional ändern, so darf diese Funktion nur eine Potenz jener Höhendifferenzen sein, die zum Exponenten eine zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ fallende Zahl hat."

Für ein Beispiel hierzu sei $\mu=\frac{1}{4}$, und $ac=\sqrt{2b}$, wo b wieder eine beliebige Constante ist. Es wird dann

$$t = \sqrt{2b}\,.\sqrt[4]{h}\,.\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{2g}},$$

oder

$$t = \sqrt{b}\sqrt[4]{h}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\sqrt{\frac{\pi}{g}},$$

und

$$y = \int_0^x \partial x\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}}-1}.$$

Durch die Substitution

$$x = (b+u)^2$$

Digitized by Google

erhält man hier

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{2b}{b+u} - 1} = 2\int (b+u)\,\partial u \sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$$

$$= 2\int \partial u \sqrt{b^2-u^2},$$

wobei der Werth des letzteren Integrals bekanntlich

$$= u\sqrt{b^2-u^2} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{u}{b}$$

ist. Da nun aus $x=(b+u)^2$ folgt $u=\sqrt{x}-b$, so ist jetzt

$$\int \partial x \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{x}} - 1}$$

$$= (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b} + \text{Const.}$$

Für $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$\text{Const.} = -b^2 \operatorname{Arcsin}(-1) = +b^2\frac{\pi}{2},$$

und folglich ist jetzt nach Nro. (13)

$$y = \frac{\pi}{2}b^2 + (\sqrt{x}-b)\sqrt{(2b\sqrt{x}-x)} + b^2 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{x}-b}{b}$$

die Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Fallzeit der vierten Wurzel von h proportional ist.

Digitized by Google

XIV.

Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes.

Nach der Abhandlung: Note sur la formule de Taylor par M. J. Caqué in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. Octobre 1845. p. 379. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

I.

Es sei $y=f(x)$ eine beliebige Function von x. Setzen wir nun überhaupt, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$y_k = f(x+k\Delta x),$$

so haben wir in der gewöhnlichen Bezeichnung der Differenzenrechnung die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \Delta y, \\ y_2 - y_1 &= \Delta y_1, \\ y_3 - y_2 &= \Delta y_2, \\ &\text{u. s. w.} \\ y_k - y_{k-1} &= \Delta y_{k-1}; \end{aligned}$$

durch deren Addition sich die Gleichung

$$y_k - y = \Delta y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{k-1}$$

oder

$$1) \qquad y_k = y + \Delta y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{k-1}$$

ergiebt.

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung erhält man nach einem bekannten Satze der Differenzenrechnung

$$2)\quad \Delta y_k = \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \cdots + \Delta^2 y_{k-1},$$

und folglich nach 1):

$$\begin{aligned} y_k = y &+ \Delta y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \cdots + \Delta^2 y_{k-2}, \end{aligned}$$

d. i.

$$3)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^2 y_1 + \frac{k-3}{1}\Delta^2 y_2 + \cdots + \frac{1}{1}\Delta^2 y_{k-2}.$$

Weil nun nach 2)

$$4)\quad \Delta^2 y_k = \Delta^2 y + \Delta^3 y + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \cdots + \Delta^3 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 3):

$$\begin{aligned} y_k = y &+ \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y \\ &+ \frac{k-2}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^3 y \\ &+ \frac{k-3}{1}\Delta^2 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y_1 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &+ \frac{1}{1}\Delta^2 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y_1 + \cdots + \frac{1}{1}\Delta^3 y_{k-3}, \end{aligned}$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$5)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \cdots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y_{k-3}.$$

Weil ferner nach 4)

$$6)\quad \Delta^3 y_k = \Delta^3 y + \Delta^4 y + \Delta^4 y_1 + \Delta^4 y_2 + \cdots + \Delta^4 y_{k-1}$$

ist, so ist nach 5)

Digitized by Google

$$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^4 y$$

u. s. w.

$$+ \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y_{k-4}.$$

d. i. nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$7)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}\Delta^4 y + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3}\Delta^4 y_1 + \ldots + \frac{3.2.1}{1.2.3}\Delta^4 y_{k-4}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und wir gelangen daher, wenn wir uns der gewöhnlichen, hinreichend bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten bedienen, zu der folgenden allgemeinen Formel, wo natürlich n so wie k eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$8)\quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y$$
$$+ (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1 + (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$9)\quad R_n = (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1$$
$$+ (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2 + \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}$$

setzen:

$$10)\quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y + R_n.$$

II.

Setzen wir nun $k\Delta x = i$, so wird, wie man leicht findet:

$$11)\quad f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$
$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+ \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + R_n.$$

Digitized by Google

Nun ist aber, wenn wir der Kürze wegen

$$12) \quad \Omega_n = \frac{(k-1)_n \frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}} + (k-2)_n \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}} + (k-3)_n \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}} + \ldots + n_n \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n}$$

setzen:

$$R_n = \{(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n\} \Omega_n \Delta x^{n+1},$$

und folglich, weil nach der Lehre von den figurirten Zahlen offenbar

$$(k-1)_n + (k-2)_n + (k-3)_n + \ldots + n_n = k_{n+1}$$

ist:

$$R_n = k_{n+1} \Omega_n \Delta x^{n+1},$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots(n+1)} \Omega_n.$$

Weil die Grössen

$$(k-1)_n,\ (k-2)_n,\ (k-3)_n,\ \ldots . n_n$$

offenbar sämmtlich positiv sind, so ist nach dem im Archiv. Thl. I. S. 292. §. 45. bewiesenen höchst wichtigen Satze von den Mittelgrössen, wenn wir uns der dort eingeführten Bezeichnung der Mittelgrössen auch jetzt bedienen:

$$\Omega_n = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},\ \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

also

$$R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)} M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

und folglich nach 11):

$$13) \quad f(x+i) = y + \frac{i}{1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{i(i-\Delta x)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3} \cdot \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)..(i-n\Delta x)}{1.2.3..(n+1)}M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ldots\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right).$$

III.

Wenn man sich jetzt Δx der Null nähern, also, weil $i=k\Delta x$ ist, k in's Unendliche wachsen lässt, so nähern sich die Grössen

$$\frac{i(i-\Delta x)}{1.2},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)}{1.2.3.4},$$

u. s. w.

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3.4\ldots n},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3.4\ldots(n+1)};$$

wobei man nicht zu vergessen hat, dass n hier als constant zu betrachten ist, respective den Gränzen

$$\frac{i^2}{1.2},\ \frac{i^3}{1.2.3},\ \frac{i^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ \frac{i^n}{1.2.3..n},\ \frac{i^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}.$$

Weil ferner nach bekannten Sätzen der Differenzenrechnung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{\Delta(\Delta y)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta(\Delta^2 y)}{\Delta x^3}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}=\frac{\Delta(\Delta^3 y)}{\Delta x^4}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)}{\Delta x},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{\Delta(\Delta^{n-1}y)}{\Delta x^n}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}\right)}{\Delta x}$$

Digitized by Google

ist, so nähern sich nach den bekannten Begriffen der Differentialrechnung, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}, \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

respective den Gränzen:

$$\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

u. s. w.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n};$$

oder in einer andern bekannten Bezeichnung respective den Gränzen:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x) \ldots . f^{(n)}(x).$$

Weil endlich

$$y = f(x) = f(x),$$

$$y_1 = f(x+\Delta x) = f(x+\frac{i}{k}),$$

$$y_2 = f(x+2\Delta x) = f(x+2\frac{i}{k}),$$

$$y_3 = f(x+3\Delta x) = f(x+3\frac{i}{k}),$$

u. s. w.

$$y_{k-n-1} = f(x+(k-n-1)\Delta x) = f(x+(1-\frac{n-1}{k})i)$$

oder, wenn wir

$$\frac{i}{k} = i_1$$

setzen:

$$y = f(x),$$
$$y_1 = f(x+i_1),$$
$$y_2 = f(x+2i_1),$$
$$y_3 = f(x+3i_1)$$
u. s. w.
$$y_{k-n-1} = f(x+(i-(n-1)i_1))$$

ist; so nähert sich, wenn Δx sich der Null, also k dem Unendlichen, und folglich auch i_1 sich der Null nähert, die Reihe der Grössen

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{k-n-1}$$

offenbar der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn man in der Function $f(u)$ sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, und die Reihe der Grössen

$$\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_3}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}$$

nähert sich folglich, wie mittelst des Vorhergehenden leicht erhellet, der Reihe der Grössen, welche man erhält, wenn man in

$$\frac{\partial^{n+1} f(u)}{\partial u^{n+1}} = f^{(n+1)}(u)$$

sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt.

Ist nun $f^{(n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig, so muss es, immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar jederzeit unter den Werthen, welche $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man u sich von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, nothwendig einen geben, welcher der Mittelgrösse

$$M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right)$$

gleich ist, und man kann also, wenn ϱ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse bezeichnet, unter der gemachten Voraussetzung immer

$$f^{(n+1)}(x+\varrho i) = M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right)$$

setzen.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich aus 13) unmittelbar, dass, wenn

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind — was natürlich bei der ganzen vorhergehenden Betrachtung vorausgesetzt

Digitized by Google

werden muss — und die Function $f^{(n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig ist, immer

$$14)\quad f(x+i) = f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(x+\varrho i)$$

gesetzt werden kann, wo ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Dies ist bekanntlich das Fundamentaltheorem der ganzen Lehre von den Reihen, aus welchem der eigentliche Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz leicht hergeleitet werden können, worüber ich hier nichts weiter sage, weil diese Ableitung in jedem guten, den neueren Ansichten sich anschliessenden Lehrbuche der Differentialrechnung zu finden ist.

IV.

Soll ich schliesslich noch mein Urtheil über den im Obigen absichtlich so schleunig als möglich den Lesern des Archivs mitgetheilten Beweis des vorhergehenden so höchst wichtigen Satzes aussprechen, so muss ich, so wie ich die Sache jetzt ansehe, bekennen, dass ich allerdings der Meinung bin, dass dieser Beweis sehr verdient, bei dem Vortrage der Differentialrechnung benutzt zu werden. Vor dem von Cauchy gegebenen, hauptsächlich auf dem bekannten Ampère'schen Theoreme beruhenden, Beweise, den man in zum Theil abgeänderter Darstellung z. B. in meinen Lehrbüchern (Elemente der Differential- und Integralrechnung. Erster Theil. Leipzig. 1837. S. 116. und Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. 33. ff.) findet, scheint mir der obige Beweis hauptsächlich den für den Unterricht keineswegs unwichtigen Vorzug zu haben, dass er, wie aus der im Vorhergehenden gegebenen Entwickelung ersichtlich ist, eine ganz analytische Darstellung zulässt, indem im Gegentheil Cauchy's Beweis eine mehr synthetische Darstellung erfordert. Interessant ist mir der von Herrn Caqué gegebene Beweis auch hauptsächlich durch die bei demselben gemachte Anwendung des im Archiv. Thl. 1. S. 292. §. 45. bewiesenen Satzes von den Mittelgrössen gewesen, dessen grosse Wichtigkeit immer mehr erkannt zu werden verdient. Endlich will ich auch noch bemerken, dass, streng genommen, dieser Beweis durchaus nur eine im Sinne der neueren Analysis vervollkommnete Darstellung des ältesten Beweises ist, durch welchen Brook Taylor selbst in seiner Methodus incrementorum directa et inversa. Londini. 1715. 4. Prop. VII. Coroll. 2. den späterhin nach ihm benannten Satz zu begründen suchte, wovon sich Jeder, wer diese ziemlich seltene Schrift nicht selbst besitzt, auch schon aus dem Mathematischen Wörterbuche. Thl. 1. S. 768. hinreichend, jedoch nicht voll-

Digitized by Google

ständig, zu überzeugen im Stande ist, so dass wir also auf diese Art auch bei dem vorliegenden höchst wichtigen Gegenstande, was jedenfalls sehr interessant ist, wieder zu den ersten Anfängen der Differentialrechnung, — welche von der zu einer gewissen Zeit, und auch jetzt noch, bei vielen Mathematikern so sehr beliebten, aber gewiss höchst ungründlichen Methode der unbestimmten Coefficienten nichts wussten, — nur in einer in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge und Evidenz sehr vervollkommneten Darstellung, zurückgeführt werden. Einer ähnlichen Betrachtungsweise hat sich in neuerer Zeit übrigens auch schon Crelle in seinem Journal. Thl. VII. S. 276. ff. bedient, der ich aber, wenn sie auch allgemeiner ist, in Bezug auf den vorliegenden bestimmten Zweck doch die obige Darstellung des Herrn Caqué aus mehr als einer Rücksicht vorziehen möchte.

XV.

Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

In einer Abhandlung des Herrn Professor Steiner über Fusspunkten-Vielecke, Fusspunkten-Curven u. s. w. (Crelle's Journal. 21. Band.) wird bemerkt, dass derselben eine andere Untersuchung zur Seite stehe, welche sich mit den folgenden Aufgaben beschäftige.

α) In der Ebene einer gegebenen Curve denjenigen Punkt zu bestimmen, dessen Fusspunkten-Curve in Rücksicht auf jene unter allen die kürzeste sei.

β) Wenn in der Ebene eine gegebene Curve auf einer festen Geraden rollt, denjenigen mit ihr verbundenen Punkt anzugeben, welcher die kürzeste Curve beschreibt.

γ) Dasselbe, wenn die Curve auf einer anderen Curve rollt.

Wiewohl die Auflösung dieser Aufgaben wegen ihres innigen Zusammenhanges mit den dortigen Untersuchungen ziemlich nahe liegt, so erlaube ich mir doch, die meinige hier mitzutheilen, weil Betrachtungen über Rektifikation der Curven, der Analysis gegen-

Digitized by Google

über, so zu sagen, die schwache Seite der Geometrie bilden, und daher ein jeder dahin einschlagende Fortschritt der letzteren näher festgestellt zu werden verdient.

§. 1.

Vom Punkte der mittleren Entfernung.

Sind a, a_1, a_2 die Abstände eines beliebigen Punktes A, in der Ebene eines beliebigen Dreiecks MM_1M_2, von den Seiten M_1M_2, MM_2, MM_1 oder p, p_1, p_2 des letzteren, so ist, jenachdem derselbe 1) innerhalb des Dreiecks, oder 2) ausserhalb desselben in einem seiner Winkel (MM_2M_1), oder 3) im Scheitelwinkel eines seiner Winkel (MM_2M_1) liegt:

$$1)\ \Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2, \text{ und daher}$$
$$a.p + a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta;$$

$$\text{oder } 2)\ \Delta AM_1M_2 + \Delta AMM_2 - \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2, \text{ und}$$
$$a.p + a_1.p_1 - a_2.p_2 = 2\Delta;$$

$$\text{oder } 3)\ -\Delta AM_1M_2 - \Delta AMM_2 + \Delta AMM_1 = \Delta MM_1M_2, \text{ und}$$
$$-a.p - a_1.p_1 + a_2.p_2 = 2\Delta.$$

Lehrsatz 1.

Die algebraische Summe der Rechtecke zwischen den Seiten eines beliebigen Dreiecks und den Abständen eines beliebigen Punktes seiner Ebene von diesen Seiten ist dem doppelten Inhalte des Dreiecks gleich, indem ein jeder Abstand positiv oder negativ genommen wird, jenachdem jener Punkt und die Gegenecke der betreffenden Dreiecksseite auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten dieser letzteren liegen.

Sind nun A, B, C, $D \ldots n$ beliebige Punkte in der Ebene des Dreiecks MM_1M_2, sind α, β, γ, $\delta \ldots$ eben so viele diesen Punkten entsprechende ganze oder gerbochene, positive oder negative Zahlen, und a, a_1, a_2; b, b_1, b_2, c, c_1, c_2; d, d_1, d_2;.. die Abstände der ersteren von den Seiten p, p_1, p_2 des Dreiecks, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha ap + \alpha a_1 p_1 + \alpha a_2 p_2 &= 2\alpha\Delta;\\
\beta bp + \beta b_1 p_1 + \beta b_2 p_2 &= 2\beta\Delta;\\
\gamma cp + \gamma c_1 p_1 + \gamma c_2 p_2 &= 2\gamma\Delta;\\
\delta dp + \delta d_1 p_1 + \delta d_2 p_2 &= 2\delta\Delta;\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot
\end{aligned}$$

$$\text{also}\quad (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d \ldots)p + (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 \ldots)p_1$$
$$+ (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2 \ldots)p_2 = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots)\Delta,$$

Digitized by Google

oder, indem man die Faktoren von p, p_1, p_2, 2Δ kürzer durch $\Sigma(\alpha a)$, $\Sigma(\alpha a_1)$, $\Sigma(\alpha a_2)$, $\Sigma(\alpha)$ bezeichnet:

$$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p + \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta.$$

Denkt man sich nun in derselben Ebene einen Punkt S, welcher von den Seiten p und p_1 um

$$s = \frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)} \text{ und } s_1 = \frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$$

entfernt ist, was allemal und bei gehöriger Berücksichtigung der Zeichen dieser Ausdrücke nur auf einzige Weise möglich ist, und ist s_2 der Abstand des so bestimmten Punktes S von der dritten Seite p_2, so folgt einmal aus der vorigen Gleichung:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)} \cdot p_2 = 2\Delta;$$

dann aber auch aus dem Lehrsatze 1.:

$$s \cdot p + s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 = 2\Delta;$$

folglich ist auch

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Bildet die Gerade MM_1 mit M_1M_2 und MM_2 kein Dreieck, sondern ist dieselbe mit einer von beiden, z. B. mit M_1M_2, parallel, und ist m der Abstand beider von einander, so ist

$$a = m + a_2,\ b = m + b_2,\ c = m + c_2,\ d = m + d_2,\ \ldots;$$
$$s = m + s_2;$$

wo a_2, b_2, c_2, $d_2 \ldots$, s_2 positiv oder negativ zu nehmen sind, jenachdem die Punkte A, B, C, $D, \ldots$, S ausserhalb oder innerhalb der Parallelen liegen; substituirt man also diese Ausdrücke in die Gleichung

$$\Sigma(\alpha) \cdot s = \Sigma(\alpha a),$$

so wird daraus

$$\Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha) \cdot s_2 = \Sigma(\alpha) \cdot m + \Sigma(\alpha a_2),$$

also wiederum, wie oben:

$$s_2 = \frac{\Sigma(\alpha a_2)}{\Sigma(\alpha)}.$$

Nehmen die Coefficienten α, β, γ, $\delta \ldots$ in gleichem Verhältnisse zu oder ab, so werden hierdurch die Werthe der Quotienten

Digitized by Google

$\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ und $\frac{\Sigma(\alpha a_1)}{\Sigma(\alpha)}$, und also auch die Lage des Punktes S nicht geändert. Ist $\alpha=\beta=\gamma=\delta\ldots$, so sind s, s_1, s_2 die arithmetischen Mittel zwischen den Abständen a, b, c, $d\ldots$; a_1, b_1, c_1, $d_1\ldots$; a_2, b_2, c_2, $d_2\ldots$, und der Punkt S heisst im gewöhnlichen Sinne der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf das System der Punkte A, B, C, $D\ldots$. Offenbar aber ist der Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$, wenigstens für den Fall positiver ganzer Zahlen α, β, γ, $\delta\ldots$, ebenfalls das arithmetische Mittel zwischen den Abständen der Punkte A, B, C, $D\ldots$ von einer Geraden, insofern man sich in diesen Punkten bezüglich eine Anzahl von α, β, γ, $\delta\ldots$ Punkten vereinigt denkt. Daher ist man berechtigt, auch im allgemeinen Falle den Ausdruck $\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}$ das arithmetische Mittel zwischen den mit den Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Längen a, b, c, $d\ldots$, und den Punkt S den Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Punkte A, B, C, $D\ldots$ zu nennen.

Lehrsatz 2.

Sind die Abstände eines Punktes S von zwei beliebigen, einander durchschneidenden Geraden, ein jeder das arithmetische Mittel zwischen den, mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Abständen eines ebenen Systems von Punkten A, B, C, $D\ldots$ von der betreffenden Geraden, so besitzt jener Punkt S die nämliche Eigenschaft hinsichtlich jeder dritten Geraden; und es gibt daher allemal einen, aber auch nur einen Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein gegebenes System mit gegebenen Coefficienten behafteter Punkte. Hierbei aber wird vorausgesetzt, dass die Abstände je zweier Punkte von einer Geraden mit einerlei oder mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, jenachdem sie auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen.

Zusatz. Geht die Gerade, von welcher die Abstände gerechnet werden, durch den Punkt der mittleren Entfernung selbst, so ist

$$s=\frac{\Sigma(\alpha a)}{\Sigma(\alpha)}=0, \text{ also } \Sigma(\alpha a)=0,$$

und umgekehrt: Gilt die letztere Gleichung für zwei Gerade, welche sich schneiden, so ist ihr Durchschnitt der Punkt der mittleren Entfernung. Daher sind im Falle von lauter positiven Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ die Punkte A, B, C, $D\ldots$ nothwendig auf beide Seiten einer jeden Geraden vertheilt,

Digitized by Google

welche durch den Punkt der mittleren Entfernung geht, und welche daher eine Linie der mittleren Entfernung heisst.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise, wie hier mittels des Dreiecks MM_1M_2 im Fall eines ebenen Systems von Punkten, kann man mittels einer Pyramide auch den Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein System von Punkten im Raume bestimmen.

§. 2.

Vom Punkte der kleinsten Entfernung.

Es seien in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) S, S_1 zwei Punkte von beliebiger Entfernung mit einem beliebigen dritten Punkte A durch die Geraden AS, AS_1 verbunden, und von dem einen (S_1) auf die Gerade AS eine Senkrechte S_1m gefällt, so ist

$$\begin{aligned} \text{entweder 1)} \quad & Am = AS + Sm, \\ \text{oder 2)} \quad & Am = AS - Sm, \\ \text{oder 3)} \quad & Am = Sm - AS \\ & \quad = AS - Sm + 2Am, \\ \text{oder aber 4)} \quad & Am = AS; \end{aligned}$$

jenachdem das in S auf SS_1 errichtete Loth SX 1) zwischen den Punkten A und S_1 hindurchgeht, 2) oder nicht, und zwar $AS > Sm$ oder 3) $AS < Sm$, oder aber 4) dieses Loth mit AS zusammenfällt.

Jedenfalls aber ist

$$AS_1 > Am.$$

Wird nun aus A auf SS_1 noch die Senkrechte Ap gefällt, so ist

$$Sm = SS_1 \cdot \frac{Sp}{AS};$$

also, wenn man der Kürze wegen AS, A_1S, SS_1, Sp mit A, A_1, s, a bezeichnet und unter p eine Linie versteht, welche Null oder grösser als Null ist, so erhält man in jedem Falle folgende Ungleichung:

$$A_1 > A - s \cdot \frac{a}{A} + p,$$

wo a positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die Punkte A und S_1 auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten des Lothes SX liegen.

Digitized by Google

Sind also irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D\ldots$ und ebensoviele ganze oder gebrochene, aber positive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ gegeben; werden erstere mit zwei beliebigen Punkten S, S_1 der Ebene bezüglich durch die Geraden $A, B, C, D\ldots$ und $A_1, B_1, C_1, D_1\ldots$ verbunden, und sind $a, b, c, d\ldots$ die Abstände jener Punkte von dem in S auf SS_1 errichteten Lothe, so erhält man für jeden dieser Punkte eine der vorigen analoge Ungleichung, und wenn man die Glieder einer jeden bezüglich mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ multiplicirt und sodann die Summen der linken und der rechten Seiten nimmt, so ergibt sich:

$$\alpha.A_1+\beta.B_1+\gamma.C_1+\delta.D_1+\ldots > \alpha.A+\beta.B+\gamma.C+\delta.D+\ldots$$
$$-s\left(\frac{\alpha.a}{A}+\frac{\beta.b}{B}+\frac{\gamma.c}{C}+\frac{\delta.d}{D}+\ldots\right)+P,$$

wo $a, b, c, d\ldots$ positiv oder negativ oder $=0$ zu nehmen sind, jenachdem die betreffenden Punkte $A, B, C, D\ldots$ auf derjenigen Seite des Lothes SX, wo der Punkt S_1 sich befindet, oder auf der anderen Seite, oder auf dem Lothe selbst liegen; und wo P wiederum eine Linie ≥ 0 bedeutet. Mittels der schon oben gebrauchten Abkürzungszeichen lässt sich die zuletzt erhaltene Beziehung auch so ausdrücken:

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)-s.\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)+P.$$

Gesetzt nun, es wäre S ein solcher Punkt der Geraden SS_1, für welchen die algebraische Summe

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0,$$

so würde

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)+P,$$

um so mehr also

$$\Sigma(\alpha A_1) > \Sigma(\alpha A)$$

sein, und zwar — was für den Vergleich der geometrischen mit der analytischen Entwickelungsweise von Wichtigkeit ist — wie gross oder klein auch die Strecke $SS_1=s$ gedacht werden mag.

Werden die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ mit anderen vertauscht, welche zu den ersteren alle einerlei Verhältniss haben, so besteht auch jetzt noch für den Punkt S die Bedingungsgleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0,$$

und es wird also hierdurch die Lage des Punktes S nicht verändert. Sind die Coefficienten $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\ldots$, so ist, wenn

Digitized by Google

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}+\ldots=0,$$

allemal

$$A_1+B_1+C_1+D_1+\ldots>A+B+C+D+\ldots,$$

d. h. die Summe der Entfernungen des so bestimmten Punktes S von den Punkten A, B, C, $D\ldots$ ist kleiner als die eines jeden anderen Punktes S_1 derselben Ebene, und in diesem Falle heisst der Punkt S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf das System der Punkte A, B, C, $D\ldots$. Im Falle ungleicher Coefficienten aber braucht man sich nur vorzustellen, dass eine Anzahl von α Punkten im Punkte A, β Punkte in B, γ in C, δ in $D\ldots$ vereinigt seien, um auch jetzt in den Ausdrücken $\Sigma(\alpha A)$, $\Sigma(\alpha A_1)$ die Summen der Entfernungen der Punkte S, S_1 von den A, B, C, $D\ldots$ zu erkennen und in dieser Vorstellung noch einen Schritt weiter gehend den Sinn der folgenden Definition zu fassen: Ein Punkt S heisst der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf ein gegebenes System, mit gegebenen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteter Punkte A, B, C, $D\ldots$, wenn die Summe der Entfernungen des Punktes S von diesen letzteren kleiner als die eines jeden anderen Punktes S_1 ist.

Man kann die Quotienten $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$, $\frac{\gamma}{C}$, $\frac{\delta}{D}\ldots$ als constante Coefficienten ansehen, mit denen die Punkte A, B, C, $D\ldots$ behaftet sind. Gesetzt nun, der Punkt S, welcher von den Punkten A, B, C, $D\ldots$ um die Längen A, B, C, $D\ldots$ entfernt ist, sei der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf diese Punkte, so würde nach Lehrsatz 2. Zusatz. für jede durch S gehende Gerade die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=0$$

gelten, und da die in §. 1. für die Abstände a, b, c, $d\ldots$ gegebene Zeichenregel mit derjenigen des jetzigen Paragraphen vollkommen übereinstimmt, so müsste der Punkt S zugleich auch ein Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten α, β, γ, $\delta\ldots$ behafteten Punkte A, B, C, $D\ldots$ sein.

Denkt man sich um den Punkt S als Centrum mit beliebigem Halbmesser r einen Kreis beschrieben, welcher die Geraden AS, BS, CS, $DS\ldots$ in den Punkten A', B', C', $D'\ldots$ schneidet, und sind a', b', c', $d\ldots$ die Abstände dieser Punkte von dem Lothe SX, so ist

$$\frac{a}{A}=\frac{a'}{r},\quad \frac{b}{B}=\frac{b'}{r},\quad \frac{c}{C}=\frac{c'}{r},\quad \frac{d}{D}=\frac{d'}{r}\ldots,$$

also

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right)=\frac{1}{r}\Sigma(\alpha a').$$

Digitized by Google

Gesetzt also, der Punkt S wäre der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die mit den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$, so würde

$$\Sigma(\alpha a') = 0, \text{ und also auch } \Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0 \text{ sein,}$$

also S zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit denselben Coefficienten behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$ sein.

Lehrsatz 3.

Ist irgend ein ebenes System von Punkten $A, B, C, D \ldots$, und sind ebensoviele ganze oder gebrochene positive Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ gegeben, und gibt es in der Ebene jenes Systems einen Punkt S, welcher, wenn man die reciproken Werthe seiner Abstände $A, B, C, D \ldots$ von jenen Punkten bezüglich mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ multiplicirt, der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf die, mit den so erhaltenen Zahlen $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{C}, \frac{\delta}{D} \ldots$ behafteten Punkte $A, B, C, D \ldots$ ist, so ist dieser Punkt S zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf dieselben, mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ behafteten Punkte, und zwar gibt es dann allemal nur einen einzigen solchen Punkt S.

Lehrsatz 4.

Ist der Mittelpunkt eines Kreises der Punkt der mittleren Entfernung in Bezug auf ein System von Punkten, welche auf seinem Umfange liegen und mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten behaftet sind, so ist derselbe zugleich auch der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf ein System von ebensovielen; mit denselben Coefficienten behafteten Punkten, welche beliebig auf den nach jenen Punkten gehenden Halbmessern, auf einerlei Seite vom Mittelpunkte, liegen.

Lehrsatz 5.

Der Punkt der kleinsten Entfernung für ein gegebenes System von Punkten, welche mit gegebenen Coefficienten behaftet sind, bleibt unverändert, wenn diese Coefficienten alle in gleichem Verhältniss sich ändern.

Ob übrigens allemal ein Punkt der kleinsten Entfernung existire, und wie derselbe gefunden werde, lässt sich bis jetzt im

Digitized by Google

Allgemeinen nicht ermitteln, wohl aber in besonderen Fällen, unter welchen hier der folgende, von welchem später Gebrauch gemacht wird, hervorgehoben werden soll.

Liegen je zwei der gegebenen Punkte, z B. A und B, auf einem Strahle eines Strahlbüschels S, und zwar auf verschiedenen Seiten des Punktes S, so sind die Abstände a, b derselben von einem beliebigen Strahle des Strahlbüschels entgegengesetzt und es ist $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$. Sind also nun auch noch die betreffenden zwei Coefficienten α und β einander gleich, so ist

$$\frac{\alpha a}{A} + \frac{\beta b}{B} = 0,$$

und somit überhaupt

$$\Sigma\left(\frac{\alpha a}{A}\right) = 0,$$

also S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die Gesammtheit dieser Punktenpaare.

Lehrsatz 6.

Schneiden sich beliebig viele Gerade in einem Punkte S, und sind auf einer jeden auf verschiedenen Seiten von S zwei Punkte beliebig gegeben und mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven, aber paarweise unter sich gleichen Coefficienten behaftet, so ist S der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die Gesammtheit dieser Punktenpaare.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Punktes der mittleren Entfernung ergibt sich, dass für einen beliebigen Punkt S_1 der Ausdruck $\Sigma\left(\frac{\alpha . A_1^2}{A}\right)$ um so grösser wird, je weiter der Punkt S_1 sich vom Punkte S der kleinsten Entfernung entfernt. Es frägt sich, ob dasselbe auch von dem Ausdrucke $\Sigma(\alpha A_1)$ gelte?

Denkt man sich in (Taf. III. Fig. 2., 3., 4.) die Strecke $SS_1 = s$ im Zunehmen begriffen, so wird die Linie AS_1 in Taf. III. Fig. 2. und Fig. 4. zwar unbedingt zunehmen, dagegen in Taf. III. Fig. 3. so lange abnehmen, bis SS_1 so gross als die Projektion Sp der Linie AS geworden ist; hat aber SS_1 diese Grösse erreicht, so nimmt auch hier AS_1 nun ins Unendliche zu. Das nämliche gilt also auch von $\alpha . AS_1$. Gesetzt aber auch, dass ein oder mehrere der Produkte $\alpha . A_1$, $\beta . B_1 \ldots$ die Grenze, über welche hinaus sie sich mit s zugleich fortwährend vergrössern müssen, erreicht haben, so lässt sich doch dasselbe nicht eher von der Summe $\Sigma(\alpha A_1)$ selber mit Gewissheit behaupten, bis ein jedes der Produkte an dieser Grenze angelangt ist; und da die Projektion Sp mit der Verkleinerung des Winkels ASS_1 bis zur Grösse von AS zunimmt, so lässt sich hiernach mit völliger Gewissheit nur Folgendes feststellen:

Digitized by Google

Lehrsatz 7.

Die Summe der Abstände eines Punktes S_1 von den mit beliebigen ganzen oder gebrochenen positiven Coefficienten behafteten Punkten $A, B, C, D \ldots$ einer Ebene nimmt mit seinem Abstande vom Punkte S der kleinsten Entfernung nothwendig zu, sobald derselbe den Umfang desjenigen Kreises erreicht hat, welcher um den Punkt S als Mittelpunkt durch den von ihm entferntesten unter jenen Punkten $A, B, C, D \ldots$ gelegt wird.

§. 3.

Von den Fusspunkten-Vielecken und den Fusspunkten-Curven.

Fällt man auf alle Seiten eines gegebenen Vielecks $\mathfrak{V}$, aus einem Punkte P seiner Ebene, Senkrechte, und verbindet deren Fusspunkte der Reihe nach paarweise durch Gerade, so entsteht ein neues Vieleck V, welches dem gegebenen eingeschrieben ist. Dieses neue Vieleck V heisst das Fusspunkten-Vieleck des Punktes P in Bezug auf das gegebene Vieleck $\mathfrak{V}$; und zwar soll diese Benennung gelten, es mag nun das Vieleck $\mathfrak{V}$ geschlossen oder offen sein, lauter ausspringende oder auch einspringende Winkel besitzen, einen einzigen oder mehrere Räume einschliessen

Ist nun A irgend eine Ecke des Vielecks $\mathfrak{V}$, α der von den anstossenden Seiten eingeschlossene spitze oder stumpfe Winkel, PA der Abstand eines beliebigen Punktes P von dieser Ecke, und MN die derselben entsprechende Seite des Fusspunkten-Vielecks V, so lässt sich um das Viereck $PMAN$ ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser PA ist; folglich ist dessen Sehne

$$MN = PA \,.\, \sin\alpha.$$

Man erhält also den Umfang von V, indem man die Abstände des Punktes P von den Ecken des Vielecks $\mathfrak{V}$ bezüglich mit den Sinus der an diesen Ecken liegenden Winkel von $\mathfrak{V}$ multiplicirt und die Summe der Produkte nimmt, oder:

Lehrsatz 8.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein beliebiges gegebenes, geschlossenes oder offenes Vieleck $\mathfrak{V}$, ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Vielecks $\mathfrak{V}$, insofern diese letzteren mit den Sinus der betreffenden Winkel von $\mathfrak{V}$, als Coefficienten, behaftet werden.

Digitized by Google

b) Und daher hat unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein gegebenes Vieleck $\mathfrak{B}$ dasjenige den kleinsten Umfang, welches dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit jenen Sinus behafteten Eckpunkte des Vielecks $\mathfrak{B}$ entspricht.

c) Je weiter ein Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den erwähnten Punkt S, als Mittelpunkt, durch die von ihm entfernteste Ecke des Vielecks $\mathfrak{B}$ beschrieben wird, desto grösser wird der Umfang seines Fusspunkten-Vielecks V.

Da im regelmässigen Vieleck alle Winkel einander gleich sind, und da, was sich sehr leicht aus Lehrsatz 4. und 6. ergibt, sein Mittelpunkt der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf seine Ecken ist, so hat man insbesondere:

Lehrsatz 9.

a) Der Umfang des Fusspunkten-Vielecks V eines beliebigen Punktes P, in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck $\mathfrak{B}$, ist gleich der Summe der Abstände des Punktes P von den Ecken des letzteren, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels des regelmässigen Vielecks.

b) Unter allen Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf ein regelmässiges Vieleck hat das dem Mittelpunkte des letzteren entsprechende den kleinsten Umfang.

Fällt man auf die sämmtlichen Tangenten einer Curve (oder eines Curvenstückes) $\mathfrak{B}$ aus einem beliebigen Punkte P ihrer Ebene Senkrechte, so bilden die Fusspunkte dieser letzteren ebenfalls eine Curve (oder ein Curvenstück) V. Diese Curve V heisst die Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{B}$. Kraft des Gesetzes der Continuität nun lassen sich alle Eigenschaften der Fusspunkten-Vielecke auf die Fusspunkten-Curven übertragen. Denn eine jede Curve $\mathfrak{B}$ lässt sich als ein Vieleck mit unendlich kleinen, einander gleichen Seiten betrachten, und dann sind die Fusspunkten-Curven in Bezug auf die Curve $\mathfrak{B}$ mit den Fusspunkten-Vielecken in Bezug auf das Vieleck $\mathfrak{B}$ identisch, indem die Seiten des letzteren die Richtungen der Tangenten der ersteren bestimmen. Die Winkel, welche je zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten einschliessen, treten jetzt an die Stelle der Winkel des Vielecks, und da dieselben unendlich klein, also ihre Sinus genau ihren Bogen, für den Halbmesser $=1$, gleich sind, so darf man diese Bogen an die Stelle jener Sinus setzen. Handelt es sich nur um die Bestimmung des Punktes der kleinsten Entfernung oder um das Verhältniss der Umfänge der Fusspunkten-Curven, so kann man auch, was offenbar bequemer ist, nach Lehrsatz 5. sich statt jener Sinus der reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser in den betreffenden Punkten der Curve $\mathfrak{B}$ bedienen. Denn ist A irgend eine Ecke eines gleichseitigen Vielecks $\mathfrak{B}$, die Seite desselben $=2h$, und denkt man sich in den Mittelpunkten m, n der die Ecke A oder

Digitized by Google

den Winkel α einschliessenden Seiten zwei Senkrechte errichtet, welche sich im Punkte a schneiden, so ist

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 2\frac{am}{aA}.\frac{Am}{aA} = \frac{2h\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2},$$

und ebenso erhält man für irgend eine andere Ecke C

$$\sin\gamma = \frac{2h\sqrt{(Cc)^2-h^2}}{(Cc)^2};$$

also

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{\sqrt{(aA)^2-h^2}}{(aA)^2} : \frac{\sqrt{(cC)^2-h^2}}{(cC)^2}.$$

Da nun im Falle der Curve $\mathfrak{B}$ die Seite $2h$ unendlich klein ist, so ist hier

$$\sin\alpha : \sin\gamma = \frac{1}{aA} : \frac{1}{cC}.$$

Offenbar aber sind in diesem Falle die Längen aA, cC die Krümmungshalbmesser der Curve in den Punkten A, C.

Lehrsatz 10.

a) Der Umfang der Fusspunkten-Curve V eines beliebigen Punktes P in Bezug auf eine beliebige gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ ist ebensogross als die Summe der Abstände des Punktes P von sämmtlichen Punkten der Curve $\mathfrak{B}$, wenn man einen jeden dieser Abstände mit dem Bogen des Winkels, welchen die Tangente in dem betreffenden Punkte mit der ihr zunächst folgenden bildet (für den Halbmesser $=1$), multiplicirt.

b) Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine gegebene Curve $\mathfrak{B}$ ist diejenige die kürzeste, welche dem Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf sämmtliche Punkte der Curve $\mathfrak{B}$ entspricht, vorausgesetzt, dass diese Punkte mit den unter *a*) erwähnten Bogen oder auch mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser der Curve, als Coefficienten, behaftet werden.

c) Die Fusspunkten-Curve eines Punktes P in Bezug auf eine gegebene Curve (oder Curvenstück) $\mathfrak{B}$ wird um so länger, je weiter der Punkt P über diejenige Kreislinie hinausrückt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

Digitized by Google

Da bei einer Ellipse und Hyperbel die Krümmungen der Curve in zwei Endpunkten eines Durchmessers allemal einander gleich sind, also nach Lehrsatz 6. der Mittelpunkt des Kegelschnittes der Punkt der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser behafteten Punkte des ganzen Kegelschnittes sowohl, als auch zweier von zwei Durchmessern begrenzten Curvenstücke ist, so ergibt sich insbesondere:

Lehrsatz 11.

Unter allen Fusspunkten-Curven in Bezug auf eine Ellipse oder Hyperbel, oder auch in Bezug auf zwei von zwei Durchmessern begrenzte Bogen derselben ist diejenige die kürzeste, welche dem Mittelpunkte des Kegelschnittes entspricht.

§. 4.

Von den Curven, welche dadurch erzeugt werden, dass eine andere Curve auf einer Geraden rollt.

Es sei $MABCDN$ (Taf. III. Fig. 5.) irgend eine gebrochene Linie oder ein Stück eines Vielecks; A, B, C, D seien die Ecken und α, β, γ, δ die Winkel, welche die Seiten AB, BC, CD, DN mit den Verlängerungen der ihnen vorhergehenden Seiten MA, AB, BC, CD bilden; und P sei irgend ein Punkt in der Ebene des Vielecks. Denkt man sich nun, dass jenes Stück des letzteren auf einer festen Geraden $\mathfrak{G}$ als Basis rolle, d. h. dass die Seiten MA, AB, BC, CD, DN desselben nach einander in die Stelle der Abschnitte MA, $A\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{N}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ treten, so wird gleichzeitig der Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück Ecken hat; die Punkte A, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ werden die Centra, die Längen PA, PB, PC, PD die Halbmesser und die Winkel α, β, γ, δ die Centriwinkel dieser Bogen sein. Setzt man also der Kürze wegen $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$. $PD=d\ldots$, und versteht unter α, β, γ, δ die den gleichnamigen Winkeln zugehörigen Bogen für den Halbmesser $=1$, so ist die Länge der so entstandenen krummen Linie $PA_1B_1C_1D_1$ oder

$$W = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \Sigma(\alpha a).$$

Je kleiner nun die Winkel α, β, γ, δ werden, desto mehr nähert sich die Summe $\Sigma(\alpha a)$ der Summe $\Sigma(\sin\alpha . a)$, d. h. die Länge W dem Umfange des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf das gegebene Polygonstück $MABCDN$ oder $\mathfrak{B}$; werden also jene Winkel unendlich klein, so sind beide einander gleich.

Digitized by Google

Lehrsatz 12.

Rollt eine gebrochene Linie $\mathfrak{B}$ über einer Geraden $\mathfrak{G}$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P eine krumme Linie W, deren Länge der Länge des Fusspunkten-Vielecks V des Punktes P in Bezug auf $\mathfrak{B}$ um so näher kommt, je kleiner die Winkel sind, welche die Theillinien von $\mathfrak{B}$ mit einander bilden.

Der Fall, dass sämmtliche Winkel α, β, γ, δ unendlich klein sind, tritt aber ein, wenn statt des Polygonstückes $\mathfrak{B}$ ein Curvenstück $\mathfrak{B}$ gesetzt wird; also gilt mit vollkommener Strenge:

Lehrsatz 13.

a) Rollt irgend eine Curve oder ein Curvenstück $\mathfrak{B}$ über einer Geraden $\mathfrak{G}$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ festverbundene Punkt P eine zweite Curve W, welche genau eben so lang ist, als die Fusspunkten-Curve V des Punktes P in Bezug auf denjenigen Theil von $\mathfrak{B}$, mit welchem diese Curve beim Rollen nach und nach die Gerade $\mathfrak{G}$ berührt.

b) Unter allen Curven W, welche durch das Rollen einer Curve $\mathfrak{B}$ über einer Geraden entstehen, ist diejenige die kürzeste, welche vom Punkte S der kleinsten Entfernung in Bezug auf die, mit den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser, als Coefficienten, behafteten Punkte der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

c) Die Curve W wird um so länger, je weiter der dieselbe beschreibende Punkt P über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt S der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt des rollenden Theiles der Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben wird.

Ueber die Gestalt der Curve W ist Folgendes zu bemerken: Besitzt die Curve $\mathfrak{B}$ einen Wendungspunkt und berührt sie in demselben beim Rollen die Gerade $\mathfrak{G}$, so tritt dieselbe von nun an von der einen Seite dieser Geraden auf die andere über und setzt zwar ihre Bewegung in derselben Richtung von $\mathfrak{G}$ fort, aber die Ebene der Curve $\mathfrak{B}$ dreht sich plötzlich z. B. rechtsherum, wenn sie bisher sich linksherum drehte, weshalb jenem Wendungspunkte von $\mathfrak{B}$ ein Rückkehrpunkt der Curve W entsprechen muss. In Taf. III. Fig. 5. wird die Tangente im Wendungspunkte durch die Linie BC des Polygonstücks, und der Rückkehrpunkt von W durch den Punkt B_1 repräsentirt. — Das Nämliche findet statt, wenn die Curve $\mathfrak{B}$ einen sogenannten Rückkehrpunkt im Schnabel (rebroussement en bec) besitzt, indem sie dann, bis zu diesem Punkte auf der Geraden $\mathfrak{G}$ fortgerollt, sofort in der entgegengesetzten Richtung, aber ohne von der einen Seite von $\mathfrak{G}$ auf die andere überzutreten, zurückrollt. Dagegen hat ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt, wo die Tangente zwischen beiden

Zweigen der Curve hindurchgeht, keinen Rückkehrpunkt der Curve *W* zur Folge In diesem Falle nämlich rollt die erstere zwar auch längs dem anderen Zweige auf der Geraden $\mathfrak{G}$ zurück, tritt aber zugleich auch auf die andere Seite von $\mathfrak{G}$ über, so dass die Ebene von $\mathfrak{B}$ selbst keine entgegengesetzte Drehung erleidet. Auch diese beiden Fälle zeigen sich schon am Polygonstück $\mathfrak{B}$, wenn eine Ecke desselben nicht um denjenigen Winkel, welchen eine Seite mit der Verlängerung der vorhergehenden bildet, sondern um den von beiden Seiten selbst gebildeten hohlen Winkel gedreht wird.

Besondere Fälle.

a) Ist die rollende Curve $\mathfrak{B}$ ein Kreis oder ein Kreisbogen, so beschreibt der Mittelpunkt desselben eine Gerade von der Länge des durchrollten Bogens; in der That fällt die Fusspunkten-Curve des Mittelpunktes eines Kreises in Bezug auf einen Bogen desselben mit diesem letzteren selbst zusammen. Der vorige Lehrsatz *b*) sagt also aus, dass unter allen Cykloiden, welche von den Punkten in der Ebene eines rollenden Kreises beschrieben werden, die gerade Linie die kürzeste sei.

b) Ist die Curve $\mathfrak{B}$ eine Parabel, so ist die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes in Bezug auf dieselbe eine Gerade, nämlich die Scheiteltangente der Parabel; und gilt es nur einem Bogen der letzteren, so ist die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes demjenigen Stücke der Scheiteltangente gleich, das von den Tangenten in den beiden Endpunkten dieses Bogens begrenzt wird. Aber das Stück der Scheiteltangente, welches zwischen dem Scheitel und einer Tangente der Parabel liegt, ist bekanntlich halb so gross, als die Ordinate des Berührungspunktes dieser Tangente, und folglich das von jenen zwei Tangenten begrenzte Stück halb so gross, als die Summe oder Differenz der Ordinaten der Endpunkte jenes Bogens; also ergibt sich aus Lehrsatz 13. *a*) der folgende besondere

Lehrsatz 14.

Rollt ein Parabelbogen auf einer geraden Linie, so beschreibt der Brennpunkt der Parabel eine Curve, welche halb so lang als die Projektion jenes Bogens auf eine zur Achse senkrechte Gerade ist.

c) Die Fusspunkten-Curve des Brennpunktes einer Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf dieselbe ist bekanntlich ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem der ersteren einerlei, und dessen Durchmesser die Hauptachse derselben ist. Ist nun in Taf. III. Fig. 6. *AB* irgend ein Bogen einer Ellipse oder Hyperbel; sind *Aa*, *Bb* die Tangenten in dessen Endpunkten *A*, *B*; und *a*, *b* die Fusspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte *F* auf diese Tangenten, so ist der Bogen *ab* jenes Kreises derjenigen Curve gleich, welche vom Punkte *F* beim Rollen des Bogens *AB* auf einer Geraden beschrieben wird. Zieht man aber noch die Halbmesser *Ma*, *Mb*

Digitized by Google

und aus dem anderen Brennpunkte F_1 die Zuglinien F_1A, F_1B, so sind letztere bekanntlich den ersteren parallel, und daher die Winkel aMb und AF_1B von gleicher Grösse. Demnach darf man behaupten:

Lehrsatz 15.

Rollt ein Ellipsen- oder ein Hyperbelbogen auf einer geraden Linie, so beschreibt ein jeder der beiden Brennpunkte des Kegelschnittes eine Curve von der Länge eines Kreisbogens, dessen Halbmesser die halbe Hauptachse, und dessen Centriwinkel derjenige Winkel ist, unter welchem jener erstere Bogen vom anderen Brennpunkte aus gesehen wird.

Zusatz. Rollt eine Ellipse oder Hyperbel in einer Ebene $\mathfrak{E}$ auf einer festen Geraden dieser Ebene, so verhalten sich die dem Berührungspunkte beider Linien entsprechenden Geschwindigkeiten des einen Brennpunktes ebenso wie die Geschwindigkeiten, mit welchen die Zuglinie des anderen Brennpunktes in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ des Kegelschnittes selbst den Berührungspunkt begleitet.

Lehrsatz 16.

Rollt eine Ellipse oder Hyperbel auf einer geraden Linie, so beschreibt unter allen Punkten ihrer Ebene der Mittelpunkt derselben die kürzeste Curve.

§. 5.

Von den Curven, welche durch das Rollen einer Curve auf einer anderen Curve erzeugt werden.

Denkt man sich zwei Polygonstücke $MABCDN$ und $M_1A_1B_1C_1D_1N_1$ oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$, deren gleichnamige Seiten paarweise gleich sind, so kann man das eine, z. B. $\mathfrak{B}$, dergestalt um das andere herumführen, dass fortwährend die gleichen Seiten sich decken und dass die Ecken von $\mathfrak{B}$ sich um die gleichnamigen Ecken von $\mathfrak{B}_1$ drehen. Während aber diess geschieht, wird jeder beliebige, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P eine krumme Linie beschreiben, welche aus so vielen Kreisbogen besteht, als das Polygonstück $\mathfrak{B}$ Ecken hat; die Halbmesser a, b, c, d dieser Bogen werden den Abständen PA, PB, PC, PD des Punktes P von diesen Ecken, und die Centriwinkel derselben werden, jenachdem die zusammentreffenden Ecken von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ sich gegenseitig ihre convexen Seiten zukehren oder nicht, den Summen oder den Differenzen der Winkel α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1, welche die gleichnamigen Seiten mit den Verlängerungen der vorhergehenden bilden, gleich sein.

Digitized by Google

Unter den vielen Fällen, welche auf der Unterscheidung des Convexen und Concaven in den beiden Polygonstücken beruhen, kommen hier vorzüglich folgende in Betracht:

a) Alle Winkel α, β, γ, δ von $\mathfrak{B}$ sind grösser (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen Winkel von $\mathfrak{B}_1$: und dann ist es für das Endresultat einerlei, ob die convexen Ecken von $\mathfrak{B}$ durchweg den convexen, durchweg den concaven, oder aber theils den convexen, theils den concaven Ecken von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt werden.

b) Sämmtliche Winkel α, β, γ, δ sind kleiner (oder doch nur einzelne eben so gross) als die gleichnamigen von $\mathfrak{B}_1$, und es kommt die Bedingung hinzu, dass die convexen Ecken von $\mathfrak{B}_1$ entweder durchweg den convexen oder durchweg den concaven Ecken von $\mathfrak{B}$ zugekehrt seien.

c) Beide Polygonstücke sind congruent.

Bezeichnet man nämlich die Länge der vom Punkte P beschriebenen Curve, jenachdem $\mathfrak{B}$ von der einen oder von der anderen Seite auf $\mathfrak{B}_1$ rollt, das eine Mal durch W und das andere Mal durch W_0, und bedenkt, dass diese beiden Fälle sich durch die additive und subtraktive Lage der gleichnamigen Winkel unterscheiden, so erhält man für W und W_0 nothwendig zwei Gleichungen von folgender gegenseitiger Beziehung, nämlich im Falle

$$a)\quad \begin{aligned} W &= a(\alpha \pm \alpha_1) + b(\beta \pm \beta_1) + c(\gamma \mp \gamma_1) + d(\delta \pm \delta_1);\\ W_0 &= a(\alpha \mp \alpha_1) + b(\beta \mp \beta_1) + c(\gamma \pm \gamma_1) + d(\delta \mp \delta_1); \end{aligned}$$

und hieraus die dritte:

$$W + W_0 = 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) = 2\Sigma(a\alpha):$$

$$b)\quad \begin{aligned} W &= a(\alpha_1 + \alpha) + b(\beta_1 + \beta) + c(\gamma_1 + \gamma) + d(\delta_1 + \delta);\\ W_0 &= a(\alpha_1 - \alpha) + b(\beta_1 - \beta) + c(\gamma_1 - \gamma) + d(\delta_1 - \delta):\\ W - W_0 &= 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) = 2\Sigma(a\alpha); \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} W &= 2(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta);\\ W_0 &= 0;\\ W \pm W_0 &= 2\Sigma(a\alpha). \end{aligned}$$

Da nun die Grössen $\Sigma(a\alpha)$ und $\Sigma(a \sin \alpha)$ der Gleichheit um so näher kommen, je kleiner die Bogen α, β, γ, δ werden, so erhält man folgenden Satz, aus welchem man mit Leichtigkeit noch eine Reihe anderer Sätze wird ableiten können:

Lehrsatz 17.

Haben zwei Polygonstücke $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ paarweise und in derselben Ordnung gleiche Seiten, und rollt das erstere auf der einen Seite des andern, so beschreibt ein jeder mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ fest verbundene Punkt P

Digitized by Google

eine krumme Linie W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere krumme Linie W_0. Sind nun *a*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ kleiner als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$, oder doch nur einzeln denselben gleich, so nähert sich die Summe der Längen von W und W_0 um so mehr der doppelten Länge des Fusspunkten-Vielecks des Punktes P in Bezug auf das Polygonstück $\mathfrak{B}$, je kleiner die Nebenwinkel aller jener hohlen Winkel werden. Sind dagegen *b*) alle hohlen Winkel von $\mathfrak{B}$ grösser als die ihnen entsprechenden hohlen Winkel von $\mathfrak{B}_1$ oder doch nur einzeln denselben gleich, und sind bei der Erzeugung von W immer nur die convexen Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$, und bei der Erzeugung von W_0 immer nur die concaven Winkel von $\mathfrak{B}$ den convexen von $\mathfrak{B}_1$ zugekehrt, so gilt das nämliche nicht von der Summe, sondern von dem Unterschiede jener Längen. Sind endlich *c*) beide Polygonstücke congruent, so gilt diess von der Länge der einen Curve selbst, und die andere verschwindet.

Lehrsatz 18.

A) Rollt eine beliebige Curve (oder ein Curvenstück) $\mathfrak{B}$ auf der einen Seite einer anderen beliebigen Curve $\mathfrak{B}_1$, so beschreibt ein jeder, mit der Ebene von $\mathfrak{B}$ festverbundene Punkt P eine neue Curve W; und rollt $\mathfrak{B}$ auf der anderen Seite von $\mathfrak{B}_1$ so, dass immer wieder dieselben Punkte beider Curven wie das erste Mal zusammentreffen, so beschreibt derselbe Punkt P eine andere Curve W_0. Ist nun *a*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten stärker gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, so ist die Summe der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die Länge der Fusspunkten-Curve des Punktes P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{B}$; ist aber *b*) die Curve $\mathfrak{B}$ in allen ihren Punkten schwächer gekrümmt, als die Curve $\mathfrak{B}_1$ in den entsprechenden Punkten, und ist bei der Erzeugung der beiden Curven W und W_0 das eine Mal der convexen Seite von $\mathfrak{B}_1$ durchweg die convexe, das andere Mal durchweg die concave Seite von $\mathfrak{B}$ zugekehrt, so ist der Unterschied der Längen von W und W_0 doppelt so gross als die jener Fusspunkten-Curve. Sind endlich *c*) beide Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ congruent, so gilt das nämliche von der Länge der einen Curve W selbst, und die andere W_0 verschwindet. Uebrigens gilt das in *a*) und *b*) Ausgesagte auch noch, wenn die Krümmungen der Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in einzelnen Punktenpaaren einander gleich sind.

B) Die Längen derjenigen Curven W und W_0 bilden unter allen die grösste Summe oder Differenz, welche vom Punkte der kleinsten Entfernung in Bezug auf die mit den reciproken Werthen ihrer Krümungshalbmesser

Digitized by Google

behafteten Punkte der rollenden Curve $\mathfrak{B}$ beschrieben werden.

C) Und jene Summe oder Differenz wird um so grösser, je weiter der beschreibende Punkt P über diejenige Kreislinie hinaus liegt, welche um den genannten Punkt der kleinsten Entfernung, als Mittelpunkt, durch den von ihm entferntesten Punkt der Curve $\mathfrak{B}$ gelegt wird.

Lehrsatz 19.

A) Die Epicykloide und die von dem nämlichen Punkte beschriebene Hypocykloide sind zusammen doppelt so lang als die Fusspunkten-Curve jenes Punktes in Bezug auf den erzeugenden Kreis, wenn der letztere kleiner als die Basis ist; dagegen ist die Epicykloide um die doppelte Länge dieser Curve grösser als die Hypocykloide, wenn der erzeugende Kreis grösser als die Basis ist; und sind diese beiden letzteren einander gleich, so ist die Epicykloide doppelt so lang als jene Fusspunkten-Curve — es mag nun die ganze Basis oder nur ein bestimmter Theil derselben von einem bestimmten Theile des erzeugenden Kreises durchrollt werden.

B) Die Summe oder Differenz der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche vom Mittelpunkte des erzeugenden Kreises auf einerlei Basis beschrieben werden, ist doppelt so gross als diese Basis, und ist die letztere dem ganzen Umfange des erzeugenden Kreises gleich, so ist die Summe oder der Unterschied der Längen der Epicykloide und Hypocykloide, welche von irgend einem anderen Punkte beschrieben werden, grösser als die doppelte Basis.

Anmerkung. Im Falle *B*) sind die Epicykloide und Hypocykloide selber Kreise oder Kreisbogen: ist nämlich der Halbmesser der Basis $=r$, der des erzeugenden Kreises $=\varrho$, so ist der der Epicykloide $W=r+\varrho$ und der der Hypocykloide, wenn $r>\varrho$, $=r-\varrho$, und wenn $r<\varrho$, $=\varrho-r$. Ist nun $2q r\pi$ der durchrollte Theil der Basis, wo $q \gtreqless 1$, so verhält sich, wenn $r>\varrho$:

$$W : 2(r+\varrho)\pi = 2qr\pi : 2r\pi;$$
$$W_0 : 2(r-\varrho)\pi = 2qr\pi : 2r\pi;$$

also

$$W + W_0 = 2q(r+\varrho)\pi + 2q(r-\varrho)\pi = 4qr\pi.$$

Ist aber $r<\varrho$, so ist

$$W - W_0 = 2q(r+\varrho)\pi - 2q(\varrho-r)\pi = 4qr\pi;$$

Digitized by Google

in beiden Fällen also erhält man das Doppelte der Basis oder, was einerlei ist, das Doppelte des erzeugenden Kreisbogens.

Lehrsatz 20.

Rollt ein Bogen eines Kegelschnittes nacheinander auf beiden Seiten eines eben so langen Bogens einer beliebigen Curve, so beschreibt ein jeder Brennpunkt des Kegelschnitts zwei Curven, deren Summe oder Unterschied eine bestimmte, von der Basis unabhängige Grösse hat, jenachdem der erste Bogen durchweg stärker oder schwächer als der zweite gekrümmt ist, vorausgesetzt, dass im zweiten Falle die Basis keinen Wendungspunkt besitzt. Diese Grösse ist nämlich im Falle der Parabel die Projektion ihres Bogens auf eine zur Achse senkrechte Gerade, und im Falle der Ellipse und Hyperbel ein Kreisbogen, welcher die halbe Hauptachse zum Halbmesser und das Doppelte des Winkels, unter welchem jener Bogen vom anderen Brennpunkte aus gesehen wird, zum Centriwinkel hat.

Lehrsatz 21.

Rollt ein Kegelschnitt auf einem demselben congruenten Kegelschnitte, indem immer zwei entsprechende Punkte zusammentreffen, so hat 1) unter allen Punkten in der Ebene des ersten sein Mittelpunkt die geringste Geschwindigkeit; 2) verhalten sich die Geschwindigkeiten, mit welchen sich ein Brennpunkt in der Ebene der Basis bewegt, ebenso wie die Geschwindigkeiten, mit welchen im Falle der Parabel die mit der Achse parallele Gerade, im Falle der Ellipse und Hyperbel die Zuglinie des anderen Brennpunktes den Berührungspunkt beider Kegelschnitte in der Ebene des erzeugenden begleitet.

Digitized by Google

XVI.

Ueber einen Satz der analytischen Geometrie.

Von

dem Herausgeber.

I.

Jedermann kennt die elegante und in der Anwendung so fruchtbare Formel, durch welche der Cosinus des zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkels, den zwei von dem Anfange eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume ausgehende gerade Linien mit einander einschliessen, durch die Cosinus der von diesen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, ebenfalls zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel ausgedrückt wird. Sind nämlich α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die von den beiden Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel, und bezeichnen wir den von diesen beiden Linien mit einander eingeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so ist bekanntlich

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Es scheint mir interessant zu sein, diesen in der vorhergehenden Form auf rechtwinklige Coordinaten eingeschränkten Satz auf beliebige schiefwinklige Coordinatensysteme zu erweitern, oder vielmehr die der vorhergehenden entsprechende allgemeine Gleichung für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem aufzusuchen, unter welcher die vorhergehende Gleichung als ein besonderer Fall enthalten ist, und aus der dieselbe hervorgehen muss, wenn man das beliebige schiefwinklige System rechtwinklig annimmt. Diese allgemeine Gleichung werde ich in der vorliegenden Abhandlung auf eine von andern nicht ganz allgemein bekannten Untersuchungen möglichst unabhängige und völlig elementare Weise zu entwickeln versuchen, und werde dann auch zeigen, dass sich aus derselben mit grosser Leichtigkeit ein anderer ebenfalls sehr bemerkenswerther Satz ableiten lässt, welchen Cauchy auf eine von der hier gegebenen Entwickelung völlig verschiedene Weise

Digitized by Google

in der neuesten bis jetzt erschienenen Lieferung seiner Exercices d'Analyse et de Physique mathématique *) bewiesen hat, bemerke aber, dass ich die in Rede stehende allgemeine, von Cauchy a. a. O. nicht entwickelte und wohl auch überhaupt sonst noch nicht bekannte Gleichung als den Hauptgegenstand dieser Abhandlung betrachtet zu sehen wünsche.

II.

In Taf. III. Fig. 7. sei O der Anfang eines beliebigen Coordinatensystems im Raume und $OK=\varrho$ eine von demselben ausgehende gerade Linie, welche mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z respective die 180^0 nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst. Die Coordinaten des Punktes K seien x, y, z. Sind nun OX, OY, OZ die Theile der drei Coordinatenaxen, welche den körperlichen Winkel einschliessen, in dem die Linie OK liegt, so beschreibe man über denselben als Kanten von unbestimmter Länge und mit der ihrer Länge nach bestimmten Linie OK als Diagonale ein Parallelepipedon, wie aus der Figur ohne weitere Erläuterung ersichtlich ist. Denken wir uns dann noch die in der Figur nicht gezeichnete Linie AK gezogen, so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze in dem Dreiecke OAK:

$$1)\quad AK^2 = OK^2 + OA^2 - 2OK.OA.\cos AOK,$$

und nach demselben Satze ist offenbar

$$2)\quad AK^2 = OB^2 + OC^2 + 2OB.OC.\cos YOZ.$$

Nun ist aber, wie sogleich in die Augen fällt, entweder

$$OA = +x,\ \angle AOK = \alpha$$

oder

$$OA = -x,\ \angle AOK = 180^0 - \alpha,$$

und folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x,\ \cos AOK = \pm\cos\alpha;$$

also immer

$$OA.\cos AOK = x\cos\alpha;$$

folglich nach 1) in völliger Allgemeinheit:

$$3)\quad AK^2 = \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha.$$

Ferner ist, wobei die Bedeutung des Symbols (yz) als bekannt

*) Tome troisième. 1843. 29. Livraison. Paris. 1845. p. 137.

Digitized by Google

vorausgesetzt werden kann, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander entweder

$$OB = \pm y, \quad OC = \pm z, \quad \angle YOZ = (yz)$$

oder

$$OB = \pm y, \quad OC = \mp z, \quad \angle YOZ = 180^0 - (yz);$$

d. i. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OB.OC = \pm yz, \quad \cos YOZ = \pm \cos(yz);$$

also immer

$$OB.OC.\cos YOZ = yz\cos(yz);$$

folglich nach 2) in völliger Allgemeinheit:

$$4) \quad AK^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) ergiebt sich also jetzt die völlig allgemein gültige Gleichung:

$$5) \quad \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz).$$

Vertauscht man nun aber in dieser Gleichung die Zeichen gehörig, so erhält man überhaupt die drei folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$6) \quad \begin{cases} \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x\cos\alpha = y^2 + z^2 + 2yz\cos(yz), \\ \varrho^2 + y^2 - 2\varrho y\cos\beta = z^2 + x^2 + 2zx\cos(zx), \\ \varrho^2 + z^2 - 2\varrho z\cos\gamma = x^2 + y^2 + 2xy\cos(xy). \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$7) \quad 3\varrho^2 - 2\varrho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx).$$

Denkt man sich jetzt in der Figur von den Punkten C und D auf die Linie OK Perpendikel gefällt, und bezeichnet deren Fusspunkte durch C' und D', so ist

$$8) \quad OK = KD' + C'D' + OC'.$$

Jenachdem nun $OA = +x$ oder $OA = -x$ ist, ist offenbar $\angle XOK = \alpha$ oder $\angle XOK = 180^0 - \alpha$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OA = \pm x, \quad \cos XOK = \pm\cos\alpha;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$KD' = OA.\cos XOK = x\cos\alpha.$$

Digitized by Google

Denkt man sich durch CC' und DD' zwei auf OK senkrecht stehende Ebenen gelegt, und zwischen denselben von C' aus eine der Linie OB parallele Linie $C'D''$ gezogen, so ist offenbar $C'D''=OB$, und, jenachdem $OB=+y$ oder $OB=-y$ ist, ist $\angle D'C'D''=\angle YOK=\beta$ oder $\angle D'C'D''=\angle YOK=180^0-\beta$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OB=\pm y,\ \cos D'C'D''=\cos YOK=\pm\cos\beta;$$

also ist, weil das Dreieck $C'D'D''$ offenbar bei D' rechtwinklig ist, in völliger Allgemeinheit

$$C'D'=OB.\cos YOK=y\cos\beta.$$

Jenachdem endlich $OC=+z$ oder $OC=-z$ ist, ist offenbar $\angle ZOK=\gamma$ oder $\angle ZOK=180^0-\gamma$, d. h. es ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$OC=\pm z,\ \cos ZOK=\pm\cos\gamma;$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$OC'=OC.\cos ZOK=z\cos\gamma.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke von KD', $C'D'$, OC' in die Gleichung 8) ein, und setzt zugleich $OK=\varrho$, so erhält man die Gleichung

$$9)\quad \varrho=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Diese Gleichung führt aber in Verbindung mit der Gleichung 7) auf der Stelle zu der Gleichung

$$10)\quad \varrho^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx).$$

Sind jetzt x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten zweier beliebigen Punkte im Raume, deren Entfernung von einander durch E bezeichnet werden mag, so lege man durch den ersten dieser beiden Punkte als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem, und bezeichne die Coordinaten des zweiten der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf dieses neue System durch x', y', z'; so ist nach den einfachsten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$x_1=x+x',\ y_1=y+y',\ z_1=z+z';$$

also

$$x'=x_1-x,\ y'=y_1-y,\ z'=z_1-z.$$

Nun ist aber nach 10) offenbar

$$E^2=x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(xy)+2y'z'\cos(yz)+2z'x'\cos(zx),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

Digitized by Google

$$11)\quad E^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 + 2(x_1-x)(y_1-y)\cos(xy) + 2(y_1-y)(z_1-z)\cos(yz) + 2(z_1-z)(x_1-x)\cos(zx)$$

oder

$$12)\quad E^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + 2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy) + 2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz) + 2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx).$$

Führt man den Ausdruck von ϱ^2 aus 10) in eine jede der drei Gleichungen 6) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die drei folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} \varrho\cos\alpha = x + y\cos(xy) + z\cos(zx), \\ \varrho\cos\beta = y + z\cos(yz) + x\cos(xy), \\ \varrho\cos\gamma = z + x\cos(zx) + y\cos(yz); \end{cases}$$

und wenn man nun aus diesen drei Gleichungen auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination x, y, z bestimmt; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$14)\quad \begin{cases} K = \cos\alpha\sin^2(yz) - \cos\beta\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\} \\ \qquad\qquad - \cos\gamma\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}, \\ L = \cos\beta\sin^2(zx) - \cos\gamma\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \\ \qquad\qquad - \cos\alpha\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}, \\ M = \cos\gamma\sin^2(xy) - \cos\alpha\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\} \\ \qquad\qquad - \cos\beta\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \end{cases}$$

und

$$15)\quad N = 1 - \cos^2(xy) - \cos^2(yz) - \cos^2(zx) + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx)$$

gesetzt wird:

$$16)\quad x = \frac{K}{N}\varrho,\quad y = \frac{L}{N}\varrho,\quad z = \frac{M}{N}\varrho.$$

Es ist auch, wie man leicht findet:

$$17)\quad \begin{aligned} N &= \sin^2(yz)\sin^2(zx) - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}^2 \\ &= \sin^2(zx)\sin^2(xy) - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}^2 \\ &= \sin^2(xy)\sin^2(yz) - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}^2. \end{aligned}$$

Zerlegt man aber jede dieser Differenzen zweier Quadrate

Digitized by Google

auf bekannte Weise in Factoren, so erhält man mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Formeln auch:

$$18)\quad N = 4\sin\tfrac{1}{4}\{(xy)+(yz)+(zx)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(yz)+(zx)-(xy)\}$$
$$\times\sin\tfrac{1}{2}\{(xy)+(zx)-(yz)\}\sin\tfrac{1}{4}\{(xy)+(yz)-(zx)\}.$$

III.

Wir wollen uns nun zwei von dem Anfange der Coordinaten ausgehende gerade Linien denken, und den von denselben eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, die von diesen Linien mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, ebenfalls 180^0 nicht übersteigenden Winkel aber durch α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 bezeichnen. In jeder dieser beiden Linien nehmen wir einen beliebigen Punkt an, und bezeichnen die Entfernungen dieser beiden Punkte von dem Anfange der Coordinaten durch ϱ und ϱ_1, ihre Entfernung von einander aber durch E; so ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$19)\quad E^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\Theta.$$

Bezeichnen wir aber die Coordinaten der beiden in Rede stehenden Punkte durch x, y, z und x_1, y_1, z_1; so ist nach 10) und 12)

$$\varrho^2 = x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx),$$
$$\varrho_1{}^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)$$

und

$$\begin{aligned}E^2 = {} & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z-z_1)^2\\ & +2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\ & +2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\ & +2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx);\end{aligned}$$

also nach 19):

$$\begin{aligned}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\\ &+2(x-x_1)(y-y_1)\cos(xy)\\ &+2(y-y_1)(z-z_1)\cos(yz)\\ &+2(z-z_1)(x-x_1)\cos(zx)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}= {} & x^2+y^2+z^2+2xy\cos(xy)+2yz\cos(yz)+2zx\cos(zx)\\ & +x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2x_1y_1\cos(xy)+2y_1z_1\cos(yz)+2z_1x_1\cos(zx)\\ & -2\varrho\varrho_1\cos\Theta,\end{aligned}$$

oder, wie man hieraus, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, leicht findet:

$$20)\quad \varrho\varrho_1\cos\Theta = xx_1+yy_1+zz_1+(xy_1+yx_1)\cos(xy)+(yz_1+zy_1)\cos(yz)+(zx_1+xz_1)\cos(zx).$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$21)\quad P=\sin^2(xy),\ Q=\sin^2(yz),\ R=\sin^2(zx)$$

und

$$22)\quad \begin{cases} P_1 = \cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx), \\ Q_1 = \cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy), \\ R_1 = \cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz); \end{cases}$$

so ist nach 16)

$$x=\frac{Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma}{N}\varrho,$$

$$y=\frac{R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha}{N}\varrho,$$

$$z=\frac{P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta}{N}\varrho$$

und

$$x_1=\frac{Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1}{N}\varrho_1,$$

$$y_1=\frac{R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1}{N}\varrho_1,$$

$$z_1=\frac{P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1}{N}\varrho_1$$

Also ist nach 20):

$$23)\quad NN\cos\Theta =$$
$$(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1)$$
$$+(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1)$$
$$+(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1)\\+(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1)\end{matrix}\right\}\cos(xy)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(R\cos\beta-Q_1\cos\gamma-P_1\cos\alpha)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1)\\+(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(R\cos\beta_1-Q_1\cos\gamma_1-P_1\cos\alpha_1)\end{matrix}\right\}\cos(yz)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(P\cos\gamma-R_1\cos\alpha-Q_1\cos\beta)(Q\cos\alpha_1-P_1\cos\beta_1-R_1\cos\gamma_1)\\+(Q\cos\alpha-P_1\cos\beta-R_1\cos\gamma)(P\cos\gamma_1-R_1\cos\alpha_1-Q_1\cos\beta_1)\end{matrix}\right\}\cos(zx),$$

Digitized by Google

oder, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$
\begin{aligned}
24)\quad NN\cos\Theta = {} & \left.\begin{aligned} & QQ + P_1P_1 + R_1R_1 \\ & -2QP_1\cos(xy) \\ & +2P_1R_1\cos(yz) \\ & -2R_1Q\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\alpha\cos\alpha_1 \\
& + \left.\begin{aligned} & RR + Q_1Q_1 + P_1P_1 \\ & -2RP_1\cos(xy) \\ & -2Q_1R\cos(yz) \\ & +2P_1Q_1\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\beta\cos\beta_1 \\
& + \left.\begin{aligned} & PP + R_1R_1 + Q_1Q_1 \\ & +2Q_1R_1\cos(xy) \\ & -2PQ_1\cos(yz) \\ & -2R_1P\cos(zx) \end{aligned}\right\} \cos\gamma\cos\gamma_1 \\
& - \left.\begin{aligned} & ((Q+R)P_1 - Q_1R_1) \\ & -(QR+P_1P_1)\cos(xy) \\ & -(P_1Q_1-RR_1)\cos(yz) \\ & -(R_1P_1-QQ_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) \\
& - \left.\begin{aligned} & ((R+P)Q_1 - R_1P_1) \\ & -(P_1Q_1-RR_1)\cos(xy) \\ & -(RP+Q_1Q_1)\cos(yz) \\ & -(Q_1R_1-PP_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) \\
& - \left.\begin{aligned} & ((P+Q)R_1 - P_1Q_1) \\ & -(R_1P_1-QQ_1)\cos(xy) \\ & -(Q_1R_1-PP_1)\cos(yz) \\ & -(PQ+R_1R_1)\cos(zx) \end{aligned}\right\} (\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
25)\quad NN\cos\Theta = {} & A\cos\alpha\cos\alpha_1 \\
& + B\cos\beta\cos\beta_1 \\
& + C\cos\gamma\cos\gamma_1 \\
& + D(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1) \\
& + E(\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\gamma\cos\beta_1) \\
& + F(\cos\gamma\cos\alpha_1 + \cos\alpha\cos\gamma_1),
\end{aligned}
$$

wo die Bedeutung von

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$$

von selbst erhellen wird; so ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\begin{aligned}
A &= N\sin^2(yz),\\
B &= N\sin^2(zx),\\
C &= N\sin^2(xy),\\
D &= -N\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\},\\
E &= -N\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\},\\
F &= -N\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\};
\end{aligned}$$

und nach 25) erhält man also für $N\cos\Theta$, wo immer N seine aus dem Obigen bekannte Bedeutung hat, den folgenden merkwürdigen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
26)\quad N\cos\Theta = {} & \sin^2(yz)\cos\alpha\cos\alpha_1\\
& +\sin^2(zx)\cos\beta\cos\beta_1\\
& +\sin^2(xy)\cos\gamma\cos\gamma_1\\
& -\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\}(\cos\alpha\cos\beta_1+\cos\beta\cos\alpha_1)\\
& -\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\}(\cos\beta\cos\gamma_1+\cos\gamma\cos\beta_1)\\
& -\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}(\cos\gamma\cos\alpha_1+\cos\alpha\cos\gamma_1).
\end{aligned}$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist

$$(xy)=(yz)=(zx)=90^0,$$

also nach dem Obigen offenbar $N=1$, und folglich nach 26):

$$27)\quad \cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1,$$

welches die bekannte Formel ist, deren schon oben in der Einleitung Erwähnung gethan worden ist.

IV.

Zu dem im Vorhergehenden betrachteten Coordinatensysteme der xyz wollen wir nun ein zweites Coordinatensystem der $x'y'z'$ mit demselben Anfangspunkte fügen, dessen Axen auf den Coordinatenebenen des ersten Systems, nämlich die Axe der

$$x',\ y',\ z'$$

respective auf der Ebene der

$$yz,\ zx,\ xy,$$

senkrecht stehen, und wollen die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte ausgehenden beiden Linien mit den positiven Theilen der Axen der x', y', z' einschliessen, durch α', β', γ' und α'_1, β'_1, γ'_1 bezeichnen.

Digitized by Google

Dies vorausgesetzt, ist offenbar nach 26):

$$
\begin{aligned}
N\cos\alpha'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xx')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yx')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zx')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xx')\cos\beta_1 + \cos(yx')\cos\alpha_1)\} \\
& - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yx')\cos\gamma_1 + \cos(zx')\cos\beta_1)\} \\
& - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zx')\cos\alpha_1 + \cos(xx')\cos\gamma_1)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\cos\beta'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yy')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zy')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xy')\cos\beta_1 + \cos(yy')\cos\alpha_1\} \\
& - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yy')\cos\gamma_1 + \cos(zy')\cos\beta_1\} \\
& - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zy')\cos\alpha_1 + \cos(xy')\cos\gamma_1\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\cos\gamma'_1 = {} & \sin^2(yz)\cos(xy')\cos\alpha_1 \\
& + \sin^2(zx)\cos(yz')\cos\beta_1 \\
& + \sin^2(xy)\cos(zz')\cos\gamma_1 \\
& - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}\{\cos(xz')\cos\beta_1 + \cos(yz')\cos\alpha_1\} \\
& - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}\{\cos(yz')\cos\gamma_1 + \cos(zz')\cos\beta_1\} \\
& - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}\{\cos(zz')\cos\alpha_1 + \cos(xz')\cos\gamma_1\}.
\end{aligned}
$$

Nach der Voraussetzung sind aber die Winkel

$$(yx'),\ (zx');\ (zy'),\ (xy');\ (xz'),\ (yz')$$

sämmtlich rechte Winkel, und die drei obigen Gleichungen nehmen daher die folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
N\frac{\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} = {} & \sin^2(yz)\cos\alpha_1 - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}\cos\beta_1 \\
& - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}\cos\gamma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\frac{\cos\beta'_1}{\cos(yy')} = {} & \sin^2(zx)\cos\beta_1 - \{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\}\cos\alpha_1 \\
& - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}\cos\gamma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\frac{\cos\gamma'_1}{\cos(zz')} = {} & \sin^2(xy)\cos\gamma_1 - \{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\}\cos\beta_1 \\
& - \{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\}\cos\alpha_1.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Weil nun nach 26)

$$N\cos\Theta$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \cos\alpha\,\{\sin^2(yz)\cos\alpha_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\gamma_1\} \\
+ \quad & \cos\beta\,\{\sin^2(zx)\cos\beta_1 - (\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx))\cos\alpha_1 \\
& \qquad - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\gamma_1\} \\
+ \quad & \cos\gamma\,\{\sin^2(xy)\cos\gamma_1 - (\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy))\cos\beta_1 \\
& \qquad - (\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz))\cos\alpha_1\}
\end{aligned}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$28)\quad \cos\Theta = \frac{\cos\alpha\cos\alpha'_1}{\cos(xx')} + \frac{\cos\beta\cos\beta'_1}{\cos(yy')} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'_1}{\cos(zz')}.$$

Bezeichnet man die beiden Linien durch ϱ und ϱ', so kann man diese Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$29)\quad \cos(\varrho\varrho') = \frac{\cos(\varrho x)\cos(\varrho' x')}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y)\cos(\varrho' y')}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z)\cos(\varrho' z')}{\cos(zz')}.$$

Weil nach bekannten stereometrischen Sätzen auch die Axen der

$$x,\ y,\ z$$

respective auf den Ebenen der

$$y'z',\ z'x',\ x'y'$$

senkrecht stehen, so kann man in der vorhergehenden Gleichung die gleichnamigen Axen der beiden Systeme mit einander verwechseln, wodurch man die Gleichung

$$30)\quad \cos(\varrho\varrho') = \frac{\cos(\varrho x')\cos(\varrho' x)}{\cos(xx')} + \frac{\cos(\varrho y')\cos(\varrho' y)}{\cos(yy')} + \frac{\cos(\varrho z')\cos(\varrho' z)}{\cos(zz')}$$

erhält.

Ist das System der xyz, und also natürlich auch das System der $x'y'z'$ rechtwinklig, so kann man offenbar immer annehmen, dass die positiven Theile der Axen der x', y', z' respective mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z zusammenfallen, und es ist dann

$$(xx') = (yy') = (zz') = 0$$

und

$$(\varrho' x') = (\varrho' x),\ (\varrho' y') = (\varrho' y),\ (\varrho' z') = (\varrho' z);$$

Digitized by Google

also nach 29):

$$31)\quad \cos(\varrho\varrho') = \cos(\varrho x)\cos(\varrho' x) + \cos(\varrho y)\cos(\varrho' y) + \cos(\varrho z)\cos(\varrho' z),$$

welches wieder die Gleichung 27) ist.

In den Gleichungen 29) und 30) ist der in der Einleitung erwähnte, von Cauchy a. a. O. auf eine ganz andere Art bewiesene Satz enthalten. Unser Hauptzweck bei der vorliegenden Abhandlung war aber, wie schon erinnert worden ist, die Entwickelung der allgemeinen Gleichung 26), von welcher die bekannte Gleichung 27) ein besonderer Fall ist.

XVII.

Ueber die Schwingungen eines kleinen Körpers, der an einem elastischen Körper befestigt ist.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die Abhandlung Nro. XXVI. im 7ten Bande des Archivs erinnerte mich an eine frühere Arbeit, die ich hier vorlegen will. Sie behandelt die Bewegung eines kleinen Körpers, der z. B. am einen Ende eines elastischen Schraubendrahtes befestigt ist. Wird ein solcher Draht ausgedehnt oder zusammengedrückt, so geräth der daran befestigte Körper in eine hin- und hergehende Bewegung um den Punkt seiner Ruhe herum. Diese Bewegung ist hervorgebracht durch die Kraft der Elastizität, von der man hier annimmt, sie wirke wie eine von dem Punkte, in welchem das Ende des freien Drahtes für den Fall der Ruhe ist, ausgehende und im Verhältniss der Entfernung wirkende anziehende Kraft. Unter diesen Voraussetzungen werden folgende Aufgaben leicht verstanden werden. Es wird natürlich dabei vorausgesetzt, dass das andere Ende des Drahtes festgemacht sei; der feste Punkt aber,

Digitized by Google

von dem im Folgenden die Rede ist, ist der Punkt, in welchem das freie Ende des Drahtes sich befindet, wenn der Draht unbelastet in Ruhe ist.

§. 1.

Ein Körper, dessen Gewicht (in Kilog.) p sei, ist einer im direkten Verhältniss der Entfernung wirkenden Kraft unterworfen, die von einem festen Punkte ausgeht; welches ist seine Bewegung?

Sei in untenstehender Figur

A der feste Punkt, B der Ausgangspunkt des Körpers, Q seine Stelle am Ende der Zeit t, und $AQ=x$, so hat man offenbar:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{gex}{p},$$

wenn g die bekannte Beschleunigung durch die Schwere, e eine konstante Grösse ist, die von der Beschaffenheit des Drahtes abhängt. Hieraus folgt zunächst:

$$2\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{2gex}{p}\cdot\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = -\frac{gex^2}{p} + C = v^2.$$

Ist nun $AB = a$, so ist v (die Geschwindigkeit) für $x=a$ Null, also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{ge}{p}(a^2 - x^2) = v^2. \qquad (1)$$

Aus (1) folgt

$$-\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{eg}{p}}\cdot\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\partial t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = -\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = C - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Da, für $x=a$, $t=0$, so ist

$$t\,.\,\sqrt{\frac{eg}{p}} = \frac{4n+1}{2}\pi - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right), \qquad (2)$$

worin n eine bestimmte ganze Zahl ist.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen (1) und (2) schliesst man leicht:

Der Körper bewegt sich von B bis C, wenn $AC=AB$, von B bis A mit zunehmender, von C bis A mit abnehmender Geschwindigkeit; in B und C ist seine Geschwindigkeit Null; von C bis B geht der Körper umgekehrt so, wie von B bis C u. s. f.

Die Zeit, welche verfliesst, bis der Körper, nachdem er von B ausgegangen, das erste Mal wieder dorthin zurückkommt, ist $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$; die Zeit, die er braucht von B bis C, ist die Hälfte davon. (Von C bis B ist $\arc(\sin=\frac{x}{a})$ negativ.)

In der Formel (2) ist für die erste Bewegung von B bis wieder nach B, $n=1$; für die zweite Bewegung von B bis wieder nach B, $n=2$ u. s. f.

Die Stelle, welche der Körper am Ende einer bestimmten Zeit T einnimmt, findet sich folgendermassen.

Sei $T=2n\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}+\varrho$, worin $\varrho<2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, so ist

$$T\sqrt{\frac{eg}{p}}-\frac{4n+1}{2}\pi=-\arc(\sin=\frac{x}{a}),$$

demnach

$$x=a\cos(\varrho\sqrt{\frac{eg}{p}}). \qquad (3)$$

Für $T=0$ ist $\varrho=0$, also $x=a$;

für $T=\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$ ist $\varrho=\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, also $x=-a$ u. s. f.

Die Gleichungen (1), (2), (3) bestimmen die Bewegung vollständig.

§. 2.

Die Verhältnisse seien wie im vorigen Paragraphen, nur nehmen wir den Körper auch noch als den Wirkungen der Schwerkraft unterworfen an. Es sei x vom Anziehungsmittelpunkte aus nach unten gerechnet und die ursprüngliche Entfernung von demselben wieder a (indem vorausgesetzt wird, dass die Schwingungen senkrecht auf und nieder geschehen).

Für diesen Fall ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{g}{p}(p-ex),$$

Digitized by Google

woraus wie oben

$$v^2 = \frac{g}{p}(2px - ex^2) + C.$$

Da, für $x = a$, $v = 0$, so ist

$$v^2 = \frac{g}{p}[2p(x-a) + e(a^2 - x^2)] = \frac{g}{p}(2p - ea - ex)(x-a). \qquad (1)$$

Setzt man also $2p - ae = be$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{ge}{p}(b-x)(x-a),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{ge}{p}} \cdot \sqrt{(b-x)(x-a)},$$

$$\partial t \cdot \sqrt{\frac{ge}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}},$$

$$t\sqrt{\frac{ge}{p}} = -2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right) + C,$$

und da, für $x = a$, $t = 0$ ist, so folgt daraus:

$$t\sqrt{\frac{eg}{p}} = (2n+1)\pi - 2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right), \qquad (2)$$

aus welcher Formel man x durch t ausdrücken kann.

Vor Allem muss hier bemerkt werden, dass wenn $v = 0$ für $x = a$ sein soll, der Punkt, in welchem der Körper im Anfang sein soll, tiefer sein muss, als der, in welchem die Anziehungskraft und die Schwere gleich stark wirken, für den also $ex = p$, oder $x = \frac{p}{e}$ ist, d. h. $a > \frac{p}{e}$; im andern Falle ginge der Körper nicht zurück, sondern er würde sich zuerst noch weiter vom Anziehungsmittelpunkte entfernen.

Die Geschwindigkeit ist Null für $x = a$ und für $x = b = \frac{2p}{e} - a$. Der Körper schwingt also in dem Raume von $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} - a$ hin und her; ist demnach $a < \frac{2p}{e}$, so erreicht er nie den Anziehungsmittelpunkt. Die Zeit, welche der Körper braucht, um von $x = a$ bis $x = \frac{2p}{e} - a$ zu gehen, findet sich $\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, und die, welche er braucht, um auf seine ursprüngliche Stelle zurückzugehen: $2\pi\sqrt{\frac{p}{eg}}$, ganz wie in §. 1. Der Punkt, in welchem der

Digitized by Google

Körper die grösste Geschwindigkeit hat, entspricht $x=\frac{p}{e}$; die Zeit, welche er braucht, um von $x=a$ bis $x=\frac{p}{e}$ zu gelangen, ist $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{eg}}$, also $\frac{1}{4}$ der ganzen Schwingungsdauer; zugleich liegt dieser Punkt in der Mitte zwischen den äussersten Punkten. Die Bewegung ist übrigens ähnlich wie in §. 1.

§. 3.

Sei Alles wie in §. 2., nur befinde sich der Körper im Anfange über dem Punkte $x=\frac{p}{e}$, sei also $a<\frac{p}{e}$, so findet man die gleichen Resultate in Bezug auf die Schwingungsdauer; die Bewegung ist ebenfalls die nämliche, ihre äussersten Gränzen sind $x=\frac{p}{e}$ und $x=\frac{2p}{e}-a$, wie oben, so dass §. 2. allgemein gilt.

Setzt man a negativ, so deutet diess an, dass der Körper anfänglich über dem Anziehungspunkte gewesen; die Schwingungsdauer ist die gleiche, wie so eben; der Körper oszillirt zwischen $x=-a$ und $x=\frac{2p}{e}+a$; seine grösste Geschwindigkeit hat er am nämlichen Punkte, wie so eben u. s. f.

§. 4.

Sei ein Körper, dessen Gewicht p sein soll, der Wirkung zweier anziehenden Mittelpunkte unterworfen, welche auf die angeführte Art wirken; heissen C und C' die Mittelpunkte, ist a ihre Entfernung und werden die Abszissen x gezählt von C gegen C, ist der Körper ferner im Anfange der Bewegung auf der geraden Linie, welche die beiden Anziehungsmittelpunkte verbindet, so hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{e'(a-x)-ex}{p}g,$$

wobei e' und e den beiden Mittelpunkten entsprechen, und x kleiner als a vorausgesetzt ist. Hieraus

$$v^2=\frac{2ae'x-e'x^2-ex^2}{p}g+C,$$

und wenn für $x=k(<a)$, $v=0$:

$$v^2 = \frac{g}{p}\left[2ae'(x-k) - (e+e')(x^2-k^2)\right] \qquad (1)$$

$$= \frac{g}{p}\left(2ae' - (e+e')(x+k)\right)(x-k)$$

$$= \frac{g}{p}\left(2ae' - (e+e')k - (e+e')x\right)(x-k).$$

Setzt man also

$$2ae' - (e+e')k = m(e+e'),$$

so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{g(e+e')}{p}(m-x)(x-k),$$

woraus, wie oben:

$$t\sqrt{\frac{g(e+e')}{p}} = (2n+1)\pi - 2\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{m-x}{x-k}}\right). \qquad (2)$$

Also ist die Dauer einer Oszillation (hin und her) $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$; der Körper oszillirt zwischen $x=k$ und $x=m=\frac{2ae'}{e+e'}-k$; er hat seine grösste Geschwindigkeit in $x=\frac{ae'}{e+e'}$, welcher Punkt in der Mitte liegt, und in welchem beide Mittelpunkte gleich stark wirken.

Setzt man $k=0$, $e=e'$, so geht der Körper von einem Mittelpunkte zum andern in der Zeit $\pi\sqrt{\frac{p}{2ge}}$.

§. 5.

Ein Körper vom Gewichte p sei den Wirkungen zweier senkrecht über einander liegenden Anziehungsmittelpunkte unterworfen, deren Kräfte von der mehrfach betrachteten Art sind; er befindet sich anfänglich zwischen beiden auf der Linie, welche dieselben verbindet. Sei C der untere, C' der obere Mittelpunkt der Anziehung, die x seien von C aus gegen C' gerechnet, a die Linie CC', k habe die Bedeutung des §. 3., wie e und e', endlich sei der Körper den Wirkungen der Schwere unterworfen. Hier hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{e'(a-x)-ex}{p} - 1\right)g = \frac{g}{p}(e'a - (e'+e)x - p),$$

oder, wenn zur Abkürzung $e'a - p = m$, $e'+e = r$ gesetzt wird:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g}{p}(m - rx),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{p}(2mx - rx^2) + C,$$

$$v^2 = \frac{g}{p}(2m(x-k) - r(x^2-k^2)) = \frac{g}{p}(2m - r(x+k))(x-k) \quad (1)$$

$$= (2m - rk - rx)(x-k)\frac{g}{p}.$$

Setzt man $2m - rk = rb$, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{gr}{p}(b-x)(x-k),$$

$$\partial t . \sqrt{\frac{gr}{p}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(b-x)(x-k)}},$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = C - 2 . \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right),$$

$$t\sqrt{\frac{gr}{p}} = (2n+1)\pi - 2 . \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{b-x}{x-k}}\right). \quad (2)$$

Hieraus folgt, dass die ganze Oszillationsdauer $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{gr}}$ $= 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(e+e')}}$, also gerade wie in §. 3. ist; diese ist daher die nämliche, ob man die Schwere berücksichtigt oder nicht. Der Körper schwingt zwischen den Punkten $x = k$ und $x = b = \frac{2m}{r} - k$ $= \frac{2e'a - 2p}{e+e'} - k$; seine grösste Geschwindigheit hat er im Punkte $x = \frac{m}{r} = \frac{e'a - p}{e'+e}$, der in der Mitte liegt.

Wir schliessen demnach aus dem Obigen, dass die Oszillationsdauer durchaus die nämliche ist, ob man die Wirkung der Schwerkraft beachtet oder nicht; es hat dieselbe bloss Einfluss auf die Amplitude der Schwingung.

Digitized by Google

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn Δ den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC bezeichnet, und A', B', C' beliebige Punkte in den Seiten BC, CA, AB oder deren Verlängerungen sind, der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ aber durch Δ' bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA' + AC'.BA'.CB'}.$$

Wie lässt sich dieser Satz beweisen und auf sphärische Dreiecke erweitern?

(The Mathematician. March. 1846.) Thomas Cotterill.

Wenn die durch den Punkt M eines Kegelschnitts gezogene Berührende die Hauptaxe AB desselben in N schneidet, und das in N auf die Hauptaxe errichtete Perpendikel von den nöthigenfalls gehörig verlängerten Sehnen AN und BN in D und E geschnitten wird, so ist immer $DN = EN$.

(The Mathematician. March. 1846.) J. W. Elliott.

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen AC und BD sich in O schneiden. Durch den Punkt O ziehe man die Linien EF und GH den Seiten AB, CD und AD, BC des Parallelogramms $ABCD$ parallel. Nimmt man dann in EF einen beliebigen Punkt E' an, zieht die Linien AE' und DE', welche die Linie GH in G' und H' schneiden, und hierauf die Linien BG' und CH', so gehen diese beiden Linien durch denselben Punkt F' der Linie EF, und das Viereck $EFG'H'$ ist ein Parallelogramm.

(The Mathematician. March. 1846.) Fenwick.

Einen Bogen eines gegebenen Kreises so zu bestimmen, dass der Unterschied zwischen seiner Sehne und der Sehne seiner Hälfte ein Maximum ist.

(The Mathematician. March. 1846.) Matthew Collins.

Digitized by Google

Von dem Herrn Oberlehrer Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt.

1. Berühren drei Seiten AB, BC, CD eines einem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ einen zweiten, mit dem ersteren concentrischen Kreis, und verbindet man eine der beiden Ecken B, C, wo diese drei Seiten paarweise zusammenstossen, z. B. C, mit dem Berührungspunkte der dritten Seite AB durch eine Gerade, so wird letztere von der Geraden, welche den ersten Kreis in der anderen Ecke B berührt, und von der vierten Seite des Vierecks in einem und demselben Punkte geschnitten.

2. Liegen drei Ecken A, B, C eines einem Kreise umschriebenen Vierecks $ABCD$ auf dem Umfange eines mit demselben concentrischen Kreises, so schneidet eine jede der beiden Seiten AB, BC, welche zwei dieser Ecken verbinden, z. B AB, die Gerade, welche den zweiten Kreis in der dritten Ecke C berührt, in einem Punkte, welcher mit dem Berührungspunkte der anderen Seite BC und mit der vierten Ecke des Vierecks in einer und derselben geraden Linie liegt.

3. Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt um ein Quadrat, dass seine Schenkel fortwährend zwei benachbarte Ecken des letzteren berühren, so dreht sich die Halbirungslinie desselben um den Mittelpunkt des Quadrats.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

Man hat für jedes ganze, positive m und r:

$$\frac{(m+1).1.2.3\ldots(r-2)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}\left[1+\frac{m+r}{r-2}+\frac{(m+r)(m+r-1)}{(r-2)(r-3)}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{(m+r)(m+r-1)\ldots(m+3)}{(r-2)(r-3)\ldots1}\right]=1-\frac{1.2\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

II.

$$\frac{2p.(2p-2)\ldots2}{(2p+1)(2p-1)\ldots3}=1-\tfrac{1}{3}p+\tfrac{1}{5}\frac{p(p-1)}{1.2}-\tfrac{1}{7}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^p.1}{2p+1},$$

wenn p eine ganze, positive Zahl ist.

Digitized by Google

III.

$$(-1)^p \frac{2.4.6...2p}{1.3.5...(p+1)}.2^{2p} = \frac{1}{2p+1} - \frac{2p+1}{1}.\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p-3}.\frac{(2p+1)2p}{1.2} - \ldots$$
$$\ldots (-1)^p \frac{(2p+1)2p \ldots (p+2)}{1.2.3...p},$$

wenn p eine ganze, positive Zahl ist.

IV.

Setzt man

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1.2...m} = n_m,$$

so findet man:

$$\frac{1}{n-m} n_m = \frac{1}{n} n_m + \frac{1}{n-1} (n-1)_{m-1} + \frac{1}{n-2} (n-2)_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-m+1} (n-m+1)_1 + \frac{1}{n-m},$$

was auch n sei, wenn nur m eine ganze, positive Zahl ist.

V.

$$1 - \frac{2m}{3} + \frac{2m(2m-2)}{1.3.5} - \frac{2m(2m-2)(2m-4)}{1.3.5.7} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{3.5.7...(2m+1)} = \frac{1}{2m+1},$$

wenn m eine ganze, positive Zahl ist.

VI

$$\frac{\cos\delta}{1.2} - \frac{\cos 3\delta}{3.4} + \frac{\cos 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\cos\delta}{4} \log(2(1+\cos 2\delta)) - \frac{\delta}{2} \sin\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2} - \frac{\sin 3\delta}{3.4} + \frac{\sin 5\delta}{5.6} - \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{1}{4} \log\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right) - \frac{\delta}{2} \cos\delta + \frac{\sin\delta}{4} \log(2(1+\cos 2\delta)).$$

Beide Male $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Digitized by Google

VII.

$$\frac{\cos\delta}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\cos 5\delta}{5.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\cos 7\delta}{7.8}+\ldots\ \text{in inf.}$$

$$=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\sin\delta)}}\right)+\sqrt{2\sin\delta}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)-\cos\delta.$$

$$\frac{\sin\delta}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3\delta}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin 5\delta}{5.6}+\ldots\ \text{in inf.}$$

$$=\log\left[\sqrt{1+\sin\delta}+\sqrt{\sin\delta}\right]-\sqrt{2\sin\delta}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\delta}{2}\right)+\sin\delta.$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.6}+\ldots.$$

$$\delta\lessgtr\frac{\pi}{2},\ \delta\lessgtr 0.$$

XIX.

Miscellen.

Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Während uns der Pythagoräische Lehrsatz sagt, dass bei jedem Rectangel *abcd* (Taf. III. Fig. 8.) das Product der beiden Diagonalen gleich sei der Summe aus den Producten der gegenüberstehenden Seiten, d. h. dass

$$ac.bd=bc.ad+ba.cd$$

sei, so erweitert der Ptolemäische Lehrsatz bekanntlich diese Behauptung und spricht ihre Gültigkeit für jedes Viereck im Kreise aus

Er gehört daher zu den interessantesten Sätzen der Elementargeometrie.

Eine eigenthümliche Art ihn zu beweisen ist folgende.

Digitized by Google

Bezeichnet man ein Parallelogramm und ein Dreieck, wenn in beiden die Seiten x und y den Winkel v einschliessen, durch $\Pi\binom{x.y}{\angle v}$ und durch $\Delta\binom{x.y}{\angle v}$, so hat man:

1) Viereck $abcd = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u}$ (Siehe Taf. III. Fig. 9.)

Zieht man nun $de \# ac$ und dann ec und eb und ae, so ist

2) $\Delta\, adc \cong \Delta\, cea$,

mithin

3) Viereck $abcd$ = Viereck $aecb = \Delta\, bce + \Delta\, bae$.

Zugleich aber ist:

4) $\angle ace = \angle cad = \delta$,

mithin

5) $\angle bce = \delta + \beta = u'$;

also auch, da $abce$ ein Viereck im Kreise ist,

6) $\angle bae = 180^0 - bce = 180^0 - u' = u$,

so dass

7) $\Delta\, bce = \Delta\binom{be.ce}{\angle u'} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u}$,

und

8) $\Delta\, bae = \Delta\binom{ba.ae}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u}$.

Es folgt daher aus 1), 3), 7) und 8):

9) $\frac{1}{2}\,\Pi\binom{ac.bd}{\angle u} = \frac{1}{2}\,\Pi\binom{bc.ce}{\angle u} + \frac{1}{2}\,\Pi\binom{ba.ae}{\angle u}$;

folglich, da die Gültigkeit einer solchen Gleichheit nicht aufgehoben wird, wenn man in jedem der drei Parallelogramme statt des Winkels u einen und denselben anderen Winkel, z. B. einen rechten Winkel R, setzt und die Factoren $\frac{1}{2}$ weglässt:

10) $\Pi\binom{ac.bd}{\angle R} = \Pi\binom{bc.ce}{\angle R} + \Pi\binom{ba.ae}{\angle R}$,

d. h.

Digitized by Google

11) $ac.bd = bc.ce + ba.ae$,

oder, wenn man statt ce den Werth ad und statt ae den Werth cd substituirt,

12) $ac.bd = bc.ad + ba.cd$.

Aufgabe.

Von dem Herrn Professor Dr. Hessel zu Marburg.

Ein gleichschenkeliges Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 10.), dessen Schenkel CA und CB an Länge constant sind, verändert sich so, dass sein Winkel ACB wächst und sein Punkt B in einem Kreise vom Radius $CA = CB$ fortschreitet, während der Schenkel CA unbewegt bleibt: man soll die Curve zeichnen, in der sein Schwerpunkt β fortrückt.

Auflösung. Es ist $C\beta = \frac{2}{3} Cu$, oder, wenn $Ca = \frac{2}{3} CA$ ist, $C\beta = Ca \cdot \cos \frac{1}{2} ACB$. Es ist daher die Curve $a\beta\beta_1\beta_2 C$ ein Kreis vom Radius $ma = mC = \frac{1}{2} aC = \frac{1}{3} AC$, dessen Mittelpunkt m in CA so liegt, dass $Cm = \frac{1}{3} CA$ ist.

In dem Journale: The Mathematician. March. 1846. p. 69. hat Herr William Rutherford eine Untersuchung über die acht Kreise, von denen die drei Kreise, welche sich über den drei Seiten eines Dreiecks als Durchmessern beschreiben lassen, geliefert, deren Hauptresultate ich im Folgenden mittheilen will, weil ich glaube, dass das Aufsuchen der Beweise für dieselben Stoff zu zweckmässigen Uebungen darbieten, und vielleicht auch noch zu manchen andern interessanten Resultaten führen kann, die ich gern im Archive abdrucken lassen werde, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte hat.

Das gegebene Dreieck sei DEF und A, B, C seien die Mittelpunkte der Seiten EF, FD, DE. Man setze

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$$

und $2s = a + b + c$; ferner der Kürze wegen

$$s_1 = s - a,\ s_2 = s - b,\ s_3 = s - c.$$

Die über EF, FD, DE als Durchmesser beschriebenen Kreise wollen wir respective den Kreis a, den Kreis b, den Kreis c nennen.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und dem Kreise a, b, c respective eine Berührung von Innen, Innen, Innen Statt findet, sei ϱ_1.

Digitized by Google

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Aussen, Aussen Statt findet, sei ϱ_8.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Innen, Innen Statt findet, sei ϱ_2.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Aussen, Aussen Statt findet, sei ϱ_7.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Aussen, Innen Statt findet, sei ϱ_3.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Innen, Aussen Statt findet, sei ϱ_6.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Innen, Innen, Aussen Statt findet, sei ϱ_4.

Der Halbmesser des Kreises, zwischen welchem und den Kreisen a, b, c respective eine Berührung von Aussen, Aussen Innen Statt findet, sei ϱ_5

Die Halbmesser der vier die Seiten des Dreiecks ABC berührenden Kreise seien r, r_1, r_2, r_4; und zwar sei r der Halbmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises; r_1 sei der Halbmesser des über der Seite $a = BC$ ausserhalb liegenden Kreises; r_2 sei der Halbmesser des über der Seite $b = CA$ ausserhalb des Dreiecks liegenden Kreises; r_3 sei der Halbmesser des über der Seite $c = AB$ ausserhalb des Dreiecks liegenden Kreises.

Dies vorausgesetzt hat man die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{s-\varrho_1} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1-\varrho_2} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_2-\varrho_3} = \frac{2}{r_2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_3-\varrho_4} = \frac{2}{r_3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_3+\varrho_5} = -\frac{2}{r_3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2},$$

$$\frac{1}{s_2+\varrho_6} = -\frac{2}{r_2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s_1+\varrho_7} = -\frac{2}{r_1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3},$$

$$\frac{1}{s-\varrho_8} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}.$$

Digitized by Google

Setzt man

$$2d = -r + r_1 + r_2 + r_3,$$

so wird

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{s} + \frac{r}{2s\,(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1+d-r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2+d-r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3\,(s_3+d-r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_5} = -\frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3\,(s_3-d+r_3)},$$

$$\frac{1}{\varrho_6} = -\frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2\,(s_2-d+r_2)},$$

$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1\,(s_1-d+r_1)},$$

$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s\,(s+d+r)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{2s}\left\{\frac{1}{s-(d+r)} + \frac{1}{s+(d+r)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{2s_1}\left\{\frac{1}{s_1+(d-r_1)} + \frac{1}{s_1-(d-r_1)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{2s_2}\left\{\frac{1}{s_2+(d-r_2)} + \frac{1}{s_2-(d-r_2)}\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{2s_3}\left\{\frac{1}{s_3+(d-r_3)} + \frac{1}{s_3-(d-r_3)}\right\};$$

oder

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8} = \frac{r}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r}{(s+d+r)\,(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7} = \frac{r_1}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_1}{(s+d+r)\,(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} = \frac{r_2}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_2}{(s+d+r)\,(s-d-r)},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5} = \frac{r_3}{s^2-(d+r)^2} = \frac{r_3}{(s+d+r)\,(s-d-r)}.$$

Digitized by Google

Bemerkt man, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

ist, so erhält man hieraus die Relation

$$\frac{1}{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_8}} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_7}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6}} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_5}}$$

oder

$$\frac{\varrho_1 \varrho_8}{\varrho_8 - \varrho_1} = \frac{\varrho_2 \varrho_7}{\varrho_2 + \varrho_7} + \frac{\varrho_3 \varrho_6}{\varrho_3 + \varrho_6} + \frac{\varrho_3 \varrho_5}{\varrho_4 + \varrho_5}.$$

Endlich findet auch noch die folgende bemerkenswerthe Relation Statt:

$$\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}$$

oder

$$-\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{\varrho_7} + \frac{1}{\varrho_8}.$$

Wenn der Winkel bei D in dem gegebenen Dreiecke DEF ein rechter Winkel ist, so ist

$$\varrho_1 = 0,$$
$$\varrho_2 = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{s_2} + \frac{r_2}{2s_2(s_2 + a - r_2)},$$
$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{s_3} + \frac{r_3}{2s_3(s_3 + a - r_3)},$$
$$\varrho_5 = 0,$$
$$\varrho_6 = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho_7} = -\frac{1}{s_1} + \frac{r_1}{2s_1(s_1 - a + r_1)},$$
$$\frac{1}{\varrho_8} = \frac{1}{s} - \frac{r}{2s(s + a + r)}.$$

Wenn das gegebene Dreieck DEF gleichseitig ist, so

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2a},$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho_4}=\frac{3\sqrt{3}+1}{2a},$$
$$\frac{1}{\varrho_5}=\frac{1}{\varrho_6}=\frac{1}{\varrho_7}=\frac{3\sqrt{3}-1}{2a},$$
$$\frac{1}{\varrho_8}=\frac{3-\sqrt{3}}{2a}.$$

Also ist in diesem Falle

$$\varrho_1=\frac{2a}{3+\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}(3-\sqrt{3})\,a,$$
$$\varrho_8=\frac{2a}{3-\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}(3+\sqrt{3})\,a;$$

folglich $\varrho_1+\varrho_8=2a=$ der Seite des gegebenen Dreiecks *DEF*.

Ich wiederhole, dass ich einer ausführlichen, mit möglichster Eleganz und Allgemeinheit durchgeführten Untersuchung über diesen Gegenstand gern einen Platz in dem Archive einräumen werde, da mir die bisherigen Untersuchungen noch Manches zu wünschen übrig zu lassen scheinen.

Anzahl der Diagonalen eines Polyeders.

Die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, u. s. w,

welche ein Polyeder begränzen, sei respective

n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, u. s. w.

Bezeichnen wir nun die Anzahl aller Seitenflächen des Polyeders durch F, so ist natürlich

$$1)\quad F=n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Seiten aller Seitenflächen ist

$$3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Weil nun jede Kante des Polyeders zwei Seitenflächen als Seite angehört, so ist offenbar die doppelte Anzahl der Kanten der Anzahl der Seiten aller Seitenflächen gleich, d. h. wenn K die Anzahl der Kanten bezeichnet, so ist

$$2)\quad 2K=3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+\ldots.$$

Die Anzahl der Diagonalen unsers Polyeders, welche wir durch N bezeichnen wollen, ist offenbar gleich der Anzahl aller die Ecken des Polyeders unter einander verbindenden Linien, weniger der Anzahl aller Kanten und der Anzahl der Diagonalen aller Seitenflächen des Polyeders.

Digitized by Google

Bezeichnet E die Anzahl der Ecken, so ist $\frac{E(E-1)}{2}$ die Anzahl aller die Ecken des Polyeders unter einander verbindenden geraden Linien.

Die Anzahl der Diagonalen aller Seitenflächen des Polyeders ist nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie

$$\frac{3.0}{2}n_3+\frac{4.1}{2}n_4+\frac{5.2}{2}n_5+\frac{6.3}{2}n_6+\frac{7.4}{2}n_7+\ldots.$$

Hiernach, in Verbindung mit 2), ist also

$$3)\quad N=\frac{E(E-1)}{2}-\frac{3.0}{2}n_3-\frac{4.1}{2}n_4-\frac{5.2}{2}n_5-\frac{6.3}{2}n_6-\ldots.$$
$$-\frac{3}{2}n_3-\frac{4}{2}n_4-\frac{5}{2}n_5-\frac{6}{2}n_6-\ldots.$$
$$=\frac{E(E-1)}{2}-\tfrac{1}{2}(1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.)$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$4)\quad M=1.3n_3+2.4n_4+3.5n_5+4.6n_6+\ldots.$$

gesetzt und auf beiden Seiten der Gleichung mit 8 multiplicirt wird:

$$5)\quad 8N=2E(2E-2)-4M.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist aber

$$E+F=K+2,$$

folglich

$$E=K-F+2,\quad 2E=2K-2F+4.$$

Weil nun nach 1) und 2) offenbar

$$2K-2F=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots$$

ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$6)\quad L=n_3+2n_4+3n_5+4n_6+\ldots.$$

setzen,

$$2E=L+4,\quad 2E-2=L+2.$$

Also ist nach 5)

$$7)\quad 8N=(L+2)(L+4)-4M.$$

Dies führt uns zu dem folgenden Satze:

Wenn die Anzahl der

3ecke, 4ecke, 5ecke, 6ecke, 7ecke, ...

Digitized by Google

welche ein Polyeder begränzen, respective

$$n_3,\ n_4,\ n_5,\ n_6,\ n_7,\ \ldots.$$

ist, und der Kürze wegen

$$L = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + 4n_6 + 7n_7 + \ldots.,$$
$$M = 1.3n_3 + 2.4n_4 + 3.5n_5 + 4.6n_6 + \ldots.$$

gesetzt, die Anzahl der Diagonalen des Polyeders aber durch N bezeichnet wird, so ist jederzeit

$$8N = (L+2)(L+4) - 4M.$$

(Dem Wesentlichen nach aus einem Aufsatze des Herrn Henri Binder in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono. Décembre. 1845. p. 656. entlehnt.)

Schon Thl. VII. S. 107. ist bemerkt worden, dass die französischen Kammern eine Sammlung und Herausgabe der Schriften Fermat's beschlossen haben. In dem Journal des Savants. Septembre 1839. Mai 1841. Novembre 1845. hat Libri drei Aufsätze sur la vie et les manuscrits de Fermat geliefert. Aus dem neuesten dieser Aufsätze theile ich den Lesern des Archivs folgende Fermat's Leben betreffende Stelle mit.

Non-seulement les écrits de Fermat ont été pour la plupart égarés, mais sa biographie même était encore à faire dans ces derniers temps. Excessivement modeste, ne voulant donner aucune publicité à ses travaux, vivant en province et souvent à la campagne, Fermat ne fut apprécié d'abord que par quelques esprits d'élite, qui, à Paris, à Londres, à Florence, admiraient ses belles découvertes scientifiques, et il mourut presque ignoré au milieu des siens. Aussi, jusqu'à ces derniers temps, on n'était d'accord ni sur l'époque de sa naissance ni sur celle de sa mort, et l'on peut dire que l'on ignorait à la fois la ville où il était né, celle où il avait cessé de vivre, et les principales circonstances de sa vie. Nous devons surtout aux infatigables recherches de M. Taupiac, avocat à Beaumont-de-Lomagne, la connaissance de plusieurs documents qui peuvent faire cesser l'incertitude dans laquelle on était à cet égard.

Sans être appuyée sur aucun fait positif, la tradition voulait que Fermat fût né à Toulouse, ville où il résidait habituellement, et cette opinion était adôptée généralement par les biographes, lorsque M. Taupiac, guidé par des renseignements et des traditions qu'il avait recueillis sur les lieux, entreprit, dans les archives de la ville de Beaumont, des recherches qui paraissent établir, à notre avis, que Fermat est né dans cette localité, au mois d'août 1601, de Dominique Fermat et de Françoise Cazeneuve, et qu'il avait été baptisé le 20 du même mois. Les Fermat étaient marchands de cuirs, et Dominique, père du géomètre, possédait des biens considérables. On peut lire, dans la *France méridionale* du 16. avril 1844, un article fort intéressant, dans lequel M. Taupiac, à l'aide d'un grand nombre de documents qu'il a découverts, suit pas à

Digitized by Google

pas la vie si tranquille de Fermat, et nous le montre avocat d'abord, puis ensuite conseiller à la Chambre des requêtes du parlement de Toulouse. L'arrêt qui investit Fermat de ses fonctions est du 14. mai 1631. Quelques jours plus tard, ce jeune magistrat, qui était déjà un illustre géomètre, épousait Louise de Long, fille d'un conseiller au même parlement. Nous ne reproduirons pas ici les recherches de M. Taupiac relatives à la naissance des enfants de Fermat, et aux fréquents voyages que celui-ci fit à Beaumont. Nous aimons mieux dire un mot d'une difficulté qui nous avait arrêté d'abord nous-même, difficulté qui ne semble pas s'être présentée à l'esprit de M. Taupiac, et qui, si elle n'était pas levée, pourrait jeter une grande incertitude sur tout ce qu'il a avancé au sujet de Fermat.

L'extrait de baptême, qui a été découvert par M. Taupiac *), parle de *Pierre Fermat*, sans la particule nobilière *de*, qui précède le nom de cet illustre géomètre dans les *Opera varia*, ainsi que dans le *Diophante* publié en 1670 avec des notes de lui. Or, au XVIIe siècle, cette particule ne se prenait pas à volonté, comme cela est arrivé si fréquemment depuis, et il nous serait impossible d'admettre que *Pierre de Fermat*, conseiller au parlement de Toulouse, est le même individu qui avait été baptisé à Beaumont sous le nom de *Pierre Fermat*, s'il n'y avait pas quelque moyen sur de constater l'identité. Heureusement d'autres documents, que M. Pelleport, archiviste de la cour royale de Toulouse, a trouvés dans les papiers de l'ancien parlement, et dont nous devons la communication à l'obligeance de M. Martin, député de la Haute-Garonne, nous permettent d'expliquer cette difficulté. Dans l'arrêt du 14. mai 1631. le nouveau conseiller est appelé *Pierre Fermat*, et, dans un autre arrêt du 30. décembre 1638. on voit le même conseiller, sur l'identité duquel il ne peut s'élever aucun doute, appelé officiellement *de Fermat*. C'est probablement dans cet intervalle de temps que ce grand mathématicien, auquel son admission au parlement donnait ce qu'on appelait la *noblesse de robe*, commença à faire usage d'un particule qui n'existait pas dans son acte de baptême. Nous ignorons si, après cette admission, il fut anobli et rendu apte, par un arrêt spécial, à faire précéder du *de* son nom, ou bien si une telle addition s'opéra seulement par suite de la nouvelle charge dont il était revêtu. Quoi qu'il en soit, il est bon d'ajouter que, même dans la suite, on trouve son nom écrit tantôt de l'une, tantôt de l'autre manière **).

---

*) Voici cet acte, qui n'est pas signé: „Pierre, fils de Dominique Fermat, bourgeois et segond consul de la ville de Beaumont, a esté baptisé le 20e aoust 1601. Parrin, Pierre Fermat, marchand et frère dudit Dominique; marrine, Jehanne Cazonuve; et moi.“ A la suite d'un autre acte qui suit on lit cette signature: „Dumas Vic.“

**) Ainsi, par exemple, la dédicace de Saporta, placée à la suite du *Traité de la mesure des eaux courantes*, par Castelli (Castres, 1664, in 4°, p. 59), et en tête d'un ouvrage sur la même matière par Torricelli, est adressée „A Monsieur Fermat, conseiller du roy au parlement de Tolose.“

Digitized by Google

XX.

Ueber die beste Construction horizontal belasteter Gewölbe.

Von dem

Herrn Reallehrer Brenner

zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Ein Gewölbe sei durch eine horizontal geebnete und in Bezug auf Dichtigkeit homogene Last bedeckt. Es soll nun das Gesetz, welches die Wölbung oder die durch den vertikalen und senkrechten Durchschnitt des Gewölbes dargestellte Curve befolgt, für den Fall vollständigen Gleichgewichts, so wie noch die übrigen, hieher gehörigen, wichtigsten Momente entwickelt werden.

Nehmen wir die Abscissenaxe AX (Taf. IV. Fig. 1.) horizontal und die Ordinatenaxe AY vertikal, so wird fraglicher Durchschnitt, den wir uns durch die Abscissenaxe, die Horizontalebene der Belastung, so wie durch zwei auf den sogenannten Widerlagern des Gewölbes ruhende Vertikalen begrenzt denken, ein rechtwinkliges Parallelogramm bilden. Es ist nun klar, dass wir uns jeden Theil des belasteten Gewölbes als vollständig fest und vermittelst der Kräfte, die auf denselben wirken, im Gleichgewicht sich befindend, vorstellen können. Einen solchen Theil stelle $ABEM$ vor, welcher durch die Gewölbskurve $AM=s$, die Horizontale $BE=AF=x$ und die Vertikalen $AB=b$ und $ME=b-y$, wo b die Höhe der Belastung ist, begrenzt ist. $ABEM$ befindet sich vermittelst dreier Kräfte im Gleichgewicht, nemlich

1) vermittelst des vom übrigen Theile des Gewölbes herrührenden Druckes D in M nach der Tangente und Richtung Mt;

2) vermittelst des vom Widerlager in A ausgeübten Druckes a nach der Tangente und Richtung At;

3) vermittelst des Gewichtes von $ABEM$, das wir durch P vorstellen wollen und in seinem Schwerpunkte vereinigt denken können.

Ersetzen wir D und a durch zwei gleiche nach Mt und At gerichtete Kräfte, so schneiden sie sich in t, und wählt man t als

Digitized by Google

Angriffspunkt, so folgt daraus, dass der Schwerpunkt von P mit t in derselben Vertikale liegen muss. Es ergeben sich somit für den Punkt t folgende zwei Gleichgewichts-Gleichungen:

$$a\cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$a\sin\vartheta - P - D\frac{dy}{ds} = 0\ ^{*}).$$

wenn man den constanten Winkel $tAX = \vartheta$ setzt.

Eliminiren wir den veränderlichen Druck D, so ergibt sich $P = a\sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y$ oder, da P offenbar der Fläche $ABEM$ proportional ist:

$$(L) \qquad p(bx - \int y dx) = a\sin\vartheta - a\cos\vartheta\,\partial y,$$

wo p = dem Gewichte der Volumen-Einheit der Belastung ist und wo das Integral $\int y dx$ mit $x = 0$ zu beginnen hat.

Differenziiren wir in Beziehung auf x, so kommt

$$p(b - y) = -a\cos\vartheta\,\partial^2 y,$$

und wenn wir $\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$ und $y - b = z$ setzen:

$$(M) \qquad \partial^2 z = Az.$$

Das Integral dieser linearen Differenzial-Gleichung ist, wenn wir z wieder durch $y - b$ ersetzen,

$$y - b = C\cos(x\sqrt{-A}) + C_1\sin(x\sqrt{-A}),$$

wo C und C_1 die beiden Constanten sind.

Für $x = 0$ hat man $y = 0$, daher $C = -b$.

Die Constante C_1 bestimmt sich aber aus (L) oder auch aus der Bedingung $[\partial y]_0 = \operatorname{tg}\vartheta$, wo $[\partial y]_0$ der Werth von ∂y ist, wenn man $x = 0$ setzt, und so erhalten wir die Gleichung

$$(N) \qquad y = b - b\cos(x\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A}).$$

Ob unsere Curve die Abscissenaxe ausser dem Anfangspunkte A in noch weitern Punkten trifft, ergibt sich, wenn man $y = 0$ setzt und die Werthe von x entwickelt. Man hat

---

*) Zu bemerken ist, dass wir uns bald des Differenzial-Zeichens d, bald, nach Ohm, des Ableitungszeichens ∂ bedienen.

Digitized by Google

$$b[1-\cos(x\sqrt{-A})]+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(x\sqrt{-A})=0,$$

oder

$$\sin(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})[b\sin(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\tfrac{x}{2}\sqrt{-A})]=0,$$

welcher Gleichung genügt wird:

1) durch $\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0$, d. h.

$$e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}=0,$$

oder, wenn man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$ multiplicirt, $1=e^{x\sqrt{A}}$, woraus $x\sqrt{A}=\log 1=0$, also $x=0$. wodurch eben der Coordinaten-Anfang angezeigt wird;

2) durch $b\sin(\frac{x}{2}\sqrt{-A})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\cos(\frac{x}{2}\sqrt{-A})=0.$

Geht man auch hier auf die Exponentialgrössen über, so kommt

$$b(e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}}-e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}})+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}(e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}+e^{-\frac{x}{2}\sqrt{A}})=0.$$

Multiplicirt man mit $e^{\frac{x}{2}\sqrt{A}}$, entwickelt $e^{x\sqrt{A}}$, und logarithmirt, so kommt

$$x=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right)$$

als zweiter Durchschnittspunkt.

Daraus folgt, dass die Ordinate y eines Maximums fähig ist. Man hat für diesen Zweck

$$\partial y=b\sqrt{-A}\sin(x\sqrt{-A})+\operatorname{tg}\vartheta\cos(x\sqrt{-A})=0,$$

und durch eine ganz ähnliche Entwickelung wie oben in 2) oder auch durch blosse Ansicht von 2) ergibt sich

$$x=\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\left(\frac{b\sqrt{A}+\operatorname{tg}\vartheta}{b\sqrt{A}-\operatorname{tg}\vartheta}\right),$$

gerade halb so gross als das x des 2ten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissenaxe, wie zu erwarten stand.

Meistens ist statt des Druckes a und des Winkels ϑ die Abscisse des zweiten Durchschnittspunktes der Curve mit der Abscissen-

axe, oder die Weite n des Gewölbes und dessen Höhe h, d. h. das Maximum von y gegeben, und es kommt nun darauf an, a und ϑ oder auch A und ϑ aus n und h zu entwickeln. Wir haben zu gleicher Zeit

$$(O) \qquad 0 = b[1-\cos(n\sqrt{-A})] + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(n\sqrt{-A}),$$

$$(P) \qquad h-b = -b\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}).$$

Die erstere Gleichung (O) verwandelt sich in

$$0 = b\sin^2(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}}\sin(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A})\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}),$$

woraus

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}.$$

Hiedurch geht (P) über in

$$\frac{b-h}{b} = \cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) + \frac{\sin^2(\frac{n}{2}\sqrt{-A})}{\cos(\frac{n}{2}\sqrt{-A})},$$

welches gibt

$$\cos(\tfrac{n}{2}\sqrt{-A}) = \frac{b}{b-h},$$

oder, wenn man auf Exponentialgrössen übergeht und in Bezug auf $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ auflöst:

$$e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} = \frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h}.$$

Die Grösse $e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}}$ ist aber nothwendig positiv und grösser als 1.

Der Ausdruck

$$\frac{b \pm \sqrt{h(2b-h)}}{b-h} = \frac{b-h}{b \mp \sqrt{h(2b-h)}}$$

erfüllt aber bei jedem (+ oder —) Zeichen die erstere Bedingung.

Digitized by Google

Denn da der Natur der Aufgabe gemäss $b > h$, so setze man $b = h + l$, woraus $2b = 2h + 2l$ und $2b - h = h + 2l = b - l + 2l = b + l$ und $h = b - l$, demnach

$$\sqrt{h(2b-h)} = \sqrt{b^2 - l^2},$$

welche Grösse kleiner ist als b. Die zweite Bedingung aber erfordert, dass der Zähler grösser ist als der Nenner, und diess ist nur möglich, wenn man das positive Zeichen nimmt. Denn da $b > h$, so ist $2b - h > h$, daher $\sqrt{h(2b-h)} > h$.

Würde man das negative Zeichen nehmen, so bliebe der Zähler kleiner als der Nenner. Es ist demnach

$$\frac{n}{2}\sqrt{A} = \log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right] \text{ und } A = \left\{\frac{2}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2.$$

Zur Abkürzung werden wir uns fast immer des, nun bekannten, Buchstabens A bedienen. Die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}{\cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}$$

liefert uns nun aber

$$\operatorname{tg}\vartheta = b\sqrt{A}\cdot\frac{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} - e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}}{e^{\frac{n}{2}\sqrt{A}} + e^{-\frac{n}{2}\sqrt{A}}} = b\sqrt{A}\cdot\frac{e^{n\sqrt{A}} - 1}{e^{n\sqrt{A}} + 1}.$$

Allein wir haben

$$e^{n\sqrt{A}} = e^{\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2} = \left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2,$$

und desswegen

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{2b}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\cdot\frac{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2 - 1}{\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{n}\sqrt{h(2b-h)}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].$$

Aus der Gleichung $A = \frac{p}{a\cos\vartheta}$ haben wir $a = \frac{p}{A}\cdot\frac{1}{\cos\vartheta}$. Während man nun die Formel hat $\frac{1}{\cos B} = \sqrt{1 + \operatorname{tg} B^2}$, so ergibt sich

Digitized by Google

$$\text{II.}\quad a = \frac{p}{A}\sqrt{1+A\left(b\,.\,\frac{e^{n\sqrt{A}}-1}{e^{n\sqrt{A}}+1}\right)^2}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1+\frac{4h}{n^2}(2b-h)\left\{\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right]\right\}^2}.$$

Vermittelst der Bestimmungen

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{-A}} = -\frac{b\sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)}{\cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right)} \text{ und } \cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-A}\right) = \frac{b}{b-h}$$

sind wir im Stande, der Gleichung (*N*) unserer Curve folgende Form zu geben:

$$\text{III.}\quad a)\ y = b-(b-h)\cos\left[\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{-A}\right],$$

$$b)\ y = b-\tfrac{1}{4}(b-h)\left[e^{\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}} + e^{-\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}}\right],$$

welche letztere Form zur Auswerthung der Ordinaten geeignet ist.

Würden wir (was wir jedoch hier nur bemerkungsweise thun) den Anfang der Coordinaten in den Durchschnittspunkt des Maximums h mit der Abscissenaxe verlegen, so hätten wir $x = x' + \frac{n}{2}$ zu setzen, wenn wir die neuen Abscissen mit x' bezeichnen und III. *b*) ginge über in

$$y = b-\tfrac{1}{4}(b-h)\left(e^{x'\sqrt{A}} + e^{-x'\sqrt{A}}\right),$$

eine Gleichung, welche ganz unverändert bleibt, wenn man $+x'$ in $-x'$ umwandelt. Man wird sich daher überzeugen, dass das Maximum von y die Curve in zwei congruente Zweige theilt. Auch ist es nicht schwer, einzusehen, dass sich die Curve in ihren beiden Zweigen auf der negativen Seite (nicht Richtung) der Abscissenaxe ins Unendliche fortsetzt. Auch könnte man der Gleichung III., wenn man statt $\sqrt{A}$ dessen in n und h gefundenen Ausdruck setzen wollte, eine andere Form ertheilen und zwar vermittelst der Formel $e^{m\log B} = B^m$.

Beschäftigen wir uns nun mit Aufsuchung des Druckes, den ein Gewölbstein auf den andern ausübt. Wir haben oben diesen Druck $= D$ gesetzt, und aus der Gleichung

$$a\cos\vartheta - D\frac{dx}{ds} = 0$$

ergibt sich in Verbindung mit $\frac{p}{a\cos\vartheta} = A$:

Digitized by Google

$$D = \frac{p}{A}\sqrt{1+\partial y^2}.$$

Wir haben

$$\partial y = -(b-h)\sqrt{-A}\sin\left[\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{-A}\right]$$

$$= (b-h)\sqrt{-A}\sin\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right],$$

und erhalten

$$\text{IV.}\quad D = \frac{p}{A}\sqrt{1-A(b-h)^2\sin^2\left[\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-A}\right]}$$

$$= \frac{p}{A}\sqrt{1+A(b-h)^2\left(\frac{e^{\left(\frac{n}{2}-x\right)\sqrt{A}}-e^{\left(x-\frac{n}{2}\right)\sqrt{A}}}{2}\right)^2}.$$

Sowohl für $x=0$, als auch für $x=n$, finden wir nach kurzer Entwicklung den oben schon erhaltenen Druck a auf die Widerlager, während man für $[\partial y]_0 = \operatorname{tg}\vartheta$ den ebenfalls schon oben gewonnenen Werth 1., allein für $[\partial y]_n$, d. h. für die Richtung des Drucks auf das zweite Widerlager, zwar denselben Ausdruck, jedoch mit negativem Zeichen erhält. Der stumpfe Winkel, den die letztere Richtung mit der Abscissenaxe macht, ist daher $180^0 - \vartheta$, so dass dieselbe mit der erwähnten Axe den Neigungswinkel $180^0 - (180^0 - \vartheta) = \vartheta$, also denselben Winkel macht, den auch die Drucksrichtung des ersten Widerlagers mit ihr macht, was übrigens zu erwarten stand.

Von besonderer Wichtigkeit ist endlich noch die Bestimmung des cubischen Inhaltes des Gewölbes. Bekanntlich findet man diesen Inhalt für cylindrische Gewölbe im Allgemeinen, wenn man den vertikalen und senkrechten Durchschnitt derselben mit ihrer Länge multiplicirt. Es kommt daher zunächst darauf an, diesen Vertikaldurchschnitt zu bestimmen. Derselbe ist offenbar gleich dem Flächeninhalt der äusseren Curve, minus dem der innern, zwischen ihren Abscissen genommen. Um den ersteren zu finden, scheint die Gleichung der äusseren Curve nöthig zu sein. Diese äussere Curve aber ist dadurch entstanden, dass man diejenigen Punkte aller verlängerten Normalen der innern, die von dieser stets gleich weit abstehen, mit einander verbindet, oder durch den Endpunkt einer Geraden, die, der Gewölbscurve stets normal, mit ihrem andern Endpunkt auf dieser dahingleitet. Auch ist klar, dass jeder fixirte Punkt einer so dahingleitenden Normale in Verbindung der erzeugenden Gewölbscurve den Durchschnitt des Gewölbes darstellen kann. Zieht man also durch den beliebigen Punkt M oder (x, y) der Erzeugungscurve eine Normale, welche die erzeugte Curve im Punkte m schneiden mag, so stellt Mm die constante Verlängerung der Normale vor. Wir setzen $Mm = r$, so wie die Coordinaten des Punktes m gleich x' und y'. Nach einfacher Betrachtung wird man sich bald überzeugen, dass

$$x' = x - \frac{r\,dy}{ds} \text{ oder } x' = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1-\partial y^2}},$$

$$y' = y + \frac{r\,dx}{ds} \text{ oder } y' = y + \frac{r}{\sqrt{1+\partial y^2}}$$

ist, welche Gleichungen, nebst der Gleichung der Erzeugungscurve $y = f(x)$ dazu dienen, x und y zu eliminiren, so dass dann eine Gleichung zwischen x' und y' resultirt, welche die der erzeugten Curve ist. Diese Eliminationen sind aber in den meisten Fällen ausserordentlich schwierig und führen zu verwickelten schwer zu behandelnden Gleichungen. Für ein Glück dürfen wir es daher halten, dass es einen weit einfachern Weg gibt, unsern Zweck zu erreichen, ein Weg, der uns nicht nur die Quadratur, sondern zu gleicher Zeit auch die Rectification unserer erzeugten Curve sogar ganz im Allgemeinen (abgesehen von unserer oben behandelten Gewölbs-Curve) zeigt.

Es ist nemlich klar, dass die Krümmungshalbmesser beider Curven einander decken und dass derjenige der erzeugten Curve um r grösser ist als der der erzeugenden, so wie, dass die unendlich kleinen Bogen ∂s und $\partial s'$ zwischen zwei auf einander folgenden Normalen oder Krümmungshalbmessern einander parallel sind. Daher ist

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} + r = \partial s : \partial s',$$

woraus

$$r : \frac{\partial s^3}{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x} = \partial s' - \partial s : \partial s;$$

ferner

$$\partial (s' - s) = r\,\frac{\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

Die Gleichung der Normale aber ist

$$y'' - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(x'' - x),$$

wenn x'' und y'' die Coordinaten der Normale selbst vorstellen, während, wie immer, (x, y) einen beliebigen Punkt in der Erzeugungscurve selbst bezeichnet. Setzt man nun den Winkel, den die Normale mit der Abscissenaxe macht, gleich w, so ist

$$\operatorname{tg} w = -\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \partial(\operatorname{tg} w) = \frac{\partial w}{\cos w^2} = -\frac{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y}{\partial y^2},$$

und da

$$\cos w^2 = \frac{\partial y^2}{\partial s^2},$$

Digitized by Google

so ist

$$\partial w = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^2};$$

und so hat man

$$\partial (s' - s) = r \partial w,$$

woraus

$$s' - s = rw + C,$$

welches den Ueberschuss des Bogens s' über s vorstellt, wofern das Integral $rw + C$ zwischen den gehörigen Grenzen genommen wird. Zwischen diesen Grenzen stellt aber w den von den äussersten Normalen eingeschlossenen Winkel dar und rw ist der von diesem Winkel eingeschlossene Kreisbogen, beschrieben mit dem Radius r. Es ergibt sich daher der Satz:

Man findet den Bogen der nach oben beschriebener Art erzeugten Curve, wenn man den entsprechenden Bogen der Erzeugungscurve um denjenigen Kreisbogen vermehrt, welcher zwischen dem von den äussersten Normalen eingeschlossenen Winkel mit dem Radius gleich dem Abstand beider Curven beschrieben wird.

Ferner ist der Satz bekannt, dass der Inhalt einer Fläche, die eine Gerade so in einer Ebene beschreibt, dass sie in ihrem Mittelpunkt stets normal auf einer Curve dahingleitet, gleich ist dem Product aus dieser Geraden und der Curve. Diess ist offenbar der Fall mit unserer Erzeugungslinie r und der Curve, die ihr Mittelpunkt beschreibt. Allein, um diese Curve zu erhalten, darf man den Bogen s der Erzeugungscurve nur um den Kreisbogen $\frac{rw}{2}$ vermehren, so dass der von r beschriebene Flächenraum sein wird $r(s + \frac{r}{2} w)$, wofern w der zwischen den äussersten Normalen genommene Winkel ist. Diess auf unsern vorliegenden Fall angewendet, haben wir nur noch den Bogen s, so wie den Winkel w zu bestimmen. Man hat

$$\partial s = \sqrt{1 + \partial y^2} = \sqrt{1 - A(b-h)^2 \sin^2[(x - \tfrac{n}{2})\sqrt{-A}]},$$

daher

$$s = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \sqrt{1 - c^2 \sin t^2} \, . \, dt,$$

wenn wir $A(b-h)^2 = c^2$ und $(x - \frac{n}{2})\sqrt{-A} = t$ setzen.

Digitized by Google

So sind wir also auf ein elliptisches Integral gestossen, und wir haben

$$s=\frac{1}{\sqrt{-A}}\left\{\begin{array}{l} t-\frac{1}{2}c^2\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2^2}\sin 2t\right) \\ -\frac{1.1}{1.2}c^4\left(\frac{1.3}{2.4}t-\frac{4}{2^4}\sin 2t+\frac{1}{2^4.2}\sin 4t\right) \\ -\frac{1.1.3}{2.4.6}c^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}t-\frac{15}{2^6}\sin 2t+\frac{6}{2^6.2}\sin 4t-\frac{1}{2^6.3}\sin 6t\right) \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}+C.$$

welches Integral noch zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=u$ oder zwischen $t=-\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ und $t=+\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ zu nehmen ist, so dass also bloss die rechte Seite, mit Weglassung der Constante, verdoppelt werden darf und t durch $\frac{n}{2}\sqrt{-A}$ ersetzt werden muss. Verwandelt man zuletzt die Sinus in Exponentialfunctionen, und vollendet die angezeigte Multiplication mit $\frac{1}{\sqrt{-A}}$, so wird die imaginäre Form verschwinden. Dieses Integral erweist sich übrigens als sehr brauchbar, indem es für die gewöhnlichen Fälle sehr fallend ist. Bemerkt mag noch werden, dass man dem c folgende Form geben kann:

$$c=\frac{2(b-h)}{n}\log\left[\frac{b+\sqrt{h(2b-h)}}{b-h}\right].$$

Endlich wird man bald finden, dass $w=2\vartheta$, so dass sich der gesuchte Durchschnitt gleich

$$\text{V.}\quad rs+\frac{r^2\pi\vartheta}{180}$$

findet, wofern der Winkel in Graden angegeben ist.

So leisten also die mit römischen Nummern bezeichneten Resultate alles, was in Bezug auf die horizontal belasteten Gewölbe praktisch wissenswerth ist.

Digitized by Google

XXI.

Ueber plagiographische Projection.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

Wenn die unter einander parallelen Gesichtslinien mit der Projections-Ebene einen rechten Winkel bilden, so ist diese allein nicht ausreichend, sondern es muss die Projection auch noch auf eine andere Ebene, deren Lage gegen jene als bekannt vorausgesetzt wird, entworfen werden, falls man aus der Zeichnung die wahren Dimensionen des dargestellten Gegenstandes soll entnehmen können, und man hat bekanntlich, wenn die beiden Projections-Ebenen auf einander rechtwinklig stehen, die Methode der beschreibenden Geometrie. Wenn aber die unter einander parallelen Gesichtslinien mit der Projections-Ebene einen schiefen Winkel bilden, dessen Grösse gegeben ist, so reicht eine Projections-Ebene hin, um ein geometrisches Bild zu entwerfen, aus welchem sich die wahren Dimensionen des Gegenstandes erhalten lassen. Der einfachste Fall ist derjenige, in welchem der Winkel, den die Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene machen, ein halber Rechter ist. Diese Projections-Art, welche in der Fortification in Anwendung kommt, bietet auch in theoretischer Hinsicht einige nicht uninteressante Eigenschaften dar, weshalb eine Untersuchung dieses Gegenstandes mir nicht ganz überflüssig erscheint.

Poncelet erwähnt dieser Projections-Art in seinem: „Traité des propriétés projectives des figures“ in der Einleitung Pag. XXVIII. und XXIX., ohne sich auf den Gegenstand näher einzulassen.

Wenn wir im Folgenden die Theorie dieser Methode, welche wir die plagiographische Projection nennen, analytisch begründen, so hat die Ansicht, dass auch für den praktischen Gebrauch sich auf diese Weise gewisse leichte Vorschriften für die Entwerfung der Projectionen der krummen Oberflächen ergeben, welche dem Zeichner willkommener sein werden, als die Methoden, mittelst welcher man auf mühsamen geometrischen Wegen das Ziel erreicht, uns dabei vorgeschwebt. Auch in der gewöhnlichen beschreibenden Geometrie sind die Auflösungen gewisser Aufgaben für die wirkliche Anwendung oft viel zu mühsam und ungenau,

Digitized by Google

als dass es nicht wünschenswerth wäre, sie durch andere zu ersetzen, die jener Vorwurf nicht trifft. Dazu führt aber gewöhnlich die analytische Auffassung sehr leicht. Die beschreibende Geometrie ist in dieser Hinsicht noch einer Erweiterung fähig, welche dem Praktiker nützlich werden kann. Bei dieser Gelegenheit sei jedoch die Bemerkung gestattet, dass es keineswegs unsere Meinung ist, dass der Zeichner zugleich einige Stücke der Construction auch berechnen solle, gegen eine solche Vermischung des Geometrischen und Arithmetischen müssen wir uns entschieden erklären; das Gesagte bezieht sich hier nur auf die Nachweisung der Richtigkeit, nicht aber auf die Ausführung der Construction, welche unter keinen Umständen ihren geometrischen Character verlieren darf.

Zur Projections-Ebene nehmen wir die Ebene der xy, die Projectionsstrahlen nehmen wir mit der Ebene der xz parallel und, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, den Neigungswinkel derselben mit der Projections-Ebene gleich 45^0 an.

Aufgabe 1. Man sucht die Gleichung für die plagiographische Projection einer krummen Linie, einfacher oder doppelter Krümmung, deren Gleichung gegeben ist.

Auflösung. Die krumme Linie sei allgemein durch die Gleichungen

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x$$

gegeben.

Die Abscissen der gesuchten Projection mögen durch ξ, die Ordinaten durch η bezeichnet werden. Es kommt nun darauf an, die Gleichung zwischen ξ und η zu ermitteln. Man hat aber

$$\xi = x,$$

und erhält dann

$$\eta = y + z,$$

also ist

$$\eta = \varphi\xi + \psi\xi$$

die gesuchte Gleichung.

Wenn z. B. die zu projicirende Linie ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht und mit der Ebene xz einen beliebigen Winkel bildet, und dessen Mittelpunkt der Einfachheit wegen im Anfangspunkte der Coordinaten liegen mag, so ist, wenn man den Radius mit r bezeichnet:

$$y = ax = \varphi x,$$
$$z = \sqrt{r^2 - (1+a^2)x^2} = \psi x,$$

also

Digitized by Goog

$$\eta = a\xi + \sqrt{r^2 - (1+a^2)\,\xi^2}$$

oder

$$\eta^2 + (1+2a^2)\,\xi^2 - 2a\,\eta\,\xi = r^2,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Axen sich leicht ermitteln lassen.

Führt man nämlich neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass

$$\xi = \xi' \operatorname{Sin}\varphi - \eta' \operatorname{Cos}\varphi,$$
$$\eta = \xi' \operatorname{Cos}\varphi + \eta' \operatorname{Sin}\varphi$$

wird, so ergiebt sich, wenn man den Coefficienten von $\eta'\xi' = 0$ setzt, zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$0 = -a \operatorname{Sin} 2\varphi + \operatorname{Cos} 2\varphi,$$

d. h.

$$\operatorname{Tang} 2\varphi = \frac{1}{a} = \operatorname{Cot} u = \operatorname{Tang}(90^0 - u),$$

mithin

$$\varphi = 45^0 - \frac{1}{2}u,$$

und man erhält als Gleichung der gesuchten Projection.

$$\frac{\xi'^2}{r^2(1+\operatorname{Sin} u)} + \frac{\eta'^2}{r^2(1-\operatorname{Sin} u)} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach:

$$r \operatorname{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u) \cdot \sqrt{2} \text{ und } r \operatorname{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u) \cdot \sqrt{2}.$$

Wenn der Fall eintritt, dass $u = 0$ ist, so wird die Ellipse ein Kreis, dessen Radius $= r$, und ist $u = 90^0$, so wird die Projection eine gerade Linie, welche in die Axe der y fällt und $= r\sqrt{2}$ ist.

Jede Ellipse kann demnach als die plagiographische Projection eines Kreises betrachtet werden, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht. Bezeichnen nämlich $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine Axe dieser Ellipse, so hat man zur Bestimmung von u und r die beiden Gleichungen

$$a = r \operatorname{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2},$$

$$b = r \operatorname{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2};$$

also

Digitized by Google

$$\text{Tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}u) = \frac{b}{a}, \text{ und}$$

$$r = \frac{a}{\text{Cos}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}} = \frac{b}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}u)\sqrt{2}},$$

oder auch

$$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{a-b}{a+b}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

welche beide Ausdrücke sich besonders für die Construction eignen.

Der Inhalt dieser Ellipse ergiebt sich gleich

$$r^2 \pi \,\text{Cos}\, u,$$

also gleich dem Inhalte derjenigen Ellipse, welche die orthographische Projection desselben gegen eine Projections-Ebene unter dem Winkel u geneigten Kreises ist. Man erhält also immer eine unserer Projection des gegebenen Kreises dem *Inhalte* nach gleiche Ellipse, wenn man denselben Kreis in unveränderter Lage auf die Ebene der x: orthographisch projicirt.

Wenn wir die Bedingung aufheben, dass die parallelen Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene einen halben rechten Winkel machen, und annehmen, dass dieser Winkel allgemein $= i$ sei, so ergiebt sich, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, die Gleichung

$$\eta = y + z\,\text{Cot}\, i,$$

also

$$\eta = \varphi\xi + \text{Cot}\, i \,.\, \psi\xi,$$

und man erhält als Lösung der obigen Aufgabe

$$\eta = a\xi + \text{Cot}\, i \sqrt{r^2 - (1+a^2)\xi^2},$$

also

$$\eta^2 + (\text{Cot}\, i^2 + \frac{a^2}{\text{Sin}\, i^2})\,\xi^2 - 2a\,\eta\,\xi = r^2\,\text{Cot}\, i^2,$$

welches wieder die Gleichung einer Ellipse ist.

Führt man auch hier neue Coordinaten ξ' und η' ein, so dass wieder

$$\xi = \xi' \,\text{Sin}\,\varphi - \eta' \,\text{Cos}\,\varphi,$$
$$\eta = \xi' \,\text{Cos}\,\varphi + \eta' \,\text{Sin}\,\varphi$$

Digitized by Google

wird, und bestimmt den Winkel φ so, dass $\eta'\xi$ aus der Rechnung hinausgeht, so wird

$$\text{Tang}\,2\varphi = \frac{2\,\text{Tang}\,u\,.\,\text{Sin}\,i^2}{\text{Cos}\,2i + \text{Tang}\,u^2},$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\xi'^2(\text{Sec}u^2 - \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) - 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi\,.\,\text{Sin}i^2)$$
$$+\eta'^2(\text{Sec}u^2 + \text{Cos}2\varphi(\text{Tang}u^2 + \text{Cos}2i) + 2\text{Tang}u\text{Sin}2\varphi\,.\,\text{Sin}i^2) = 2r^2\text{Cos}i^2,$$

welche in ihrer einfachsten Gestalt so geschrieben werden kann:

$$\xi'^2\,.\,\frac{1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}2i^2)}}{2r^2\,\text{Cos}\,u^2\,\text{Cos}\,i^2} + \eta'^2\,.\,\frac{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}u^2\text{Sin}2i^2)}}{2r^2\,\text{Cos}u^2\text{Cos}i^2} = 1.$$

Die halben Axen der Ellipse sind demnach

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i}\,.\,\sqrt{(1 + \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2})}\,.\,\sqrt{2} \text{ und}$$

$$\frac{r}{2\text{Sin}\,i}\,.\,\sqrt{(1 - \sqrt{1 - \text{Cos}\,u^2\text{Sin}\,2i^2})}\,.\,\sqrt{2}.$$

Der Inhalt dieser Ellipse ist also

$$r^2\pi\,\text{Cos}\,u\,.\,\text{Cot}\,i.$$

Setzt man $i = 45^0$, so ergeben sich die oben unter dieser Annahme gefundenen Ausdrücke für die halben Axen der Ellipse.

Setzt man $u = 0$, d. h. nimmt man den zu projicirenden Kreis als in der Ebene der xz liegend an, so wird die Projection eine Ellipse, deren halbe Axen

$$r\,\text{Cot}\,i \text{ und } r$$

sind.

Setzt man endlich $u = 0$ und $i = 45^0$, so wird die Projection ein dem zu projicirenden gleicher Kreis.

Bezeichnen hier wieder $2a$ und $2b$ resp. die grosse und kleine Axe der Ellipse, und setzt man

$$\text{Cos}\,u\,.\,\text{Sin}\,2i = \text{Cos}\,v,$$

so wird, ähnlich wie in dem besondern Falle,

$$\text{Tang}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}v) = \frac{b}{a},$$

$$r = \frac{a\,\text{Sin}\,i}{\text{Cos}\,(45^0 - \frac{1}{2}v)} = \frac{b\,\text{Sin}\,i}{\text{Sin}(45^0 - \frac{1}{2}v)};$$

Digitized by Google

oder auch

$$\text{Tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{a-b}{a+b},\ r = \text{Sin}\, i.\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die beiden Methoden, welche Gregorius a St. Vincentio für die Construction der Ellipse mittelst des Kreises gegeben hat, indem er einmal die von der Peripherie auf den Durchmesser des Kreises gefallten Perpendikel, von den Fusspunkten derselben aus, auf schräge parallele gerade Linien aufträgt, dann aber auch diese Perpendikel selbst in einem constanten Verhältnisse verändert, in unserer plagiographischen Projection des Kreises ihre gemeinschaftliche Quelle haben Die erste jener Methoden ist nichts anderes, als unsere Projection des Kreises, der auf der Ebene der xy, der Projections-Ebene, senkrecht steht und mit den andern Coordinaten-Ebenen einen beliebigen Winkel bildet; die andere ist ebenfalls die Projection eines Kreises, welcher jedoch in der Ebene xz liegt, nur bilden hier die Projectionsstrahlen mit der Projections-Ebene nicht einen Winkel von 45°, sondern einen beliebigen Winkel, den wir oben durch i bezeichnet haben.

Wenn der zu projicirende Kreis wie vorhin auf der Projections-Ebene senkrecht steht, und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so wird derselbe, während man ihm eine Drehung um seinen in die Axe der z fallenden Durchmesser beilegt, die Oberfläche einer Kugel beschreiben. Wenn man nun für beliebige Drehungswinkel u, wo u, wie oben, den Winkel bedeutet, welchen die Ebene des Kreises mit der Coordinaten-Ebene xz macht, denselben projicirt, so entstehen dadurch Ellipsen, welche sämmtlich einen gemeinschaftlichen Durchmesser haben, der dem Durchmesser des Kreises gleich ist. Zieht man durch einen der beiden Punkte, in welchen alle diese Ellipsen sich schneiden, an zwei derselben Tangenten, so ist der Winkel, welchen diese einschliessen, gleich dem Unterschiede der entsprechenden Drehungswinkel des Kreises, oder, was dasselbe ist, gleich dem Winkel, welchen die Durchschnittslinien der Ebene des Kreises und der Projections-Ebene xy einschliessen. Alle diese Ellipsen werden von einer und derselben Ellipse eingehüllt, deren Axen wir durch die folgenden Betrachtungen erhalten.

Aufgabe 2. Man sucht die plagiographische Projection einer Kugel.

Auflösung. Die Kugel wird von der Mantelfläche des Cylinders, welchen die Projectionsstrahlen bilden, in einem grössten Kreise berührt, dessen Lage gegen die Projections-Ebene leicht ermittelt werden kann. Legt man den Mittelpunkt der Kugel in den Anfangspunkt der Coordinaten und nimmt wieder die Ebene xy zur Projections-Ebene, auch die Projectionsstrahlen mit der Ebene yz parallel an, so wird, da der Neigungswinkel des Berührungskreises gegen die Projections-Ebene 45° beträgt,

$$y = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}},\ z = \sqrt{\frac{r^2-x^2}{2}};$$

Digitized by Google

wo r den Radius der Kugel bedeutet, und man erhält

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{r^2-\xi^2}{2}} + \sqrt{\frac{r^2-\xi^2}{2}} = \sqrt{r^2-\xi^2}\,.\,\sqrt{2};$$

also

$$\frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{\xi^2}{r^2} = 1,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$ und deren halbe kleine Axe $= r$ ist.

Da man sich die Kugel durch Umdrehung des grössten Kreises um einen beliebigen festen Durchmesser entstanden denken kann, so wollen wir annehmen, dass dieser in der Axe der z liege. Dann ersieht man leicht, dass sämmtliche Ellipsen, welche in der vorigen Aufgabe als Projectionen des sich um diese Axe drehenden auf der Projections-Ebene senkrechten Kreises erscheinen, von einer Ellipse eingehüllt werden, deren halbe grosse Axe $r\sqrt{2}$ und deren halbe kleine Axe r ist. Man erhält demnach folgenden Satz:

„Man ziehe in einem Kreise auf einen beliebigen Durchmesser eine Anzahl senkrechter Sehnen, und bemerke die Durchschnittspunkte mit demselben. Giebt man diesem Durchmesser eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit ihrer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ellipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Drehungswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese werden von einer Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse Axe die Sehne eines Quadranten, und deren halbe kleine Axe der Radius dieses Kreises ist."

Wenn man die zu projicirende Kugel durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene schneidet, und die dadurch entstehenden Kreise projicirt, so sind diese Projectionen wieder Kreise, und zwar ist jeder derselben demjenigen gleich, dessen Projection er ist. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen sämmtlich in der Axe der y, und sind vom Anfangspunkte der Coordinaten ebensoweit entfernt, als die in der Axe der z liegenden Mittelpunkte der ihnen entsprechenden, mit der Projections-Ebene parallelen Kreise. Von jenen Kreisen werden alle diejenigen, deren Radius nicht kleiner als $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ist, von der Projection der Kugelfläche eingehüllt, von welcher wir gesehen haben, dass sie eine Ellipse ist, welche die Sehne eines Quadranten des grössten Kreises zur halben grossen Axe und den Radius desselben zur halben kleinen Axe hat. Wir erhalten demnach einen Satz, welchen Herr Professor Steiner im dritten Bande des Crelle'schen Journals für reine und angewandte Mathematik. S. 208., wie folgt, ausgesprochen hat:

Digitized by Google

„Zieht man in einem gegebenen Kreise Sehnen, die sämmtlich parallel sind, beschreibt über jeder, als Durchmesser genommen, einen Kreis, so wird jeder von diesen Kreisen (wozu auch der gegebene gehört) von einer bestimmten Ellipse eingeschlossen und in zwei Punkten berührt. Die Ellipse hat den mit den genannten Sehnen parallelen Durchmesser AB des gegebenen Kreises zur kleinen Axe, deren Quadrat gerade die Hälfte des Quadrats der grossen Axe ist. Diejenigen Kreise jedoch, deren Durchmesser kleiner sind als $AB\sqrt{\frac{1}{2}}$ liegen innerhalb der Ellipse, ohne von ihr berührt zu werden“

Man ersieht aus diesen Beispielen, wie unsere Projectionsart angewandt werden kann, um Sätze durch geometrische Anschauung zu beweisen, welche man sonst auf analytischem Wege zu erhalten pflegt.

Wollte man den letzten Satz in Form einer Aufgabe aussprechen, so könnte man ihn auf folgende Weise fassen:

„Ein Kreis, dessen Radius r ist, liege in der Ebene xy und sein Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten. Lässt man nun den Mittelpunkt eines Kreises mit veränderlichem Radius sich in der Axe der y bewegen, und giebt diesem Radius jedesmal die Grösse, welche der Ordinate α des Mittelpunkts als Abscisse eines Punktes in der Peripherie jenes festen Kreises angehört, so werden solche bewegliche Kreise von einer krummen Linie eingehüllt, deren Gleichung gesucht wird.“

Auflösung. Die Gleichung des beweglichen Kreises in irgend einer seiner Lagen ist

$$x^2 + (y-\alpha)^2 = r^2 - \alpha^2.$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y = 2\alpha,$$

und substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

als Gleichung der gesuchten einhüllenden krummen Linie, welche demnach eine Ellipse mit halber grosser Axe $r\sqrt{2}$ und halber kleiner Axe r ist; übereinstimmend mit dem, was oben durch ganz andere Betrachtungen gefunden wurde.

Digitized by Google

Aufgabe 3. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Sphäroids, dessen Rotations-Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man die Oberfläche durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte dieser Kreise, welche sämmtlich in der Rotations-Axe liegen, bleiben auch in der Projection in ihren wahren Entfernungen von einander, wie denn auch die Rotations-Axe selbst ihre Grösse beibehält. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich, dass, wenn man die Ellipse, durch deren Rotation das Sphäroid entstanden ist, construirt, auf die Rotations-Axe beliebige rechtwinklige Ordinaten fällt, und mit denselben als Radien aus den Punkten, in welchen die Axe getroffen wird, Kreise beschreibt, diejenige krumme Linie, welche solche Kreise einhüllt, die Projection des Rotations-Sphäroids sein wird. Auf diese Weise wird man sich dieser krummen Linie mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern können.

Um diese Linie genauer kennen zu lernen, stellen wir folgende Untersuchung an. Die halbe grosse Axe der Ellipse des abgeplatteten Sphäroids, durch deren Umdrehung dasselbe entstanden ist, sei a, die halbe kleine b. Zieht man mit der grossen Axe beliebige parallele Sehnen, und beschreibt aus den Punkten, in welchen die kleine Axe von diesen getroffen wird, mit den Hälften der entsprechenden Sehnen als Radien, Kreise, so kann die einhüllende krumme Linie auch auf folgende Weise bestimmt werden. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und wenn man die Ordinate eines Mittelpunkts jener Kreise durch α bezeichnet, so ist das Quadrat des ihr entsprechenden Radius

$$a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right);$$

man hat demnach für jeden Kreis die Gleichung

$$x^2 + (y - \alpha)^2 = a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{b^2}\right).$$

Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so ergiebt sich

$$y - \alpha = \frac{\alpha a^2}{b^2},$$

also

$$\alpha = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}.$$

Digitized by Google

welcher Werth, in die obige Gleichung substituirt, als Gleichung der einhüllenden krummen Linie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1$$

ergiebt. Diese ist demnach eine Ellipse, deren Axen leicht construirt werden können. Die halbe kleine Axe ist nämlich gleich der halben grossen Axe der gegebenen Ellipse, und die halbe grosse Axe gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse. Dieser Construction wird man offenbar den Vorzug vor der ersten mittelst der Kreise geben.

Wenn das Sphäroid ein längliches, also durch Umdrehung der Ellipse um ihre grosse Axe entstanden ist, und man die Sehnen parallel mit der kleinen Axe zieht, und aus den Punkten, in welchen die grosse Axe getroffen wird, mit den entsprechenden halben Sehnen Kreise beschreibt, so ist die Gleichung der dieselben einhüllenden krummen Linie:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1,$$

d. h. diese Linie ist eine Ellipse, deren halbe kleine Axe gleich der halben kleinen Axe der gegebenen Ellipse und deren halbe grosse Axe, wieder wie vorhin, gleich der Sehne eines Quadranten derselben Ellipse ist.

In diesen beiden Sätzen ist, wie man leicht sieht, der Satz des Herrn Professor Steiner vom Kreise enthalten: man darf nur $a=b=r$ setzen, wo r den Radius des Kreises bedeutet.

Ferner ergeben sich durch Betrachtungen, welche den oben bei der Kugel angestellten ähnlich sind, folgende Sätze:

„Man ziehe in einer Ellipse mit einer Axe beliebige parallele Sehnen, und bemerke die Punkte, in welchen die andere getroffen wird. Giebt man dieser eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt, und lässt zugleich die Sehnen mit ihrer anfänglichen Richtung parallel sich fortbewegen, so liegen die Endpunkte derselben allemal in einer Ellipse. Auf diese Weise erhält man für jeden Drehungswinkel eine bestimmte Ellipse, und alle diese werden von *einer* Ellipse eingehüllt, deren halbe grosse Axe die Sehne eines Quadranten und deren halbe kleine Axe die halbe grosse oder halbe kleine Axe der gegebenen Ellipse ist, jenachdem die Sehnen mit jener oder dieser parallel sind."

„Alle diese Ellipsen haben die beiden Endpunkte derjenigen Axe, mit welcher die Sehnen parallel sind, zu gemeinschaftlichen Schneidungspunkten, und der Winkel, welchen zwei Ellipsen in einem dieser Punkte mit einander bilden, ist immer dem entsprechenden Drehungswinkel gleich."

Digitized by Google

Aufgabe 4. Man sucht die plagiographische Projection eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen, wenn eine dieser Axen auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Wenn man das Ellipsoid parallel mit der Projections-Ebene durch Ebenen schneidet, so entstehen Ellipsen, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen. Die Mittelpunkte derselben liegen sämmtlich in der auf der Projections-Ebene senkrechten Axe, welche in der Projection ihre wahre Grösse behält. Die Gleichung des zu projicirenden Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und die Projections-Ebene, wie gewöhnlich, die Ebene der xy; auch sollen, wie bisher, die Projectionsstrahlen mit der Ebene yz parallel sein und mit der Ebene xy einen Winkel von 45° bilden. Dann fallen die Projectionen der Mittelpunkte der mit der Ebene xy parallelen Ellipsen in die Axe der y, in dieselben Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, welche sie in der Wirklichkeit haben, und in dieselbe Linie fallen auch sämmtliche Axen, welche mit der Axe $2b$ parallel sind, während die mit der Axe $2a$ parallelen auf jene Linie senkrecht zu stehen kommen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich nun folgende Construction:

„Man construire eine Ellipse, welche die Axen $2a$ und $2b$ hat, trage auf $2b$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe c auf, construire die Ellipse, deren Axen $2a$ und $2c$ sind, trage auf $2a$ nach beiden Seiten vom Mittelpunkte die halbe Axe b auf, und construire eine dritte Ellipse, deren Axen $2b$ und $2c$ sind. Diese drei Ellipsen wollen wir resp. durch (a, b); (a, c); (b, c) bezeichnen. Zieht man nun mit $2a$ beliebige parallele Gerade, welche die Ellipsen (a, c) und (b, c) schneiden, und construirt über jeder dieser Sehnen Ellipsen, so dass die grössere von ihnen die grosse, die kleinere die kleine Axe wird, so ist die krumme Linie, welche diese Ellipsen einhüllt, die gesuchte Projection des Ellipsoids."

Bezeichnet man durch α den Abstand einer der parallelen Sehnen von der Axe $2a$, so hat man für die Quadrate der halben Axen der entsprechenden Ellipse die Ausdrücke:

$$a^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right) \text{ und } b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{c^2}\right),$$

also ist die Gleichung derselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-\alpha)^2}{b^2} = 1-\frac{\alpha^2}{c^2},$$

welche, in Bezug auf α differenziirt,

$$\alpha = \frac{c^2 y}{b^2 + c^2}$$

Digitized by Google

ergiebt. Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhält man für diejenige krumme Linie, welche jene Ellipsen einhüllt, folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1.$$

Diese krumme Linie ist also wieder eine Ellipse, deren halbe Axen a und $\sqrt{b^2+c^2}$ sind, aus welchem Umstande sich eine Construction unserer Aufgabe ergiebt, die ungleich einfacher als die oben angegebene ist.

Man sieht leicht, wie die Lösung der vorigen Aufgabe in dieser allgemeinen enthalten ist.

Wir können die vorhergehenden Aufgaben aber auch vollständig lösen, ohne dabei die Theorie der Enveloppen als bekannt vorauszusetzen, wenn wir die krumme Linie suchen, in welcher die zu projicirende Oberfläche von dem Strahlen-Cylinder berührt wird, und diese krumme Linie sodann projiciren. Auf diese Weise gelangt man durch plagiographische Projection zu Sätzen über einhüllende Curven.

Wenn die Gleichung der zu projicirenden Oberfläche zwischen den Coordinaten x, y, z,

$$U = 0,$$

gegeben ist, und die Gleichungen der erzeugenden Geraden eines Cylinders allgemein

$$x - az = \alpha,\ y - bz = \varphi\alpha$$

sind, so findet man bekanntlich die Gleichung des Cylinders, welcher die gegebene Oberfläche berührt, wenn man aus der Gleichung $U=0$ die partiellen Differenzialquotienten $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ bestimmt, die Ausdrücke für dieselben in die Gleichung des Cylinders

$$1 = a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

substituirt, und aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x, y, z eliminirt, wodurch ein Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α gefunden wird. Setzt man in diesen die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ durch x, y und z, so ist die dadurch entstehende Gleichung die gesuchte.

Aufgabe 5. Man sucht die plagiographische Projection einer Oberfläche, deren Gleichung $U=0$ gegeben ist.

Auflösung. Für den Fall unserer Projection haben wir, wenn die Gerade, welche den Cylinder erzeugt, mit der Ebene y:

Digitized by Google

parallel ist, und mit der Projections-Ebene xy einen Winkel von 45^0 bildet, $a=0$, $b=1$; die vier Gleichungen, welche hier in Betracht kommen, sind demnach:

$$U = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die drei Grössen x, y, z, so erhält man einen Ausdruck für $\varphi\alpha$ durch α, und wenn man die Ausdrücke für $\varphi\alpha$ und α in diesen zurück substituirt, dann aber $z=0$ setzt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und y, welche die der gesuchten Projection der gegebenen Oberfläche ist.

Diese Aufgabe und Aufgabe 1. enthalten die ganze analytische Theorie unserer Projectionsart.

Wenden wir die hier entwickelte allgemeine Theorie auf die Aufgabe 4. an, in welcher die Aufgabe 3. enthalten ist, so wird

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{y}{z} \cdot \frac{c^2}{b^2},$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergiebt die Elimination der drei Grössen x, y, z die Gleichung

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(b^2 + c^2) = (\varphi\alpha)^2,$$

also ist, wenn man die Ausdrücke für $\varphi\alpha$ und α durch x, y, z in diese Gleichung zurück substituirt, und dann $z=0$ setzt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1$$

die Gleichung für die Projection des Ellipsoids, übereinstimmend mit der oben auf anderem Wege gefundenen. Für Aufgabe 3. ist $a=b$, und man hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + c^2} = 1.$$

Aufgabe 6. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Paraboloids, dessen Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Digitized by Google

Auflösung. Schneidet man den Körper parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen; daraus ergiebt sich folgende Construction:

„Man construire die Parabel, durch deren Umdrehung um ihre Axe der Körper entstanden ist, und ziehe beliebige auf der Axe senkrechte Sehnen. Die Durchschnittspunkte nehme man zu Mittelpunkten von Kreisen, deren Radien die Hälften dieser Sehnen sind, dann ist diejenige krumme Linie, welche alle diese Kreise einhüllt, die gesuchte Projection des Paraboloids."

Die Gleichung des zu projicirenden Körpers sei

$$x^2 + y^2 = p(a - z);$$

man hat also

$$U = x^2 + y^2 + pz - ap = 0,$$

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{2y}{p},$$

$$x = \alpha,$$

$$y = z + \varphi\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt die Elimination der Grössen x, y, z die Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{p^2}{4} = ap + p\varphi\alpha,$$

also, wenn man die Ausdrücke für α und $\varphi\alpha$ zurück substituirt,

$$x^2 = p\left(\frac{p}{4} + a + y\right).$$

Die Projection ist also wieder eine Parabel, und kann hiernach mit Leichtigkeit construirt werden.

Aufgabe 7. Man sucht die plagiographische Projection eines Rotations-Hyperboloids, dessen Rotations-Axe auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Auflösung. Schneidet man den Körper durch Ebenen parallel mit der Projections-Ebene, so entstehen Kreise, welche in der Projection in ihrer wahren Grösse erscheinen, und man erhält demnach folgende Construction:

„Man construire die Hyperbel, durch deren Umdrehung der Körper entstanden ist. Auf die Rotations-Axe fälle man von beliebigen Punkten der Hyperbel Lothe, und construire mit denselben als Radien aus den entsprechenden Durchschnittspunkten der Axe Kreise. Diejenige krumme Linie, welche diese Kreise einhüllt, ist die gesuchte plagiographische Projection des Hyperboloids. Wenn der Körper ein Hyperboloid mit einem Fache ist, so hat man die Lothe auf die kleine Axe, wenn er ein Hyperboloid mit zwei Fächern ist, auf die grosse Axe zu fällen."

Digitized by Google

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) + a^2c^2 = 0$$

die Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit einem Fache ist, so hat man

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{c^2y}{a^2z} = 1,$$
$$x = \alpha,$$
$$y = z + \varphi\alpha,$$

also

$$z = \frac{c^2\varphi\alpha}{a^2 - c^2}, \quad y = \frac{a^2\varphi\alpha}{a^2 - c^2},$$

mithin, nach gehöriger Substitution, für die Gleichung der gesuchten Projection:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

die Gleichung einer Hyperbel.

Wenn

$$U = a^2z^2 - c^2(y^2 + x^2) - a^2c^2 = 0$$

die Gleichung des Umdrehungs-Hyperboloids mit zwei Fächern ist, so ergiebt sich für die Projection desselben

$$\frac{y^2}{c^2 - a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

woraus man sieht, dass dieselbe ebenfalls eine Hyperbel wird.

In sehr vielen Fällen, namentlich in solchen, wo der zu projicirende Körper von Ebenen begrenzt wird, ist es, um die plagiographische Projection zu erhalten, nicht nothwendig, zu den allgemeinen Betrachtungen zurückzugehen, ja man bedarf nicht einmal der Zeichnungen im Grund- und Aufrisse, sondern kann durch besondere Betrachtungen, welche sich auf die Gestalt des Körpers beziehen, die Projection erhalten. Dabei wird man Sätze, wie die folgenden, welche in dem Wesen der plagiographischen Projection begründet sind, anzuwenden Gelegenheit haben:

1. Alle gerade Linien, welche mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in der Projection in ihrer wahren Grösse.

2. Alle gerade Linien, welche auf der Projections-Ebene senkrecht stehen, behalten in der Projection ihre wahre Grösse.

Digitized by Google

3. Alle Winkel, deren Ebenen mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse.

4. Alle mit einander parallele gerade Linien bleiben auch in der Projection mit einander parallel.

5. Alle ebene Figuren, welche mit der Projections-Ebene parallel sind, erscheinen in dieser in ihrer wahren Grösse und Form, d. h. als jenen congruente Figuren.

u. s. w.

Diese Projections-Art eignet sich ganz besonders, um beim Unterrichte in der Stereometrie angewandt zu werden, indem nicht nur die körperlichen Gebilde sich mittelst derselben in der Ebene sehr anschaulich darstellen lassen, sondern auch viele stereometrische Sätze mit überraschender Leichtigkeit bewiesen werden können.

XXII.

Ueber den Distanzmesser mit Parallelfäden.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Dieses Instrument besteht in einem um eine horizontale Axe drehbaren Fernrohr, bei welchem in der Ebene des Fadenkreuzes zwei horizontale Fäden in geringem Abstand (etwa 2 Linien) von einander gespannt sind. Visirt man mit dem Fernrohr in horizontaler Richtung nach einer entfernten in Zolle getheilten vertikalen Latte, so lässt sich aus dem beobachteten Lattenmaasse, d. h. aus der Anzahl von Zollen, welche sich zwischen jenen zwei Parallelfäden zeigen, die Entfernung der Latte vom Objektive (oder auch von der Axe) des Fernrohrs ziemlich genau bestimmen.

Da dieser Distanzmesser bei detaillirten Aufnahmen grosse Bequemlichkeit und bei bedeutender Verjüngung des Planes auch hinreichende Genauigkeit gewährt, so halte ich die Mittheilung folgender Bemerkungen über seinen Gebrauch um so weniger für

Digitized by Google

nutzlos, als ich mich selbst hie und da von der unrichtigen Behandlung desselben überzeugt habe.

Vor Allem ist die Beziehung zwischen der Distanz D (der Latte von dem Objektive), dem Lattenmaasse L und den durch die Einrichtung des Fernrohrs bedingten Konstanten durch eine Gleichung auszudrücken.

Ist das Fernrohr ein astronomisches mit Einem Okular, P die Brennweite des Objektives, B das durch das Objektiv erzeugte kleine Bild des Lattenmaasses, so ist bekanntlich

$$B = \frac{P}{D-P} \cdot L,$$

daher

$$L = \frac{B}{P} \cdot D - B.$$

Eine scharfe Pointirung erfordert aber, dass das Bild B mit den Parallelfäden in Einer Vertikalebene liege, weil sonst dieses Bild hinter oder vor den Fäden schwankt. Der Fehler, welcher durch Hin- und Herbewegen des Auges leicht erkannt wird, muss durch Verschieben der Okularröhre beseitigt werden, nachdem in dieser die der deutlichen Sehweite entsprechende Entfernung zwischen dem Okular und den Parallelfäden hergestellt ist. Bei Erfüllung dieser Forderung ist aber das Bild B des Lattenmaasses genau gleich der vertikalen gegenseitigen Entfernung F der Parallelfäden, daher

$$L = \frac{F}{P} \cdot D - F.$$

Durch Verschiebung des Okulars in der Okularröhre wird alsdann das Lattenmaass nicht verändert; das Lattenmaass ist also von der Beschaffenheit des Auges unabhängig.

Die Konstante F kann nun unmittelbar gemessen werden. Da sich nämlich F sehr leicht bis auf $\frac{1}{15}$ Linie genau messen, dagegen L bei einer bedeutenderen Distanz nicht wohl über $\frac{1}{10}$ Zoll genau beobachten lässt, so verdient der bei der unmittelbaren Messung von F begangene Fehler keine Berücksichtigung.

Man hat also nur noch die Konstante $\frac{F}{P}$ durch wiederholte Beobachtungen von L für eine genau gemessene Distanz D zu bestimmen.

Ist z. B. $F = 0{,}19''$ und ist für $D = 5000''$ das arithmetische Mittel der Werthe von L aus 10 Beobachtungen $= 88{,}1''$ gefunden worden, so hat man

$$\frac{F}{P} = \frac{L+F}{D} = \frac{88{,}1+0{,}19}{5000} = 0{,}01766,$$

Digitized by Google

daher die allgemeine Formel

$$L = 0{,}01766 \,.\, D - 0{,}19$$

und

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 11.$$

Sollte die Formel den Werth von D nicht vom Objektiv aus, sondern von der Axe aus angeben, und betrüge die Entfernung der Axe vom Objektive 6″, so hätte man

$$D = 56{,}625 \,.\, L + 17.$$

Hat das Fernrohr mehrere Okulare (wie jedes terrestrische Fernrohr), so hängt das durch das vorletzte Okular erzeugte kleine Bild B (welches durch das letzte Okular wie durch eine Loupe betrachtet wird) nicht nur von D und von den konstanten Brennweiten der Linsen und den konstanten gegenseitigen Entfernungen der Okulare, sondern auch von der veränderlichen Entfernung E des Objektivs vom ersten Okular ab. Ist nun, zum Behuf der Herstellung des für die deutliche Sehweite S erforderlichen Abstandes zwischen dem Fadenkreuze (mit den Parallelfäden) und dem letzten Okular, dieses letztere in der Okularröhre verschiebbar und das Fadenkreuz fest, so ändert sich bei den Beobachtungen E nur mit D, und eine Veränderung von B kann nur von einer Veränderung von D herrühren. Ist dagegen in der Okularröhre das letzte Okular fest und das Fadenkreuz verschiebbar, so ändert sich E auch mit S, daher giebt alsdann eine und dieselbe Distanz D für verschiedene Augen verschiedene Bilder B eines und desselben Gegenstandes; wird also das Bild der Latte in die Ebene des Fadenkreuzes gerückt, so erscheinen verschiedenen Augen verschiedene Anzahlen von Zollen zwischen den Parallelfäden, d. h. das Lattenmaass L ist bei gleicher Distanz von der Sehweite S abhängig. Hat also das Fernrohr dieses Distanzmessers mehrere Okulare, so muss das Fadenkreuz in der Okularröhre fest sein.

Für jedes solche Fernrohr erhält man gleichfalls die Formel

$$D = a \,.\, L + b,$$

wo a und b für ein und dasselbe Instrument Konstanten sind, welche durch Beobachtungen bestimmt werden müssen.

Findet man z. B. für $D = 500''$ den mittleren Werth von L aus mehreren Beobachtungen $= 8{,}6''$ und für $D = 5000''$ den mittleren Werth von $L = 88{,}7''$, so hat man die zwei Gleichungen

$$500 = a \,.\, 8{,}6 + b,$$
$$5000 = a \,.\, 88{,}7 + b;$$

woraus sich $a = 56{,}14$ und $b = 17$, also allgemein

$$D = 56{,}14 \,.\, L + 17$$

ergeben würde.

Digitized by Goog

Man könnte auch für beliebig viele Werthe von D die zugehörigen Werthe von L beobachten, und die Konstanten f und g der Gleichung

$$L = f.D - g$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wodurch aber die Rechnung ohne Nutzen verwickelt würde.

Es versteht sich, dass sich alle Distanzen D auf einen und denselben Punkt des Instruments als Anfangspunkt beziehen müssen, und dass dieser Punkt bei der Messung einer Station jedesmal genau über dem einen Endpunkt der Station liegen muss, während im anderen Endpunkt die Latte möglichst vertikal aufgestellt wird.

Auch darf nicht übersehen werden, dass die Konstanten sich ändern müssen, wenn neue Parallelfäden eingezogen werden, dass also alsdann diese Konstanten wieder von Neuem aus Beobachtungen zu bestimmen sind.

Bisher wurde die Visirlinie (optische Axe) als (wenigstens nahe) horizontal vorausgesetzt. Ist sie unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt, während bei vertikaler Stellung der Latte das Lattenmaass L abgelesen wird, so würde das Lattenmaass, wenn die Latte senkrecht zur Visirlinie gehalten würde, nur $= L.\cos\alpha$ sein; daher ist die Entfernung des Punktes, in welchem die Visirlinie die Latte trifft, nur $= a.L.\cos\alpha + b$, folglich die horizontale Projektion dieser Entfernung

$$D = (a.L.\cos\alpha + b).\cos\alpha,$$

wofür bei kleinen Winkeln bis zu 10^0 ohne Bedenken

$$D = (a.L + b).\cos^2\alpha$$

gesetzt werden kann. Für Winkel bis etwa 10^0 kann man aber, wenn α in Graden gegeben ist, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \alpha^2.\sin^2 1^0 = 1 - \alpha^2.0{,}0003$ setzen, so dass man

$$D = aL + b - (aL + b).\alpha^2.0{,}0003$$

hat. Um den Winkel α bestimmen zu können, muss der Distanzmesser mit einer Libelle und einem vertikalen Gradbogen versehen sein. Es ist hinreichend, wenn letzterer in Grade getheilt ist, wo sich dann Viertelgrade noch sehr leicht schätzen lassen.

Für bequemeren Gebrauch wird man sich nach der Formel $D = aL + b$, nachdem man a und b bestimmt hat, eine Tabelle berechnen, worin man zu jedem beobachteten Lattenmaasse L die entsprechende Distanz D (für horizontale Visirlinie) aufsuchen kann.

Wird der Distanzmesser als Kippregel auf dem Messtisch gebraucht, so erleichtert man sich die Aufnahme sehr, wenn man nach der festgesetzten Verjüngung des Planes einen Maassstab entwirft, der für jedes Lattenmaass die entsprechende Distanz unmittelbar giebt.

Digitized by Google

Ist z. B. $D=56{,}14\,.\,L+17$ in Zollen, so hat man $D=17$ für $L=0$, und $D=5631$ für $L=100$. Trägt man nun auf einer Geraden von einem Anfangspunkt A aus nach dem verjüngten Maassstab 17 Zoll und 5631 Zoll in derselben Richtung ab, bezeichnet die bezüglichen Endpunkte durch 0 und 100, theilt den Zwischenraum zwischen 0 und 100 in 100 gleiche Theile und bezeichnet die Theilungspunkte durch 1, 2, 3....99, so ist die Gerade von A bis zum $m$ten Theilungspunkte die dem Lattenmaasse von m Zollen entsprechende Distanz in der festgesetzten Verjüngung. Auf ähnliche Weise wie beim sogenannten tausendtheiligen Maassstabe lassen sich auch die Distanzen für die Zehntelzolle hinzufügen.

Die anzunehmende Verjüngung hängt von der durch das Instrument zu erreichenden Genauigkeit ab. Ist z. B. $D=56{,}14\,.\,L+17$ und lassen sich bei den grössten gemessenen Distanzen noch die Zehntelzolle des Lattenmaasses gut schätzen, so erhält man die Distanzen auf $56\times 0{,}1=5{,}6''$ genau. Da man nun der Erfahrung gemäss Linien mit dem Zirkel auf $\frac{1}{15}$ Linie ($\frac{1}{2}$ Millimeter) genau messen kann, so muss $\frac{1}{15}$ Linie des wahren Maassstabes wenigstens $5{,}6''=56'''$ des verjüngten betragen, also $1'''$ des wahren Maassstabes wenigstens $15\times 56=840'''$ des verjüngten; die Verjüngung müsste also in diesem Falle höchstens $\frac{1}{840}$, dürfte aber kleiner (z. B. $\frac{1}{1000}$) sein. Liessen sich bei den grössten gemessenen Distanzen nur noch Viertelzolle schätzen, so dürfte die Verjüngung höchstens $\frac{1}{2100}$ sein.

XXIII.

Ueber Distanzmesser.

Von

dem Herausgeber.

1.

Da der Distanzmesser mit der Distanzlatte, für welchen Herr Professor v. Langsdorff in dem vorhergehenden Aufsatze eine Theorie geliefert hat, ein in der Praxis jedenfalls sehr viele Bequemlichkeiten darbietender Apparat ist, so will ich mir erlauben,

Digitized by Google

die Theorie desselben in dem vorliegenden Aufsatze noch nach den Ansichten zu entwickeln, welche ich selbst über diesen Gegenstand der Praxis habe.

Wenn wir uns einen leuchtenden Punkt und von demselben auf die Axe eines Fernrohrs ein Perpendikel gefallt denken, die Entfernung des Fusspunktes dieses Perpendikels von dem ersten Elemente *) des Objectiv-Systems durch p, die gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen des leuchtenden Punktes und seines dem letzten Elemente des Ocular-Systems, von welchem die Strahlen unmittelbar in's Auge gelangen, entsprechenden Bildes aber respectivé durch q und Q bezeichnen; so ist, wenn A und B zwei constante, d. h. bloss von den unveränderlichen Bestimmungsstücken der Elemente des Objectiv-Systems und des Ocular-Systems und der unveränderlichen Lage derselben gegen einander in jedem dieser beiden Systeme einzeln genommen abhängende Grössen bezeichnen, unter der Voraussetzung einer genauen Einstellung des Fernrohrs zum deutlichen Sehen, für dasselbe Auge, und unter der Bedingung, dass man das Auge immer an dieselbe Stelle hinter dem letzten Elemente des Ocular-Systems hält, wenigstens mit grosser Annäherung:

$$1) \quad \frac{q}{Q} = A + Bp.$$

Wegen des allgemeinen Beweises dieses Satzes, welcher sich hier ohne Weitläufigkeit nicht geben lässt, muss ich mir erlauben auf den nach Verlauf von ein Paar Wochen erscheinenden, die allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope enthaltenden ersten Theil meiner Optischen Untersuchungen. Leipzig. 1846. S. 174. §. 23. Nro. 5. zu verweisen, indem ich hier nur bemerke, dass dieser Beweis sich hauptsächlich auf die auch in den beiden Aufsätzen Archiv. Theil VI. Nro. X. und Nro. LIV. entwickelten Formeln gründet.

Nach meiner Meinung wird der Distanzmesser am besten mit zwei in der Axe des Fernrohrs sich senkrecht durchschneidenden Fäden, von denen bei richtiger Aufstellung des Instruments sich der eine in horizontaler, der andere in vertikaler Lage befinden muss, und ausserdem mit noch zwei dem in Rede stehenden horizontalen Faden in möglichst genau gleichen Abständen von demselben parallelen Fäden versehen. Bei dem Gebrauche richtet man jederzeit die Axe des Fernrohrs genau nach dem Mittelpunkte oder überhaupt nach irgend einem bestimmten Punkte M der vertikal aufgestellten Distanzlatte, liest das zwischen dem mittleren horizontalen Faden und einem der beiden ihm parallelen Fäden enthaltene Lattenmaass ab, oder bedient sich dabei auch der beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden zugleich, wobei wir immer das dem über der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende

*) Unter den Elementen eines Spiegel- und Linsen-Systems verstehe ich die einzelnen Spiegel und Linsen, aus denen dasselbe besteht, welche in dem Systeme immer eine unveränderliche Lage gegen einander haben.

Digitized by Google

Lattenmaass als positiv, das dem unter der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkte der Latte entsprechende Lattenmaass als negativ betrachten wollen, und misst an einem zweckmässig angebrachten Höhenkreise den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont, indem man denselben als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die nach dem Punkte M gerichtete Visirlinie des Fernrohrs über oder unter der durch dessen Drehpunkt gehenden Horizontalen liegt. Dass alle nöthigen Hülfsmittel zur feinen Einstellung und genauen Aufstellung an dem Instrumente angebracht sein müssen, versteht sich von selbst.

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Punktes M von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch e, die constante Entfernung des ersten Elements des Objectiv-Systems von dem Drehpunkte des Fernrohrs durch Θ, den Neigungswinkel der nach dem Punkte M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs gegen den Horizont durch i, das an einem der beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden abgelesene Lattenmaass durch λ; so erhellet aus Taf IV. Fig. 2. auch ohne weitere Erläuterung sogleich, dass in der Gleichung 1) in völliger Allgemeinheit

$$p = e - \Theta + \lambda \sin i, \quad q = \lambda \cos i$$

zu setzen ist, wodurch dieselbe die Gestalt

$$2) \quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

oder

$$3) \quad \lambda \cos i = AQ + BQ(e - \Theta + \lambda \sin i)$$

erhält. Weil nun aber für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden offenbar Q eine constante Grösse ist, so sind für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden auch AB und BQ constante Grössen, und wir können also

$$4) \quad G = AQ, \quad H = BQ;$$

wo G und H für denselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden constante Grössen sind, setzen, wodurch die Gleichung 3) in die folgende übergeht:

$$4) \quad \lambda \cos i = G + H(e - \Theta + \lambda \sin i).$$

Alles kommt nun zuvörderst auf die Bestimmung der beiden Constanten G und H an. Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E, E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$L, L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots\ldots$$

Digitized by Google

des Lattenmaasses λ, natürlich immer an demselben dem mittleren horizontalen Faden parallelen Faden, und die entsprechenden Werthe

$$J\,,\ J_1\,,\ J_2\,,\ J_3\,,\ J_4\,,\ \ldots\ldots$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der beiden Constanten G und H die folgende Reihe von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} L\cos J = G + (E - \Theta + L\sin J)\,H, \\ L_1\cos J_1 = G + (E_1 - \Theta + L_1\sin J_1)\,H, \\ L_2\cos J_2 = G + (E_2 - \Theta + L_2\sin J_2)\,H, \\ L_3\cos J_3 = G + (E_3 - \Theta + L_3\sin J_3)\,H, \\ L_4\cos J_4 = G + (E_4 - \Theta + L_4\sin J_4)\,H, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man nun einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwirft, worüber hier natürlich nichts weiter zu sagen ist, da in den bekannten betreffenden Schriften alles Erforderliche in grosser Ausführlichkeit nachgesehen werden kann.

Hat man aber auf diese Weise die Constanten G und H bestimmt, so erhält man nach der Gleichung 4) die Entfernung e aus den beobachteten Werthen von λ und i und dem immer leicht durch unmittelbare Messung mit aller nöthigen Genauigkeit zu bestimmenden Θ mittelst der Formel

$$6)\quad e = \Theta - \lambda\sin i + \frac{\lambda\cos i - G}{H}.$$

Wenn wir die Fehler von

$$G\,,\ H\,,\ \lambda\,,\ i\,,\ e$$

respective durch

$$\partial G\,,\ \partial H\,,\ \partial\lambda\,,\ \partial i\,,\ \partial e$$

bezeichnen, und dieselben als Differentiale betrachten, so haben wir nach 4) eigentlich die Gleichung

$$(\lambda+\partial\lambda)\cos(i+\partial i) = G+\partial G + (H+\partial H)\{e+\partial e-\Theta+(\lambda+\partial\lambda)\sin(i+\partial i)\},$$

also, weil e aus der Gleichung

$$\lambda\cos i = G + H(e - \Theta + \lambda\sin i)$$

bestimmt worden ist, nach den Principien der Differentialrechnung, wie man leicht findet:

Digitized by Google

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda \sin i\,\partial i = \partial G + (e - \Theta + \lambda \sin i)\,\partial H + H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda \cos i\,\partial i),$$

d. i.

$$\cos i\,\partial\lambda - \lambda \sin i\,\partial i = \partial G + \frac{\lambda \cos i - G}{H}\,\partial H + H(\partial e + \sin i\,\partial\lambda + \lambda \cos i\,\partial i),$$

und folglich

$$7)\quad \partial e = (\cos i - H \sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda\cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Soll ∂i in Secunden ausgedrückt sein, so muss man in dieser Gleichung $\sin 1''.\partial i$ für ∂i setzen, wodurch dieselbe die folgende Gestalt erhält:

$$8)\quad \partial e = (\cos i - H \sin i)\frac{\partial\lambda}{H} - \lambda(\sin i + H\cos i)\sin 1''.\frac{\partial i}{H} - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda\cos i - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Für $i = 0$ ist

$$9)\quad \partial e = \frac{\partial\lambda}{H} - \lambda \sin 1''.\partial i - \frac{\partial G}{H} - \frac{\lambda - G}{H}\cdot\frac{\partial H}{H}.$$

Wenn man sich bei der Bestimmung der Constanten G und H der Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen will, so reichen zwei der Gleichungen 5), etwa die beiden Gleichungen

$$10)\quad \begin{cases} L\cos J = G + (E - \Theta + L\sin J)\,H, \\ L_1\cos J_1 = G + (E_1 - \Theta + L_1\sin J_1)\,H, \end{cases}$$

zur Bestimmung dieser beiden Constanten hin. Mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne Schwierigkeit:

Digitized by Google

$$11)\quad \begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1-\Theta+L_1\sin J_1)\cos J - L_1(E-\Theta+L\sin J)\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}. \end{cases}$$

oder

$$12)\quad \begin{cases} G = -\dfrac{L(E_1-\Theta)\cos J - L_1(E-\Theta)\cos J_1 - LL_1\sin(J-J_1)}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}, \\ H = \dfrac{L\cos J - L_1\cos J_1}{E-E_1+L\sin J-L_1\sin J_1}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von ∂G und ∂H hat man aber nach 10), wenn wie früher auch jetzt $\partial\Theta = 0$ gesetzt wird, was jedenfalls verstattet ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$(\cos J - H\sin J)\partial L - L(\sin J + H\cos J)\partial J - H\partial E = \partial G + (E-\Theta+L\sin J)\partial H,$$

$$(\cos J_1 - H\sin J_1)\partial L_1 - L_1(\sin J_1 + H\cos J_1)\partial J_1 - H\partial E_1 = \partial G + (E_1-\Theta+L_1\sin J_1)\partial H.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$13)\quad \begin{cases} U = \cos J - H\sin J, \\ V = L(\sin J + H\cos J), \\ W = E-\Theta+L\sin J \end{cases}$$

und

$$14)\quad \begin{cases} U_1 = \cos J_1 - H\sin J_1, \\ V_1 = L_1(\sin J_1 + H\cos J_1), \\ W_1 = E_1-\Theta+L_1\sin J_1; \end{cases}$$

so werden diese Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} U\partial L - V\partial J - H\partial E = \partial G + W\partial H, \\ U_1\partial L_1 - V_1\partial J_1 - H\partial E_1 = \partial G + W_1\partial H; \end{cases}$$

und führen mittelst leichter Elimination zu den beiden folgenden Ausdrücken:

$$16)\quad \partial G = -\frac{UW_1}{W-W_1}\partial L + \frac{U_1W}{W-W_1}\partial L_1 + \frac{VW_1}{W-W_1}\partial J - \frac{V_1W}{W-W_1}\partial J_1 + \frac{HW_1}{W-W_1}\partial E - \frac{HW}{W-W_1}\partial E_1$$

Digitized by Google

und

$$17)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1 - \frac{V}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1}{W-W_1}\partial J_1 - \frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Sollen ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein, so werden diese Gleichungen:

$$18)\quad \partial G = -\frac{UW_1}{W-W_1}\partial L + \frac{U_1 W}{W-W_1}\partial L_1 + \frac{VW_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J - \frac{V_1 W \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1 + \frac{HW_1}{W-W_1}\partial E - \frac{HW}{W-W_1}\partial E_1$$

und

$$19)\quad \partial H = \frac{U}{W-W_1}\partial L - \frac{U_1}{W-W_1}\partial L_1 - \frac{V \sin 1''}{W-W_1}\partial J + \frac{V_1 \sin 1''}{W-W_1}\partial J_1 - \frac{H}{W-W_1}\partial E + \frac{H}{W-W_1}\partial E_1.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass man das Lattenmaass an den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden beobachtet habe, und dass die Gleichung 2) für den über der nach M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkt der Latte

$$20)\quad \frac{\lambda \cos i}{Q} = A + B(c - \Theta + \lambda \sin i),$$

für den unter der nach M gerichteten Visirlinie des Fernrohrs liegenden Punkt der Latte dagegen

$$21)\quad \frac{\lambda' \cos i}{Q'} = A + B(c - \Theta + \lambda' \sin i)$$

sei; so haben wir die beiden Gleichungen

$$22)\quad \begin{cases} \lambda \cos i = AQ + BQ\,(c - \Theta + \lambda \sin i), \\ \lambda' \cos i = AQ' + BQ'\,(c - \Theta + \lambda' \sin i); \end{cases}$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichung

Digitized by Google

$$23) \quad (\lambda - \lambda')\cos i = A(Q-Q') + B(Q-Q')(e-\Theta) + B(\lambda Q - \lambda' Q')\sin i$$

ergiebt. Sind nun die beiden Fäden, an denen das Lattenmaass beobachtet wird, gleich weit von dem mittleren horizontalen Faden entfernt, so ist $Q' = -Q$, also $Q - Q' = 2Q$, und die vorhergehende Gleichung wird:

$$24) \quad (\lambda - \lambda')\cos i = 2AQ + 2BQ(e-\Theta) + BQ(\lambda + \lambda')\sin i,$$

oder, wenn wir

$$25) \quad \mathfrak{A} = 2AQ, \quad \mathfrak{B} = 2BQ$$

setzen, wo natürlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind:

$$26) \quad (\lambda - \lambda')\cos i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\{e - \Theta + \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda')\sin i\}.$$

Weil aber nach den oben gemachten Voraussetzungen λ positiv, dagegen λ' negativ ist, so ist offenbar $\lambda - \lambda'$ das zwischen den beiden dem mittleren horizontalen Faden parallelen Fäden enthaltene Lattenmaass, und folglich, wenn wir dieses durch l bezeichnen:

$$27) \quad l\cos i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\{e - \Theta + \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda')\sin i\},$$

wo es nun wieder zuvörderst auf die Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ankommt.

Zu dem Ende messe man mit möglichster Genauigkeit eine Reihe von Werthen der Entfernung e, welche wir durch

$$E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ \ldots.$$

bezeichnen wollen, und bestimme die entsprechenden Werthe

$$\begin{array}{l} \mathfrak{l},\ \mathfrak{l},\ \mathfrak{l}'; \\ \mathfrak{l}_1,\ \mathfrak{l}_1,\ \mathfrak{l}'_1; \\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}'_2; \\ \mathfrak{l}_3,\ \mathfrak{l}_3,\ \mathfrak{l}'_3; \\ \mathfrak{l}_4,\ \mathfrak{l}_4,\ \mathfrak{l}'_4; \end{array}$$

u. s. w.

der Lattenmaasse

$$l,\ \lambda,\ \lambda'$$

und die entsprechenden Werthe

$$J,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ \ldots.$$

des Neigungswinkels i. Dann hat man zur Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die folgende Reihe von Gleichungen:

Digitized by Google

$$28)\quad \begin{cases} \mathfrak{l}\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \frac{1}{2}(l+l')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{l}_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{l}_2\cos J_2 = \mathfrak{A} + \{E_2 - \Theta + \frac{1}{2}(l_2+l'_2)\sin J_2\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{l}_3\cos J_3 = \mathfrak{A} + \{E_3 - \Theta + \frac{1}{2}(l_3+l'_3)\sin J_3\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{l}_4\cos J_4 = \mathfrak{A} + \{E_4 - \Theta + \frac{1}{2}(l_4+l'_4)\sin J_4\}\mathfrak{B}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man einer vollständigen Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen muss.

Hat man also auf diese Weise die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, so ergiebt sich e nach 27) mittelst der Formel

$$29)\quad e = \Theta - \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

Kann man das Glied $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i$, wo, was wohl zu beachten ist, λ und λ' entgegengesetzte Vorzeichen haben, ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so werden die vorhergehenden Formeln etwas einfacher, was hier einer weiteren Ausführung nicht bedarf, indem die betreffenden Formeln mit der grössten Leichtigkeit aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln sogleich abgeleitet werden können.

Durch Differentiation erhält man aus der Gleichung 27) auf gewöhnliche Weise

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \{e - \Theta + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin i\}\partial\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\,\partial i\}$$

oder

$$\cos i\,\partial l - l\sin i\,\partial i = \partial\mathfrak{A} + \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\partial\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\{\partial e + \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') + \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\cos i\,\partial i\},$$

und folglich

$$30)\quad \partial e = \cos i\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i(\partial\lambda+\partial\lambda') + \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\frac{\partial i}{\mathfrak{B}} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},$$

oder, wenn ∂i in Secunden ausgedrückt sein soll, auf ähnliche Art wie im Obigen:

Digitized by Google

$$31)\quad \partial e = \cos i\,\frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}\sin i\,(\partial\lambda + \partial\lambda') - \{l\sin i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(\lambda+\lambda')\cos i\}\sin 1''.\frac{\partial i}{\mathfrak{B}} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l\cos i - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Für $i=0$ ist

$$32)\quad \partial e = \frac{\partial l}{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda')\sin 1''.\partial i - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - \frac{l-\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.\frac{\partial\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}.$$

Will man sich bei der Bestimmung der Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Methode der kleinsten Quadrate nicht bedienen, so reichen zwei der Gleichungen 28), etwa die beiden Gleichungen

$$33)\quad \begin{cases} \mathfrak{l}\cos J = \mathfrak{A} + \{E - \Theta + \tfrac{1}{2}(l+l')\sin J\}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{l}_1\cos J_1 = \mathfrak{A} + \{E_1 - \Theta + \tfrac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

zur Bestimmung dieser Constanten hin. Auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination erhält man nämlich ohne Schwierigkeit:

$$34)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\dfrac{\mathfrak{l}\{E_1-\Theta+\frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\cos J - \mathfrak{l}_1\{E-\Theta+\frac{1}{2}(l+l')\sin J\}\cos l_1}{E-E_1+\frac{1}{2}(l+l')\sin J - \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1} \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{l}\cos J - \mathfrak{l}_1\cos J_1}{E-E_1+\frac{1}{2}(l+l')\sin J - \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1}. \end{cases}$$

Durch Differentiation erhält man aus den Gleichungen 33) leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$\cos J\,\partial\mathfrak{l} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J\,(\partial l + \partial l') - \{\mathfrak{l}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l+l')\cos l\}\partial J - \mathfrak{B}\,\partial E = \partial\mathfrak{A} + \{E-\Theta+\tfrac{1}{2}(l+l')\sin J\}\partial\mathfrak{B},$$

$$\cos J_1\,\partial\mathfrak{l}_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1\,(\partial l_1 + \partial l'_1) - \{\mathfrak{l}_1\sin J_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l_1+l'_1)\cos J_1\}\partial J_1 - \mathfrak{B}\,\partial E_1 = \partial\mathfrak{A} + \{E_1-\Theta+\tfrac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1\}\partial\mathfrak{B};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$35)\quad \begin{cases} \mathfrak{T} = \cos J, \\ \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J, \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{l}\sin J + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}(l+l')\cos J, \\ \mathfrak{W} = E - \Theta + \tfrac{1}{2}(l+l')\sin J \end{cases}$$

Digitized by Google

$$36)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_1 = \cos J_1, \\ \mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin J_1, \\ \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{L}_1 \sin J_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{B}(l_1+l'_1)\cos J_1, \\ \mathfrak{W}_1 = E_1 - \Theta + \frac{1}{2}(l_1+l'_1)\sin J_1 \end{cases}$$

setzen:

$$37)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}\,\partial\mathfrak{L} - \mathfrak{U}\,(\partial l+\partial l') - \mathfrak{V}\,\partial J - \mathfrak{B}\partial E = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}\,\partial\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{T}_1\partial\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{U}_1(\partial l_1+\partial l'_1) - \mathfrak{V}_1\partial J_1 - \mathfrak{B}\partial E_1 = \partial\mathfrak{A} + \mathfrak{W}_1\partial\mathfrak{B}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 38)\quad \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &+\frac{\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 39)\quad \partial\mathfrak{B} = &\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &-\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &-\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{V}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

oder, wenn ∂J und ∂J_1 in Secunden ausgedrückt sein sollen:

$$\begin{aligned} 40)\quad \partial\mathfrak{A} = &-\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L} + \frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{L}_1 \\ &+\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l+\partial l') - \frac{\mathfrak{U}_1\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial l_1+\partial l'_1) \\ &+\frac{\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J - \frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1 \\ &+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1 \end{aligned}$$

und

Digitized by Google

$$41)\quad \partial\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial\mathfrak{R}_1$$
$$- \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}+\partial\mathfrak{l}') + \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}(\partial\mathfrak{l}_1+\partial\mathfrak{l}'_1)$$
$$- \frac{\mathfrak{B}\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J + \frac{\mathfrak{B}_1\sin 1''}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial J_1$$
$$- \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1}\partial E_1.$$

II.

Ich will nun noch die Idee zu einem anderen Distanzmesser angeben, werde mich aber für jetzt durchaus nur auf die Darlegung derselben ganz im Allgemeinen beschränken, ohne mich auf Untersuchungen über die Genauigkeit, welche dieses Instrument etwa zu gewähren im Stande sein möchte, einzulassen, weil ich dabei eine grössere Anzahl dioptrischer Sätze in Anwendung zu bringen, und zu öfteren Verweisungen auf meine oben erwähnte, in diesem Augenblicke noch nicht erschienene Schrift genöthigt sein würde. Bemerken will ich jedoch, dass ich diese Untersuchung für um so nöthiger halte, weil ich mir keineswegs verhehle, dass die Ausführung des im Folgenden anzugebenden Instruments allerdings nicht geringen praktischen Schwierigkeiten unterliegen dürfte.

Wir denken uns zwei mit einander verbundene Fernröhre von sehr verschiedener Vergrösserung, deren optische Axen einander parallel sind, auf einem passenden, mit allen nöthigen Vorrichtungen zur groben und feinen Bewegung versehenen Stative aufgestellt, und verbinden mit denselben einen mikrometrischen Apparat, durch welchen die linearen Grössen der Bilder der Objecte mit grosser Genauigkeit gemessen werden können, wobei es jedenfalls am vortheilhaftesten sein wird, wenn sich die Einrichtung so treffen lässt, dass derselbe mikrometrische Apparat bei beiden Fernröhren zur Messung der linearen Grössen der Bilder gebraucht werden kann. Auch wird ein Höhenkreis zur Messung des Neigungswinkels der einander parallelen optischen Axen der beiden Fernröhre gegen den Horizont angebracht, wovon der Zweck leicht von selbst in die Augen fallen wird, wenn wir auch im Folgenden dieser Einrichtung nicht weiter Erwähnung thun werden, da es uns, wie gesagt, für jetzt nur auf die Darlegung der Idee ganz im Allgemeinen ankommt.

Eine gerade Linie, etwa ein Durchmesser eines beliebigen Objects, deren Entfernung von dem Drehpunkte des Instruments p und deren Länge q sein mag, stehe nun auf den einander parallelen optischen Axen der beiden Fernröhre senkrecht. Sind dann die mit dem mikrometrischen Apparate gemessenen linearen Grössen der Bilder dieser Linie in den beiden Fernröhren Q und Q', und bezeichnen i und i' die Entfernungen der Objectivgläser der beiden Fernröhre von dem Drehpunkte des Instruments; so hat man, wie leicht erhellen wird, nach I. 1) für die beiden Fernröhre die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \frac{q}{Q} = A + B(p-i),\quad \frac{q}{Q'} = A' + B'(p-i');$$

wo A, B und A', B' Constanten sind. Durch Elimination von q ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{A + B(p-i)}{A' + B'(p-i')},$$

und folglich

$$2)\quad p = -\frac{(A-Bi)\,Q - (A'-B'i')\,Q'}{BQ - B'Q'},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$3)\quad \mathfrak{A} = -\frac{A-Bi}{B},\quad \mathfrak{B} = \frac{A'-B'i}{B},\quad \mathfrak{C} = \frac{B'}{B}$$

setzt:

$$4)\quad p = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\frac{Q'}{Q}}{1 - \mathfrak{C}\frac{Q'}{Q}},$$

mittelst welcher Formel, wenn die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bekannt sind, die Entfernung p aus dem durch Messung von Q und Q' bestimmten Werthe von $\frac{Q'}{Q}$ berechnet werden kann.

Aus der Gleichung 4) ergiebt sich die Gleichung

$$5)\quad \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p.$$

Hat man nun durch wirkliche Messungen eine Reihe zusammengehörender Werthe von p und $\frac{Q'}{Q}$ ermittelt, so erhält man eine Reihe von Gleichungen von der Form:

$$6)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} + \frac{Q'}{Q}\mathfrak{B} + p\,\frac{Q'}{Q}\mathfrak{C} = p, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{B} + p_1\frac{Q'_1}{Q_1}\mathfrak{C} = p_1, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{B} + p_2\frac{Q'_2}{Q_2}\mathfrak{C} = p_2, \\ \mathfrak{A} + \frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{B} + p_3\frac{Q'_3}{Q_3}\mathfrak{C} = p_3, \end{cases}$$

u. s. w.

Digitized by Google

welche in Bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als unbekannte Grössen vom ersten Grade sind. Hat man drei Gleichungen dieser Art, welches die geringste erforderliche Anzahl derselben ist, so erhält man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination. Hat man dagegen mehr als drei Gleichungen von der obigen Form, so findet man die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man Gelegenheit zwei Paare zusammengehörender Werthe von p und q zu messen, so hat man nach 1) zur Bestimmung von A und B zwei Gleichungen von der Form:

$$A + (p-i)B = \frac{q}{Q}, \quad A + (p_1-i)B = \frac{q_1}{Q_1};$$

und zur Bestimmung von A' und B' zwei Gleichungen von der Form:

$$A' + (p-i')B = \frac{q}{Q}, \quad A' + (p_1-i')B' = \frac{q_1}{Q_1}.$$

Hat man aber mittelst dieser Gleichungen die Constanten A, B und A', B' gefunden, so ergeben sich die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mittelst der Formeln 3), und man kann dann zuerst p mittelst der Formel 4), und hierauf auch q mittelst einer der beiden unmittelbar aus 1) fliessenden Formeln

$$7) \quad q = \{A + B(p-i)\}Q, \quad q = \{A' + B'(p-i')\}Q'$$

berechnen.

Bemerken wollen wir endlich noch, dass man, so wie vorher q, aus den beiden Gleichungen 1) auch p eliminiren, und sich ähnliche Vorschriften wie vorher zur unmittelbaren Bestimmung von p auch zur unmittelbaren Bestimmung von q bilden könnte, welches weiter auszuführen wir jedoch füglich dem Leser überlassen können.

Mit diesen allgemeinen Andeutungen über den vorliegenden Gegenstand müssen wir uns jetzt vorläufig begnügen.

XXIV.

Kriterium der Stabilität schwimmender Körper.

von

Herrn R. Hoppe,

Lehrer der Mathematik in Keilhau bei Rudolstadt.

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers hängt bekanntlich von zwei Bedingungen ab: erstlich muss seine Gesammtschwere dem Drucke der Flüssigkeit, zweitens die Theile des Körpers einander das Gleichgewicht halten. Es giebt für jeden Körper mehr als eine Lage, und zwar im Allgemeinen eine bestimmte Anzahl derselben, für welche jene zwei Bedingungen erfüllt sind. Diese Lagen sind wieder zweierlei Art: entweder hat jede kleine Verrückung des Körpers aus derselben Rückkehr in dieselbe zur Folge, oder nicht. Im erstern Falle heisst sie stabil, und das Gleichgewicht sicher, im andern heisst dieses unsicher. Um beiderlei Lagen zu unterscheiden, hätte man demzufolge ausser der Lage des Gleichgewichts noch andere benachbarte Lagen zu betrachten, was, im Einzelnen vollzogen, eine verhältnissmässig weitläufige Rechnung erfordern würde. Der gegenwärtige Aufsatz soll nun zeigen, wie sich aus der Lage des Gleichgewichts allein das Kriterium der Stabilität entnehmen, und auf zwei, auch anderweitig häufig gebrauchte, und leicht zu findende Grössen zurückführen lässt. Da sich die Untersuchung, mit alleiniger Voraussetzung der bekanntesten Principien der Mechanik, ohne Hülfe der Differenzialrechnung führen lässt, so wollen wir die elementare Form wählen, zumal sich die analytische ohne Schwierigkeit daraus entnehmen lässt.

Die Masse eines schwimmenden Körpers sei $=m$, das verdrängte Volum der Flüssigkeit v, das specifische Gewicht der letztern $=\alpha$, die positive oder negative Höhe des Schwerpunkts von m über dem Niveau $=z$, die jederzeit positive Tiefe des Schwerpunkts von v unter dem Niveau $=z'$. Alsdann lassen sich alle wirkenden Kräfte in zwei zusammensetzen: eine $=m$, welche längs z abwärts, und eine $=\alpha v$, welche längs z' aufwärts wirkt. Zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte sind aber nur dann im Gleichgewicht, wenn sie gleich sind und in einer Linie wirken.

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich die zwei bekannten Bedingungen des Gleichgewichts schwimmender Körper: 1) dass $m = \alpha v$ oder das Gewicht des Körpers gleich dem der verdrängten Flüssigkeit sei; 2) dass z und z' in eine Linie fallen, oder dass die Schwerpunkte der genannten Massen auf einer Verticale liegen.

Denkt man sich nun, dass der Körper um eine beliebige Axe eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel ε erleide, dass aber die ihn umgebende Flüssigkeit diese Bewegung mitmache: so werden die zwei Schwerpunkte ihre Lage zum Körper, und die zwei resultirenden Kräfte m und αv ihre Grösse nicht ändern; dagegen ihre Richtungen mit der Geraden $z + z'$ den Winkel ε einschliessen. Es entsteht demnach ein Kräftepaar von der Breite $(z + z') \sin \varepsilon$ und dem Momente $m(z + z') \sin \varepsilon$; dieses Paar hat die Tendenz, den Körper von seiner anfänglichen Lage zu entfernen.

Lässt man jetzt das Niveau in seine horizontale Lage zurückkehren, so werden beide Ebenen, die erste und zweite Lage, einen Winkel $= \varepsilon$ einschliessen und aus dem Körper zwei Keile herausschneiden, von denen der auftauchende dem Volum nach $= k$, der untertauchende $= k'$ sei. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die obengenannte Drehungsaxe liegen muss, damit das Gleichgewicht des Körpers mit der Flüssigkeit bei der Drehung ungestört bleibt. Es seien f und f' die vom Niveau, respective im ersten und zweiten Zustande gebildeten, Schnitte des Körpers, l ihre Durchschnittslinie oder die Drehungsaxe: so lässt sich zeigen, dass l durch den Schwerpunkt von f gehen muss. Beschreibt man nämlich über f als Grundfläche ein senkrechtes Prisma C von der Höhe h, so bildet f' mit dessen zweiter Endfläche ein schräg geschnittenes Prisma C'. Ein solches ist bekanntlich gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem Höhenperpendikel im Schwerpunkte derselben h', also

$$C = fh; \quad C' = fh'.$$

Für ein unendlich kleines ε fällt f' in den schrägen Schnitt des Prismas und deckt ihn, so dass

$$C' = C \pm (k - k')$$

wird. Damit nun v unverändert bleibt, muss $k = k'$ sein, folglich ist $C' = C$ oder $h' = h$, d. h. der Schwerpunkt von f liegt zugleich in f', und l geht durch denselben.

Durch das Zurücktreten der Flüssigkeit ist ein neues Kräftepaar entstanden: der auftauchende Theil des Körpers hat ein Gewicht $= \alpha k$ gewonnen, der untertauchende ebensoviel nämlich $\alpha k'$ verloren. Die zwei resultirenden gleichen und entgegengesetzten Kräfte werden durch die Schwerpunkte von k und k' gehen, daher die Breite des Paares gleich der Entfernung beider sein. Diese steht im Allgemeinen nicht senkrecht auf l, also wirkt das neue Paar dem alten nicht direct entgegen, sondern nur diejenige Composante desselben, welche man durch Projection jener Entfernung auf eine auf l senkrechte Ebene erhält, d. i. deren Breite die Summe der Entfernungen jener Schwerpunkte von l ist. Nennen wir die Entfernungen der Schwerpunkte von k und k' von l respective

Digitized by Google

b und b', so ist das Moment desjenigen Kräftepaars, welches den Körper in seine alte Lage direct zurückzuführen strebt, $= \alpha k(b+b')$.

Es sei jetzt e ein Element des zu k gehörigen Theiles f_0 der Fläche f, e' ein Element des zu k' gehörigen, f_1; x und x' deren Entfernungen von l. Errichtet man auf e und e' Prismen bis sie von f' als zweite Endfläche geschnitten werden, so ist deren Höhe $x \sin\varepsilon$ und $x' \sin\varepsilon$; demnach $ex \sin\varepsilon$ ein Element von k, $e'x' \sin\varepsilon$ ein solches von k'. Multiplicirt man jedes Element mit seiner Entfernung von l, und summirt alle Elemente bis man k und k' vollständig erhält, so ist die Summe respective kb und $k'b'$; folglich

$$kb = Sex^2 \sin\varepsilon, \quad kb' = Se'x'^2 \sin\varepsilon;$$
$$k(b+b') = (Sex^2 + Se'x'^2) \sin\varepsilon;$$

d. i. die Summe aller Elemente von f, jedes mit dem Quadrat seiner Entfernung multiplicirt, oder das Trägheitsmoment der Fläche f in Bezug auf die Axe l, das wir durch M bezeichnen wollen, mit $\sin\varepsilon$ multiplicirt. Mithin ist das Moment des zweiten Paares $= \alpha M \sin\varepsilon$. Setzt man beide Paare zusammen, so resultirt das Moment

$$p \sin\varepsilon = (\alpha M - m(z+z')) \sin\varepsilon.$$

Ist p positiv, so wird demnach der Körper in seine alte Lage zurückkehren, ist es negativ, sich davon entfernen, unter der Voraussetzung, dass er sich allein um l drehen kann.

Wäre der Körper nach der entgegengesetzten Seite gedreht worden, so hätte sich nur das Zeichen von ε, also auch nur das des resultirenden Moments geändert; es wäre demnach die entgegengesetzte Bewegung mit gleicher Kraft erfolgt, d. h. für positive p in die alte Lage zurück, für negative von derselben hinweg.

Damit nun die Lage des Körpers stabil sei, wird erfordert, dass p für jede Richtung von l in der Ebene f positiv sei. Da von dieser Richtung allein M abhängt, so wird p stets positiv sein, wenn es für das Minimum von M positiv ist. Bekanntlich ist das Trägheitsmoment einer Ebene überhaupt am kleinsten für eine Axe, die in derselben durch ihren Schwerpunkt geht. Daher kann man den gewonnenen Satz so aussprechen:

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist sicher oder unsicher, jenachdem das Product des specifischen Gewichts der Flüssigkeit in das kleinste Trägheitsmoment des vom Niveau gebildeten Schnittes des Körpers grösser oder kleiner ist als das Product der Körpermasse in die Höhe ihres Schwerpunkts über dem des verdrängten Volums.

Dieser Satz lässt gleichwohl noch den Fall $p=0$ unberücksichtigt, in welchem die Stabilität nicht mehr von M und $z+z'$ allein abhängt. Hier würden die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, die wir vernachlässigt haben, in Betracht kommen, und die Neigungen der Oberfläche gegen das Niveau in der Nähe desselben in die Untersuchung zu ziehen sein, was einen besondern Gegenstand für diese bilden würde.

Digitized by Google

Als Beispiel wollen wir ein homogenes rechtwinkliges Parallelepipedon wählen, welches offenbar im Gleichgewicht schwimmt, wenn zwei Flächen dem Niveau parallel sind, und die Bedingung der Stabilität dieser Lage suchen. Es sei a die verticale Kante, b und c die horizontalen, und zwar $b \geqq c$; ferner β das specifische Gewicht, das der Flüssigkeit $=1$ gesetzt. Das kleinste Trägheitsmoment des Schnittes bc ist (was wir als anderweitig bekannt voraussetzen) $=\frac{1}{12} bc^3$. Die Masse $m=v=\beta abc$, also die Höhe von $v=\beta a$. Hieraus ergiebt sich sehr leicht die Lage der Schwerpunkte; man wird finden

$$z=\frac{1}{2}a-\beta a,\ z'=\frac{1}{2}\beta a;$$

$$z+z'=\frac{1}{2}a(1-\beta);$$

folglich

$$p=M-m(z+z')=\frac{1}{12}bc^3-\frac{1}{2}\beta(1-\beta)a^2bc.$$

Demnach ist die Bedingung der Stabilität

$$\frac{1}{6}c^2-\beta(1-\beta)a^2>0,$$

$$\frac{c}{a}>\sqrt{6\beta(1-\beta)};$$

oder, wenn man β entwickelt:

$$\beta<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c^2}{6a^2}} \text{ und } \beta>\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c^2}{6a^2}}.$$

Das Maximum von $\sqrt{6\beta(1-\beta)}$ ist (für $\beta=\frac{1}{2}$) $=\sqrt{\frac{3}{2}}$; ist also

$$\frac{c}{a}>\sqrt{\frac{3}{2}},$$

so ist die genannte Lage für jedes specifische Gewicht stabil.

Digitized by Google

XXV.

Das Binomialtheorem, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus, und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis dargestellt.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Ich werde in dieser Abhandlung, in welcher ich übrigens durchaus nicht überall Neues zu geben die Absicht habe, alle die Reihen, welche für die gesammte Mathematik von der grössten Wichtigkeit, und namentlich als unentbehrlich für alle Untersuchungen über die Functionen anzusehen sind, nämlich die Binomialreihe, die Exponentialreihe, die logarithmische Reihe, die Reihen für den Sinus und Cosinus, und die Reihe für den durch seine Tangente bestimmten Arcus, zusammenhängend im Geiste der neueren Analysis darzustellen suchen, und bemerke hier nur vorläufig, dass ich bei dieser Darstellung als deren Hauptfundament die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen als bekannt voraussetze, mir aber vorbehalte, auch diese so höchst wichtige Lehre in dem Archive bald einmal mit möglichster Vollständigkeit zu entwickeln. In der vorliegenden Abhandlung kommen übrigens nur solche Sätze aus derselben zur Anwendung, welche ganz mit demselben Rechte, wie etwa die bekannten Elementarsätze von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division als Haupt- und Fundamentalsätze der gemeinen Arithmetik zu betrachten sind, als Haupt- und Fundamentalsätze der Analysis angesehen werden müssen, und daher, wie hier geschieht, allerdings füglich als einem Jeden, der überhaupt der neueren Analysis ein sorgfältiges und einigermaassen umfassendes Studium gewidmet hat, hinreichend bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Vorzüglich

Digitized by Google

bemühen werde ich mich in dieser Abhandlung, das Binomialtheorem mit möglichster Vollständigkeit und Allgemeinheit darzustellen, und als natürliche und unmittelbare Fortsetzung werde ich derselben bald eine zweite Abhandlung folgen lassen, welche die Erweiterung der in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nro. XL. S. 295. in ihren Grundelementen entwickelten Lehre von den imaginären Grössen zum Zweck hat.

§. 2.

Zuerst stellen wir uns die Aufgabe, die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

wo a, b und α sämmtlich endliche völlig bestimmte reelle Grössen sind, und

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots.$$

wie gewöhnlich die Binomial-Coefficienten für den Exponenten α nach der Ordnung bezeichnen, in allen den Fällen, wo dieselbe convergirt und also auch bloss einer Summation fähig ist, zu summiren. Weil man aber bekanntlich (Archiv. Thl. I. S. 297.)

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

wo ϱ positiv ist und, wie bekannt, der Modulus der imaginären Grösse $a+b\sqrt{-1}$ genannt wird, also nach dem Moivre'schen Theoreme (a. a. S. 301.)

$$(a+b\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos n\Theta+\sin n\Theta\sqrt{-1}),$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, setzen kann; so lässt sich die obige Reihe jederzeit auf die Form

$$\begin{aligned}
&1,\\
&\alpha_1\varrho\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_2\varrho^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_3\varrho^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_4\varrho^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

bringen, und kann daher immer summirt werden, wenn man diese letztere Reihe zu summiren im Stande ist, weshalb wir uns jetzt zuvörderst, indem wir, um die Untersuchung etwas zu verallgemeinern, x eine beliebige positive oder negative Grösse bedeuten lassen, mit der Summirung der Reihe

Digitized by Google

$$1,$$
$$\alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
u. s. w.

in allen den Fällen, wo dieselbe überhaupt möglich ist, beschäftigen, und dabei die Summe dieser Reihe, wenn es nämlich eine Summe derselben giebt, durch $F(\alpha)$ bezeichnen wollen.

§. 3.

Wenn zuerst α eine positive ganze Zahl ist, so bricht wegen der vom $(\alpha+1)$sten an verschwindenden Binomial-Coefficienten die zu summirende Reihe mit dem $(\alpha+1)$sten Gliede ab, und ist also in diesem Falle als eine endliche Reihe stets einer Summation fähig.

In der im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnung ist nun

$$1)\quad F(\alpha) = 1 + \alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) + \ldots\ldots\ldots + \alpha_\alpha x^\alpha(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1}),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$

multiplicirt:

$$\begin{aligned}&\{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha)\\ &= 1 + (1+\alpha_1)x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad + (\alpha_1+\alpha_2)x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad + (\alpha_2+\alpha_3)x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &\qquad \text{u. s. w.}\\ &\quad + (\alpha_{\alpha-1}+\alpha_\alpha)x^\alpha(\cos\alpha\Theta + \sin\alpha\Theta\sqrt{-1})\\ &\qquad + \alpha_\alpha x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta + \sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}).\end{aligned}$$

Also ist nach ein Paar bekannten Sätzen von den Binomial-Coefficienten:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
&\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha)\\
&=1+(\alpha+1)_1\,x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+(\alpha+1)_2\,x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\
&\quad+(\alpha+1)_3\,x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+(\alpha+1)_{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}(\cos(\alpha+1)\Theta+\sin(\alpha+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}$$

d. i. weil der Analogie nach die Summe der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar durch $F(\alpha+1)$ zu bezeichnen ist:

$$2)\quad F(\alpha+1)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(\alpha).$$

Weil nun wegen der Gleichung 1) augenscheinlich

$$F(1)=1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$

ist, so ist nach der Gleichung 2) successive:

$$\begin{aligned}
F(1) &= 1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\\
F(2) &= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(1)\\
&= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^2,\\
F(3) &= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(2)\\
&= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^3,\\
F(4) &= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}F(3)\\
&= \{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^4,
\end{aligned}$$

u. s. w.

und folglich offenbar allgemein:

$$3)\quad F(\alpha)=\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha,$$

wobei aber natürlich immer vorausgesetzt wird, dass α eine positive ganze Zahl ist.

Setzt man

$$\{1+x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\}^\alpha=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

so hat man zur Bestimmung des positiven Modulus ϱ und des Bogens φ die beiden Gleichungen:

$$\varrho\cos\varphi=1+x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi=x\sin\Theta;$$

Digitized by Google

aus denen sich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt und dann addirt, leicht

$$\varrho^2 = 1 + 2x\cos\Theta + x^2,$$

also

$$4)\quad \varrho = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}};$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta},$$

also

$$5)\quad \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ergiebt, wo aber, da ϱ positiv sein soll, und die Erfüllung der beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta$$

zugleich erfordert wird, der Bogen φ so genommen werden muss, dass er sich im ersten Quadranten endigt, wenn $1 + x\cos\Theta$ und auch $x\sin\Theta$ positiv ist; dagegen muss sich φ im zweiten Quadranten endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv ist; im dritten Quadranten muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ negativ und auch $x\sin\Theta$ negativ ist; im vierten Quadranten endlich muss sich φ endigen, wenn $1 + x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, und der Bogen

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

den vorher angegebenen Bedingungen gemäss genommen wird, so ist nach dem Obigen

$$6)\quad F(\alpha) = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\,(\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

oder, vollständig entwickelt:

$$7)\quad F(\alpha) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta} + \sin\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so läuft die zu summirende Reihe

Digitized by Google

$$1,$$
$$\alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
u. s. w.

in's Unendliche fort, und erfordert daher, bevor wir zu ihrer Summation schreiten können, eine besondere Untersuchung rücksichtlich ihrer Convergenz und Divergenz.

Weil nun nach der Theorie der Binomial-Coefficienten

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha - n}{n+1},$$

und folglich

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} = -1 + \frac{\alpha+1}{n+1}$$

ist; so nähert sich der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

wenn n wächst, der Gränze -1, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt. Immer wird sich aber, wie sogleich in die Augen fällt, eine Grösse von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass für jedes diese Grösse übersteigende n der Bruch

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = -1 + \frac{\alpha+1}{n+1}$$

negativ, und folglich

$$1 - \frac{\alpha+1}{n+1}$$

der absolute Werth dieses Bruches ist. Wenn nun n nur erst diese Grösse überstiegen hat und dann fernerhin wächst, so nähert sich offenbar der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

der Einheit immer mehr und mehr und kann derselbe beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug annimmt, woraus sich nach einem bekannten Satze der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt, dass die zu summirende Reihe

Digitized by Google

für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x convergirt, für jedes ausserhalb dieser Gränzen liegende x dagegen divergirt. Weil ferner der absolute Werth von $\alpha_n x^n$ offenbar der Modulus des allgemeinen Gliedes

$$\alpha_n x^n (\cos n\Theta + \sin n\Theta \sqrt{-1})$$

unserer Reihe ist, so bilden nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x auch die Moduli der einzelnen Glieder unserer Reihe eine convergirende Reihe.

Nehmen wir jetzt immer an, dass x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist in der eingeführten Bezeichnung für jedes α und β

$$\begin{aligned} 8)\quad F(\alpha) = 1 &+ \alpha_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \alpha_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 9)\quad F(\beta) = 1 &+ \beta_1 x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_2 x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_3 x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \beta_4 x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und folglich nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen und aus der Lehre von den imaginären Grössen, weil, was man nicht zu übersehen hat, auch die Moduli der einzelnen Glieder der beiden vorhergehenden convergirenden Reihen unter den gemachten Voraussetzungen convergirende Reihen bilden:

$$\begin{aligned} 10)\quad F(\alpha).F(\beta) = 1 &+ (\alpha_1+\beta_1)\,x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_2+\alpha_1\beta_1+\beta_2)\,x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_3+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\beta_3)\,x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ (\alpha_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3+\beta_4)\,x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

also nach dem in der Abhandlung Archiv. Thl. I. Nr. X. S. 72. bewiesenen merkwürdigen Satze von den Binomial-Coefficienten:

Digitized by Google

$$11)\quad F(\alpha).F(\beta) = 1 + (\alpha+\beta)_1\, x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_2\, x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_3\, x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) + (\alpha+\beta)_4\, x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung:

$$12)\quad F(\alpha).F(\beta) = F(\alpha+\beta).$$

Durch successive Anwendung dieser Relation erhält man aber leicht

$$13)\quad F(\alpha).F(\beta).F(\gamma)\ldots F(\mu) = F(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu).$$

Wenn $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \mu$ gesetzt und die Anzahl dieser Grössen durch n bezeichnet wird, so erhält man die für jedes positive ganze n geltende Relation

$$14)\quad \{F(\alpha)\}^n = F(n\alpha).$$

Setzt man in der Gleichung 12) die Grösse $\beta = -\alpha$, also $\alpha + \beta = 0$, so erhält man

$$15)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = F(0),$$

und folglich, weil nach dem Obigen offenbar $F(0) = 1$ ist:

$$16)\quad F(\alpha).F(-\alpha) = 1$$

oder

$$17)\quad F(-\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)} = \{F(\alpha)\}^{-1}.$$

Ist nun α eine positive ganze Zahl, so ist nach 3)

$$F(\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\alpha},$$

und folglich nach 17)

$$18)\quad F(-\alpha) = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{-\alpha}.$$

Ist ferner $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, wo λ eine positive oder negative, μ eine positive ganze Zahl sein soll, so ist nach 14)

$$\{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = F(\mu\tfrac{\lambda}{\mu}) = F(\lambda),$$

und folglich nach 3) und 18):

Digitized by Google

$$19)\quad \{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = \{1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\}^{\lambda}.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine positive Grösse ist, so haben wir zur Bestimmung von ϱ und φ wie oben die beiden Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = 1 + x\cos\Theta,\quad \varrho\sin\varphi = x\sin\Theta;$$

aus denen auf gewöhnliche Weise

$$20)\quad \varrho = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

folgt. Ferner erhält man aus diesen beiden Gleichungen durch Division

$$21)\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta},$$

also

$$22)\quad \varphi = \operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}.$$

Weil jetzt nach der Voraussetzung x zwischen -1 und $+1$ liegt, und folglich offenbar

$$\cos\varphi = \frac{1 + x\cos\Theta}{\varrho}$$

stets positiv ist, so werden wir den beiden obigen Gleichungen auf die einfachste Weise genügen, wenn wir für φ den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen nehmen, dessen Tangente die Grösse

$$\frac{x\sin\Theta}{1 + x\cos\Theta}$$

ist. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Vorgehenden

$$1 + x(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$= (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}),$$

und folglich nach 19):

$$23)\quad \{F(\tfrac{\lambda}{\mu})\}^{\mu} = (1 + 2x\cos\Theta + x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\lambda},$$

oder nach dem Moivre'schen Satze:

Digitized by Google

$$24)\quad |F(\tfrac{\lambda}{\mu})|^{\mu} = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\lambda\varphi+\sin\lambda\varphi\sqrt{-1}).$$

Also ist nach der Lehre von den imaginären Grössen (Archiv. Th. I. S. 302.), wenn k eine ganze Zahl bezeichnet:

$$25)\quad F(\tfrac{\lambda}{\mu}) =$$

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

wo es nun auf die Bestimmung von k ankommt.

Es erhellet aber leicht, dass k nicht von x abhängig sein kann. So lange nämlich x zwischen -1 und $+1$ liegt, und folglich die Reihe convergirt, ändert sich $F(\frac{\lambda}{\mu})$, und folglich auch

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}+\sin\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}\sqrt{-1}),$$

stetig, wenn x sich stetig ändert. Also muss sich offenbar auch

$$\frac{\lambda\varphi+2k\pi}{\mu}$$

stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Da nun aber

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

sich stetig ändert, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert, so muss k offenbar entweder von x unabhängig sein, oder sich stetig ändern, wenn x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ sich stetig ändert. Letzteres ist aber, weil k eine ganze Zahl ist, nicht möglich, und k muss folglich von x unabhängig sein, wie behauptet wurde. Kann man also k für irgend einen besondern Werth von x bestimmen, so wird k im Allgemeinen bestimmt sein. Setzt man nun in der Gleichung 22) die Grösse $x=0$, so ist auch der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmende Bogen $\varphi=0$, und folglich nach 25)

$$1 = \cos\frac{2k\pi}{\mu}+\sin\frac{2k\pi}{\mu}\sqrt{-1},$$

also

$$\cos\frac{2k\pi}{\mu}=1,\quad \sin\frac{2k\pi}{\mu}=0.$$

Folglich ist offenbar, wenn k_1 eine ganze Zahl bezeichnet,

Digitized by Google

$$\frac{2k\pi}{\mu} = 2k_1\pi,$$

also nach 25)

$$F(\tfrac{\lambda}{\mu}) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}\{\cos(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi)+\sin(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi)\sqrt{-1}\},$$

und folglich, weil nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi) = \cos\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi,\ \sin(\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+2k_1\pi) = \sin\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi$$

ist:

$$26)\quad F(\tfrac{\lambda}{\mu}) = (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\lambda}{2\mu}}(\cos\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi+\sin\tfrac{\lambda}{\mu}\varphi\sqrt{-1}).$$

Fasst man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich überhaupt Folgendes.

Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes x

$$\begin{aligned}27)\quad &(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})\\ &= 1+\alpha_1 x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ &\quad+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

verschwinden, so ist, wie aus dem Vorhergehenden von selbst erhellet, die Summe

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$

jederzeit als verschwindend zu betrachten. Auch hat man zu bemerken, dass in diesem Falle die Grösse

Digitized by Google

$$1+2x\cos\Theta+x^2=(1+x\cos\Theta)^2+x^2\sin\Theta^2$$

verschwindet.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x

$$\begin{aligned}28)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})\\ =1+\alpha_1 x\,(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ +\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wo

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für jedes ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegende x divergirt in dem Falle, wenn α keine positive ganze Zahl ist, die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 28), und hat daher keine Summe.

Hieraus ergeben sich nun auch unmittelbar die beiden folgenden wichtigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}29)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha\varphi\\ =1+\alpha_1 x\cos\Theta+\alpha_2 x^2\cos 2\Theta+\alpha_3 x^3\cos 3\Theta+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30)\quad (1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha\varphi\\ =\alpha_1 x\sin\Theta+\alpha_2 x^2\sin 2\Theta+\alpha_3 x^3\sin 3\Theta+\ldots;\end{aligned}$$

für jedes x, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für jedes zwischen den Gränzen -1 und $+1$ liegende x, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle ist

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

und muss sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ positiv, $1+x\cos\Theta$ negativ und $x\sin\Theta$ negativ, $1+x\cos\Theta$ positiv und $x\sin\Theta$ negativ ist. Im zweiten Falle ist

Digitized by Google

$$\varphi = \text{Arc tang} \frac{x \sin \Theta}{1 + x \cos \Theta}$$

und muss immer zwischen den Gränzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

§. 4.

Die Reihe

$$1,\ \alpha_1 (a + b\sqrt{-1}),\ \alpha_2 (a + b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3 (a + b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

kann nun leicht summirt werden.

Zu dem Ende setze man

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$

so erhält man

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\Theta = \frac{a}{\varrho},\ \sin\Theta = \frac{b}{\varrho};$$

und die gegebene Reihe wird:

$$\begin{aligned}
&1,\\
&\alpha_1 \varrho\ (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_2 \varrho^2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}).\\
&\alpha_3 \varrho^3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\
&\alpha_4 \varrho^4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\
&\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Die Summe dieser letzteren Reihe ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(1 + 2\varrho\cos\Theta + \varrho^2)^{\frac{\alpha}{2}} (\cos\alpha\varphi + \sin\alpha\varphi\sqrt{-1}),$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang} \frac{\varrho \sin\Theta}{1 + \varrho\cos\Theta} = \text{Arc tang} \frac{b}{1 + a}$$

ist, für jedes positive $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$, d. i. für jedes a und b, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für $\varrho < 1$, d. i. für $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Im ersten Falle, wenn nämlich α eine positive ganze Zahl ist, muss der Bogen φ so genommen werden, dass er sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, jenachdem $1 + a$ positiv und b positiv, $1 + a$ negativ und b positiv, $1 + a$ negativ und b negativ, $1 + a$ positiv

Digitized by Google

und b negativ ist. Im zweiten Falle, wenn nämlich α keine positive ganze Zahl ist, hat man den Bogen φ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Weil nun

$$1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2=1+2a+a^2+b^2=(1+a)^2+b^2$$

ist, so ist

$$31)\quad \{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a}).\sqrt{-1}\}$$

$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots$$

für jedes a und b, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für $\sqrt{a^2+b^2}<1$, wenn α keine positive ganze Zahl ist. Für $\sqrt{a^2+b^2}>1$ ist die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach dem Obigen offenbar divergent, wenn α keine positive ganze Zahl ist.

Der Bogen

$$\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}$$

muss, wenn α eine positive ganze Zahl ist, sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

verschwinden, so hat man nach dem Vorhergehenden die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arc\,tang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

als verschwindend zu betrachten. Auch hat man zu bemerken, dass in diesem Falle die Grösse $(1+a)^2+b^2$ verschwindet.

Wir wollen nun den Fall, wenn $b=0$ ist, noch besonders betrachten.

Zuerst sei α eine positive ganze Zahl.

Wenn $1+a$ positiv ist, so muss sich nach dem Vorhergehenden, da man $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ

Digitized by Google

betrachten kann, $\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}$ im ersten oder im vierten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a} = 2k\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}) = \cos 2\alpha k\pi = +1,$$

$$\sin(\alpha \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}) = \sin 2\alpha k\pi = 0;$$

und folglich nach 31)

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Weil aber nach dem Obigen die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

natürlich immer positiv genommen werden muss, und nach der Voraussetzung $1+a$ positiv ist, so ist offenbar

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^{\alpha},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Wenn $1+a$ negativ ist, so muss sich nach dem Vorhergehenden, da man $b=0$ sowohl als positiv, als auch als negativ betrachten kann, $\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}$ im zweiten oder dritten Quadranten endigen, welche zwei Fälle unter der gemachten Voraussetzung offenbar in der Gleichung

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a} = (2k+1)\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet, die auch Null sein kann, zusammengefasst werden können. Also ist

$$\cos(\alpha \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}) = \cos\alpha(2k+1)\pi = \pm 1,$$

$$\sin(\alpha \operatorname{Arc\,tang}\frac{b}{1+a}) = \sin\alpha(2k+1)\pi = 0;$$

Digitized by Google

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem α eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Folglich ist nach 31) immer mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots,$$

wo die Quadratwurzel

$$\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

nach dem Obigen bekanntlich immer positiv genommen werden muss. Hält man aber dies und die vorher wegen des Zeichens gegebene Bestimmung fest, so wird leicht erhellen, dass allgemein

$$\pm\{(1+a)^2\}^{\frac{\alpha}{2}} = (1+a)^{\alpha},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden auch in diesem Falle wieder

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

ist.

Wenn also α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a:

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

Wenn α keine positive ganze Zahl und a zwischen den Gränzen -1 und $+1$ enthalten ist, so muss man nach dem Vorhergehenden $\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$ immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle immer

$$\text{Arc tang}\frac{b}{1+a} = 0$$

gesetzt werden muss, und daher nach 31)

$$(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\ldots.$$

ist, wenn man nur beachtet, dass im vorliegenden Falle nach dem Obigen offenbar $(1+a)^{\alpha}$ immer positiv zu nehmen ist.

Wenn α keine positive ganze Zahl ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist nach dem Obigen die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots.$$

offenbar divergent.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

Es ist

32) $(1+a)^{\alpha} = 1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\alpha_3 a^3+\alpha_4 a^4+\cdot$

Digitized by Google

für jedes a, wenn α eine positive ganze Zahl ist, und für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende a, wenn α keine positive ganze Zahl ist, unter der Bedingung, dass man in diesem letzteren Falle $(1+a)^\alpha$ immer positiv nimmt. Wenn α keine positive ganze Zahl ist und a ausserhalb der Gränzen -1 und $+1$ liegt, so ist die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der obigen Gleichung divergent.

§. 5.

Im vorhergehenden Paragraphen sind in dem Falle, wenn α keine positive ganze Zahl ist, bloss die beiden Fälle, wenn

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1 \text{ und } \sqrt{a^2+b^2} > 1$$

ist, betrachtet worden, so dass uns also jetzt noch die Betrachtung des Falls, wenn

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1$$

ist, obliegt, wobei wir die drei folgenden Fälle unterscheiden werden:

$$-\infty < \alpha \lesseqgtr -1,$$
$$-1 < \alpha < 0,$$
$$0 < \alpha < +\infty.$$

1. Es sei

$$-\infty < \alpha \lesseqgtr -1.$$

In diesem Falle kann

$$\alpha = -1-\delta,$$

wo $\delta \gtreqless 0$ ist, gesetzt werden.

Durch diese Substitution erhält man

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha-n}{n+1} = -\alpha_n \cdot \frac{\delta+n+1}{n+1}.$$

Weil nun natürlich n nur eine positive ganze Zahl sein kann, und folglich für jedes n

$$\frac{\delta+n+1}{n+1} \gtreqless 1$$

ist, so ergiebt sich hieraus, dass der absolute Werth von α_n entweder für jedes n der Einheit gleich ist, oder fortwährend

Digitized by Google

mit n zugleich wächst, woraus unmittelbar hervorgeht, dass in diesem Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \ldots.$$

divergent ist. Weil aber

$$(\alpha_n)^2 = (\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

ist, so ist auch der Werth von

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

entweder für jedes n der Einheit gleich, oder wächst fortwährend zugleich mit n. Sollten nun die Reihen

$$1,\ \alpha_1 \cos\Theta,\ \alpha_2 \cos 2\Theta,\ \alpha_3 \cos 3\Theta,\ \alpha_4 \cos 4\Theta,\ \ldots.;$$
$$\alpha_1 \sin\Theta,\ \alpha_2 \sin 2\Theta,\ \alpha_3 \sin 3\Theta,\ \alpha_4 \sin 4\Theta,\ \ldots..$$

beide convergent sein; so müsste sich jedenfalls, wenn n wächst, sowohl der absolute Werth von $\alpha_n \cos n\Theta$, als auch der absolute Werth von $\alpha_n \sin n\Theta$, der Null nähern, und müsste derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Also müsste sich offenbar auch

$$(\alpha_n \cos n\Theta)^2 + (\alpha_n \sin n\Theta)^2$$

der Null nähern, wenn n wächst, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Da dies mit dem Obigen in offenbarem Widerspruch steht, so können in diesem Falle die Reihen

$$1,\ \alpha_1 \cos\Theta,\ \alpha_2 \cos 2\Theta,\ \alpha_3 \cos 3\Theta,\ \alpha_4 \cos 4\Theta,\ \ldots..$$
$$\alpha_1 \sin\Theta,\ \alpha_2 \sin 2\Theta,\ \alpha_3 \sin 3\Theta,\ \alpha_4 \sin 4\Theta,\ \ldots.$$

nie beide convergent sein, und es muss folglich immer mindestens eine derselben divergiren, woraus sich nach dem bekannten Begriffe der Divergenz imaginärer Reihen unmittelbar ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta \sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4 (\cos 4\Theta + \sin 4\Theta \sqrt{-1}),$$

u. s. w.

jederzeit divergent ist. Weil nun aber, wenn wir wie im vorhergehenden Paragraphen

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho(\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1})$$

Digitized by Google

setzen, wegen der gemachten Voraussetzung

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

ist, so kann die Reihe

$$1,\ \alpha_1 (a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2 (a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3 (a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

offenbar immer auf die Form der obigen Reihe gebracht werden, woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1 (a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2 (a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3 (a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

jederzeit divergent ist.

II. Es sei

$$0 < \alpha < +\infty.$$

Man setze der Kürze wegen $\alpha + 1 = \varepsilon$, und nehme $n > \varepsilon$, so ist

$$n > 1,\ \frac{1}{n} < 1$$

und folglich nach 32)

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{1}{n} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} \\ &- \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{n^4} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n})^{-\varepsilon} = 1 &- \frac{\varepsilon}{n} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}\left\{1-\frac{\varepsilon+2}{3n}\right\}\cdot\frac{1}{n^2} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}\left\{1-\frac{\varepsilon+4}{5n}\right\}\cdot\frac{1}{n^4} \\ &+ \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)(\varepsilon+4)(\varepsilon+5)}{1.2.3.4.5.6}\left\{1-\frac{\varepsilon+6}{7n}\right\}\cdot\frac{1}{n^6} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Digitized by Google

Weil nun, wenn k eine positive ganze Zahl bezeichnet, da nach der Voraussetzung $n > \varepsilon$ ist,

$$n + kn > \varepsilon + k, \text{ d. i. } (k+1)n > \varepsilon + k$$

ist, so ist

$$\frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} < 1,$$

und folglich

$$1 - \frac{\varepsilon + k}{(k+1)n} > 0.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(1 + \frac{1}{n})^{-\varepsilon} > 1 - \frac{\varepsilon}{n},$$

d. i.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha-1} > \frac{n-\alpha-1}{n},$$

und folglich

$$-\frac{\alpha-n+1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Also ist, wenn die positive ganze Zahl $i > \varepsilon$ ist,

$$-\frac{\alpha-i-n+1}{i+n} < \left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Setzt man nun nach und nach

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n;$$

so erhält man:

$$-\frac{\alpha-i}{i+1} < \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-1}{i+2} < \left(\frac{i+2}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-2}{i+3} < \left(\frac{i+3}{i+4}\right)^{\alpha+1}.$$

u. s. w.

$$-\frac{\alpha-i-n+2}{i+n-1} < \left(\frac{i+n-1}{i+n}\right)^{\alpha+1},$$

$$-\frac{\alpha-i-n+1}{i+n} < \left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{\alpha+1};$$

Digitized by Google

und folglich durch Multiplication auf beiden Seiten der Zeichen, wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die Grössen auf der linken Seite eben so wie die Grössen auf der rechten Seite sämmtlich positiv sind:

$$(-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)} < \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Nach der Theorie der Binomial-Coefficienten ist nun, wie leicht erhellet:

$$\alpha_{i+n} = \alpha_i \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)},$$

und folglich, wenn überhaupt der absolute Werth von α_n durch (α_n) bezeichnet wird:

$$(\alpha_{i+n}) = (\alpha_i) \cdot (-1)^n \cdot \frac{(\alpha-i)(\alpha-i-1)..(\alpha-i-n+1)}{(i+1)(i+2)..(i+n)}.$$

Also ist nach dem Obigen offenbar

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n > 0$. Hieraus ergiebt sich:

$$(\alpha_i) = (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+1}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+1}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+2}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+3}\right)^{\alpha+1},$$

$$(\alpha_{i+3}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+4}\right)^{\alpha+1},$$

u. s. w.

$$(\alpha_{i+n}) < (\alpha_i) \cdot \left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kürze wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$33) \quad (\alpha_i) + (\alpha_{i+1}) + (\alpha_{i+2}) + (\alpha_{i+3}) + \ldots + (\alpha_{i+n})$$
$$< (\alpha_i) \cdot (i+1)^{\varepsilon} \left\{\frac{1}{(i+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+2)^{\varepsilon}} + \frac{1}{(i+3)^{\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{(i+n+1)^{\varepsilon}}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen $i > 1$ ist, so ist

$$i+n+1 > 1, \quad \frac{1}{i+n+1} < 1$$

Digitized by Google

für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, und folglich nach 32):

$$\left(1-\frac{1}{i+n+1}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{1}{i+n+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(i+n+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

also

$$\left(\frac{i+n}{i+n+1}\right)^{-\alpha} > 1 + \frac{\alpha}{i+n+1}$$

oder

$$\left(\frac{i+n+1}{i+n}\right)^{\alpha} > 1 + \frac{\alpha}{i+n+1},$$

und folglich

$$\frac{1}{\alpha(i+n)^{\alpha}} > \frac{1}{\alpha(i+n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}}$$

oder

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha}}\right\}.$$

Also ist, wenn man

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$$

setzt:

$$\frac{1}{(i+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^{\alpha}} - \frac{1}{(i+1)^{\alpha}}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+2)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+2)^{\alpha}}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+3)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+2)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+3)^{\alpha}}\right\},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(i+n)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n)^{\alpha}}\right\},$$

$$\frac{1}{(i+n+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{(i+n)^{\alpha}} - \frac{1}{(i+n+1)^{\alpha}}\right\};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kürze wegen wieder ε für $\alpha+1$ schreibt:

$$\frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon}$$
$$<\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{i^\alpha}-\frac{1}{(i+n+1)^\alpha}\right\},$$

also um so mehr:

$$34)\quad \frac{1}{(i+1)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+2)^\varepsilon}+\frac{1}{(i+3)^\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{(i+n+1)^\varepsilon}<\frac{1}{\alpha i^\alpha}.$$

Hieraus und aus 33) ergiebt sich nun unmittelbar

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})<(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha},$$

so dass also, wie gross auch n werden mag, die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

doch immer kleiner als die von n ganz unabhängige positive Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

bleibt. Da nun die Summe

$$(\alpha_i)+(\alpha_{i+1})+(\alpha_{i+2})+\ldots+(\alpha_{i+n})$$

fortwährend wächst, wenn n wächst, so muss es offenbar eine bestimmte Grösse geben, welcher sich diese Summe bei wachsendem n immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, und diese Grösse ist augenscheinlich entweder die Grösse

$$(\alpha_i).\frac{(i+1)^{\alpha+1}}{\alpha i^\alpha}$$

selbst oder kleiner als diese letztere Grösse, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Reihe

$$(\alpha_i),\ (\alpha_{i+1}),\ (\alpha_{i+2}),\ (\alpha_{i+3}),\ldots,$$

und folglich natürlich auch die Reihe

$$1,\ (\alpha_1),\ (\alpha_2),\ (\alpha_3),\ (\alpha_4),\ (\alpha_5),\ldots.$$

eine Summe hat, also convergirt. Folglich sind nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen auch die beiden Reihen

Digitized by Google

$$1,\ (\alpha_1)(\cos\Theta),\ (\alpha_2)(\cos 2\Theta),\ (\alpha_3)(\cos 3\Theta),\ (\alpha_4)(\cos 4\Theta),\ \ldots;$$
$$(\alpha_1)(\sin\Theta),\ (\alpha_2)(\sin 2\Theta),\ (\alpha_3)(\sin 3\Theta),\ (\alpha_4)(\sin 4\Theta),\ \ldots;$$

wo

$$(\cos\Theta),\ (\cos 2\Theta),\ (\cos 3\Theta),\ (\cos 4\Theta),\ \ldots;$$
$$(\sin\Theta),\ (\sin 2\Theta),\ (\sin 3\Theta),\ (\sin 4\Theta),\ \ldots$$

die absoluten Werthe von

$$\cos\Theta,\ \cos 2\Theta,\ \cos 3\Theta,\ \cos 4\Theta,\ \ldots;$$
$$\sin\Theta,\ \sin 2\Theta,\ \sin 3\Theta,\ \sin 4\Theta,\ \ldots$$

bezeichnen, convergent, woraus sich ferner gleichfalls nach bekannten Sätzen aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt, dass auch die Reihen

$$1,\ \alpha_1\cos\Theta,\ \alpha_2\cos 2\Theta,\ \alpha_3\cos 3\Theta,\ \alpha_4\cos 4\Theta,\ \ldots.;$$
$$\alpha_1\sin\Theta,\ \alpha_2\sin 2\Theta,\ \alpha_3\sin 3\Theta,\ \alpha_4\sin 4\Theta,\ \ldots.;$$

und daher auch die Reihe

$$1,$$
$$\alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\text{u. s. w.}$$

oder, was dasselbe ist,

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots,$$

convergent sind.

III. Es sei nun endlich

$$-1<\alpha<0.$$

Da $\alpha+1>0$ ist, so ist ganz wie im vorigen Falle, wenn $i>\alpha+1$ ist,

$$(\alpha_{i+n})<(\alpha_i)\cdot\left(\frac{i+1}{i+n+1}\right)^{\alpha+1}$$

für $n>0$, woraus man sieht, dass (α_{i+n}) sich, wenn n wächst, der Null fortwährend nähert und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Setzen wir nun der Kürze wegen

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
f(\alpha, n) = \; & 1 \\
& + \alpha_1 (\cos\Theta + \sin\Theta \sqrt{-1}) \\
& + \alpha_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta \sqrt{-1}) \\
& + \alpha_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta \sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \alpha_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta \sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten mit

$$1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}$$

multiplicirt, nach einem bekannten Satze von den imaginären Grössen

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & 1 \\
& + (1 + \alpha_1)(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha_1 + \alpha_2)(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha_2 + \alpha_3)(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)(\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

d. i. nach einem sehr bekannten Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & 1 \\
& + (\alpha+1)_1 (\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha+1)_2 (\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& + (\alpha+1)_3 (\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\alpha+1)_n (\cos n\Theta + \sin n\Theta\sqrt{-1}) \\
& \quad + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
& (1 + \cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1})\, f(\alpha, n) \\
= \; & f(\alpha+1, n) + \alpha_n (\cos(n+1)\Theta + \sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}).
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Weil $\alpha+1>0$ ist, so nähert sich $f(\alpha+1, n)$ nach II., wenn n wächst, einer gewissen bestimmten Gränze, die wir durch S bezeichnen wollen, bis zu jedem beliebigen Grade. Ferner nähert sich nach dem Vorhergehenden offenbar δ_n der Null, wenn n wächst, bis zu jedem beliebigen Grade. Folglich nähert sich offenbar auch

$$\alpha_n(\cos(n+1)\Theta+\sin(n+1)\Theta\sqrt{-1}),$$

wenn n wächst, der Null bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich

$$(1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\,f(\alpha, n)$$

der Gränze S bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n wächst. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn nicht

$$1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}=0$$

ist, $f(\alpha, n)$ sich der Gränze

$$\frac{S}{1+\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n wächst, also die Reihe

$$\begin{aligned}&1,\\&\alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),\\&\alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),\\&\alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),\\&\alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),\\&\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

convergent ist. Folglich convergirt, wenn nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, auch die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

Wenn

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist $1+a=0$, also $a=-1$, und $b=0$. Daher geht in diesem Falle die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots$$

Digitized by Google

in die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

über. Setzen wir nun, da α negativ ist, $\alpha = -\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ ist, so erhält die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

die Form

$$1, \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.$$

Da $\varepsilon > 0$ ist, so sind die Glieder der Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.$$

grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1.2}{1.2.3}, \frac{1.2.3}{1.2.3.4}, \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4.5}, \ldots.,$$

d. i. grösser als die gleichstelligen Glieder der Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots.;$$

und da nun diese Reihe bekanntlich eine divergente Reihe ist, so ist um so mehr die Reihe

$$\frac{\varepsilon+1}{1.2}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

also auch die Reihe

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

und folglich auch die Reihe

$$1, \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1.2}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}, \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)}{1.2.3.4}, \ldots.;$$

d. i. die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent. Wenn also

$$1 + a + b\sqrt{-1} = 0$$

ist, so ist die Reihe

Digitized by Google

$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$

divergent.

Der vorhergehende Beweis zeigt, dass die Reihe

$$1,\ -\alpha_1,\ \alpha_2,\ -\alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots.$$

überhaupt jederzeit divergirt, wenn α negativ ist.

Für $-1<x<+1$ ist nun bekanntlich nach §. 3.

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})+\sin(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1$$
$$+\alpha_1 x\ (\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_2 x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_3 x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_4 x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Also ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen

35) $$\{2(1+\cos\Theta)\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})+\sin(\alpha\operatorname{Arctg}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1$$
$$+\alpha_1(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\alpha_4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

wo

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

Für $\varrho = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ ist $\cos\Theta = a$ und $\sin\Theta = b$; folglich nach 35):

$$36)\quad \{2(1+a)\}^{\frac{a}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1$$
$$+ \alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{b}{1+a}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, in allen den Fällen, wo die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt.

§. 6.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich überhaupt das folgende für die gesammte Analysis in jeder Beziehung höchst wichtige Theorem.

Binomialtheorem.

A. Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a und b

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{a}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}) + \sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$= 1 + \alpha_1(a+b\sqrt{-1})$$
$$+ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2$$
$$+ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3$$
$$+ \alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\mathrm{Arc\,tang}\,\frac{b}{1+a}$$

Digitized by Google

sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, jenachdem $1+a$ positiv und b positiv, $1+a$ negativ und b positiv, $1+a$ negativ und b negativ, $1+a$ positiv und b negativ ist. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden, so würde man die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten haben, und hat auch zu bemerken, dass in diesem Falle $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}$ verschwindet.

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

I. $\sqrt{a^2+b^2}<1$.

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}&\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}\\ &=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})\\ &\quad+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2\\ &\quad+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3\\ &\quad+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

II. $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

1. Wenn $-\infty<\alpha\lesseqgtr-1$ ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

Digitized by Google

2. Wenn $-1<\alpha<0$ und nicht

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots,$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden.

Wenn $-1<\alpha<0$ und

$$1+a+b\sqrt{-1}=0$$

ist, so ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

3. Wenn $0<\alpha<\infty$ ist, so ist

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{\alpha}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\alpha_1(a+b\sqrt{-1})+\alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2+\alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3+\alpha_4(a+b\sqrt{-1})^4+\ldots\ldots\ldots,$$

und der Bogen

$$\mathrm{Arctang}\,\frac{b}{1+a}$$

muss zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Sollten Zähler und Nenner des Bruchs

Digitized by Google

$$\frac{b}{1+a}$$

beide verschwinden und also $\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{a}{2}}=0$ sein, so erhellet aus dem Obigen leicht, dass dann die Summe

$$\{(1+a)^2+b^2\}^{\frac{a}{2}}\{\cos(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})+\sin(\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{b}{1+a})\sqrt{-1}\}$$

selbst als verschwindend zu betrachten ist.

III. $\sqrt{a^2+b^2}>1$.

In diesem Falle ist die Reihe

$$1,\ \alpha_1(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha_2(a+b\sqrt{-1})^2,\ \alpha_3(a+b\sqrt{-1})^3,\ \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

Auf diese Weise muss nach meiner Ansicht das Binomialtheorem oder der Binomische Lehrsatz im Geiste der neueren, vor der älteren sich jedenfalls durch wahre, an die in der Geometrie von den Griechen uns hinterlassenen trefflichen bis jetzt unübertroffenen Muster lebhaft erinnernde *) mathematische Strenge und Evidenz auf das vortheilhafteste auszeichnenden Analysis ausgesprochen werden, und nur innerhalb der durch das Obige von selbst gesteckten Gränzen darf man dieses wichtige Theorem an-

*) Weshalb ich denn auch fortwährend die feste Ueberzeugung habe, dass es namentlich auch für das Studium der neueren Analysis keine bessere Vorbereitung giebt, als das Studium der Geometrie ganz in der strengen Weise der Griechen, und es durchaus nicht billigen kann, wenn man bei dem geometrischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, die zunächst und vorzugsweise eine formelle geistige Bildung ihrer Schüler bezwecken, diesen Weg zuweilen auf ziemlich leichtsinnige Weise verlässt. Für das gesammte weitere mathematische Studium ist diese strenge Beschäftigung mit der Geometrie von einem ganz unberechenbarem Werthe, wie nur die gehörig zu beurtheilen und zu würdigen im Stande sind, welche die Mathematik in ihrem ganzen Umfange, und insbesondere auch die strenge Begründung kennen, welche der Analysis durch die Bemühungen einiger neueren Mathematiker zu Theil geworden ist, wodurch freilich sehr Vieles, was man früher für in grosser Allgemeinheit gültig hielt, über den Haufen geworfen und in seine gehörigen Schranken zurückgewiesen worden ist. Möchten nur erst alle Theile der Analysis sich einer so strengen und gesunden Ansichten über diese Dinge völlig entsprechenden Behandlungsweise erfreuen, wie sie jetzt vorzugsweise einigen zu Theil geworden ist! Denn dass noch Vieles zu thun übrig ist, werden die am wenigsten in Abrede zu stellen geneigt sein, welche sich vorzugsweise bei dieser neueren Bearbeitung der Analysis betheiligt haben. Ob es übrigens nicht einen gewissen Mittelweg zwischen der älteren und neueren Behandlungsweise giebt, der am besten zum Ziele führen dürfte, worauf schon bei einigen Gelegenheiten von mir hingewiesen worden ist: darüber lässt sich jetzt noch nichts mit nur einiger Bestimmtheit sagen, und die Acten über alle diese Dinge dürfen bis jetzt gewiss noch keineswegs als geschlossen betrachtet werden.

Digitized by Google

wenden, wenn man sich vor Fehlschlüssen sichern und nicht zu ungereimten Resultaten führen lassen will, was an Beispielen noch besonders nachzuweisen unnütze Weitläufigkeit sein würde, da sich dergleichen Beispiele einem Jeden leicht von selbst darbieten werden. Bemerken will ich nur ganz im Allgemeinen, dass es gar nicht schwer hält, durch die unerlaubte, d. h. nicht in den gehörigen Gränzen eingeschlossene Anwendung des Binomischen Lehrsatzes zu Gleichungen zu gelangen, in denen eine positive Grösse einer negativen Grösse, oder eine reelle einer imaginären Grösse gleich gesetzt ist, und dass es überhaupt ausserordentlich leicht ist, sich auf diesem Wege zu jeder nur denkbaren mathematischen Ungereimtheit führen zu lassen, deren Grund in etwas Anderem als in der unerlaubten Anwendung des Satzes zu suchen, oder wie man wohl hin und wieder sagen hört, auf andere Weise erklären zu wollen, völlig unnützes und fruchtloses Bemühen ist.

Den Fall, wenn $b=0$ ist, wollen wir nun noch besonders in Betrachtung ziehen.

A. Wenn α eine positive ganze Zahl ist, so ist für jedes a

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots.$$

B. Wenn α keine positive ganze Zahl ist, so muss man die folgenden Fälle unterscheiden.

$$\text{I.} \quad -1 < a < +1.$$

In diesem Falle ist

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \ldots.,$$

wenn man nur berücksichtigt, dass $(1+a)^\alpha$ immer positiv zu nehmen ist.

$$\text{II.} \quad a = -1.$$

1. Wenn $-\infty < \alpha < 0$ ist, so ist die Reihe

$$1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent, und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > 0$ ist, so ist

$$0 = 1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \ldots..$$

$$\text{III.} \quad a = +1.$$

1. Wenn $-\infty < \alpha \lessgtr -1$ ist, so ist die Reihe

$$1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

divergent und hat folglich keine Summe.

2. Wenn $\alpha > -1$ ist, so ist

Digitized by Google

$$2^a = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots,$$

wobei 2^a immer positiv zu nehmen ist.

IV. $a^2 > 1$.

In diesem Falle, wo der absolute Werth von a grösser als die Einheit ist, divergirt die Reihe

$$1,\ \alpha_1 a,\ \alpha_2 a^2,\ \alpha_3 a^3,\ \alpha_4 a^4,\ \ldots\ldots,$$

und hat folglich keine Summe.

Aus den im Obigen bewiesenen Sätzen lassen sich nun verschiedene wichtige Folgerungen herleiten, wie jetzt in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 7.

Zuerst wollen wir uns mit der Summirung der merkwürdigen und wichtigen Reihe

$$1,$$
$$\frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^4}{1\ldots 4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

beschäftigen.

Aus 28) ergiebt sich, wenn $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ und εx für x gesetzt wird, wie man leicht findet:

$$37)\quad (1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}\left(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1}\right)$$
$$= 1$$
$$+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^2}{2}(1-\varepsilon)(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{3}(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^4}{4}(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{3}-\varepsilon\right)(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

für jedes zwischen

$$-\frac{1}{\varepsilon} \text{ und } +\frac{1}{\varepsilon}$$

liegende x, wobei bekanntlich

$$\varphi = \text{Arc tang}\,\frac{\varepsilon x \sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ genommen werden muss. Lässt man nun den absoluten Werth von ε sich der Null nähern, und bezeichnet die Gränze, welcher sich unter dieser Voraussetzung die Grösse

$$(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})$$

nähert, insofern es eine solche Gränze giebt, was nachher besonders untersucht werden wird, durch

$$\text{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\},$$

so erhält man aus der Gleichung 37), wenn man auf beiden Seiten derselben die Gränzen nimmt, die Gleichung:

$$\begin{aligned}38)\quad \text{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\}&\\ = 1&\\ +\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})&\\ +\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})&\\ +\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})&\\ +\frac{x^4}{1\ldots4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})&\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}$$

für jedes zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegende x, wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der Grösse

$$\text{Lim}\{(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}(\cos\frac{\varphi}{\varepsilon}+\sin\frac{\varphi}{\varepsilon}\sqrt{-1})\}$$

ankommt.

Zu dem Ende setze man

$$2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2=\Delta,$$

Digitized by Google

so ist.

$$\frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\Delta}(x\cos\Theta + \frac{\varepsilon x^2}{2}),$$

und folglich

$$(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2 x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \{(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta+\frac{\varepsilon x^2}{2}}.$$

Weil ferner

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\varepsilon x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

ist, so ist

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{\varepsilon} = \frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}, \quad \frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\varphi}{\text{tang}\,\varphi}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}$$

oder

$$\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{\cos\varphi}{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}\cdot\frac{x\sin\Theta}{1+\varepsilon x\cos\Theta}.$$

Wenn nun ε sich der Null nähert, so nähern sich offenbar auch Δ und φ, welches letztere bekanntlich zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, der Null, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt. Also nähert sich $\cos\varphi$ der Einheit, wenn ε sich der Null nähert, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur ε nahe genug bei Null annimmt, woraus sich nach dem Obigen

$$\text{Lim}\,\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{x\sin\Theta}{\text{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}$$

ergiebt. Weil φ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, so haben

$$\sin\varphi,\ \varphi,\ \text{tang}\,\varphi$$

gleiche Vorzeichen, und rücksichtlich der absoluten Werthe ist

$$\sin\varphi < \varphi < \text{tang}\,\varphi.$$

Also ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \frac{\sin\varphi}{\text{tang}\,\varphi},$$

d. i.

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi,$$

Digitized by Google

so dass also $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ zwischen 1 und $\cos\varphi$ liegt. Weil sich nun $\cos\varphi$ der Einheit nähert, wenn φ sich der Null nähert, und der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur φ nahe genug bei Null annimmt, so nähert sich offenbar um so mehr auch $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ der Einheit, wenn φ sich der Null nähert, und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur φ nahe genug bei Null annimmt. Also ist

$$\text{Lim}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 1,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\text{Lim}\,\frac{\varphi}{\varepsilon} = x\sin\Theta.$$

Weil nun ferner nach dem Obigen offenbar

$$\text{Lim}.(1+2\varepsilon x\cos\Theta+\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = \{\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}$$

ist, so ergiebt sich aus der Gleichung 38) augenscheinlich die Gleichung

$$\begin{aligned}39)\quad \{\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta)+\sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\} &= 1\\ &+\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})\\ &+\frac{x^4}{1...4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wobei man zu beachten hat, dass

$$\text{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

die Gränze bezeichnet, welcher

$$(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man Δ sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt.

Digitized by Google

Setzt man in der vorstehenden Gleichung $\Theta = 0$, so erhält man

$$\{\mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}\}^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} + \cdots,$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, und folglich für $x = 1$:

$$40)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \cdots.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$41)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \cdots,$$

so ist

$$42)\quad \mathrm{Lim}.(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = e,$$

und folglich nach 39):

$$\begin{aligned} 43)\quad & e^{x\cos\Theta}\{\cos(x\sin\Theta) + \sin(x\sin\Theta).\sqrt{-1}\} \\ &= 1 + \frac{x}{1}(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^2}{1.2}(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^3}{1.2.3}(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \frac{x^4}{1...4}(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, wodurch also die Summe der zu summirenden Reihe gefunden ist.

Für $\Theta = 0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$44)\quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...4} + \cdots.$$

für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Vergleicht man die reellen und imaginären Theile der Gleichung 43) mit einander, so erhält man die beiden folgenden für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ geltenden Gleichungen:

$$45)\quad e^{x\cos\Theta}\cos(x\sin\Theta)$$
$$= 1 + \frac{x}{1}\cos\Theta + \frac{x^2}{1.2}\cos 2\Theta + \frac{x^3}{1.2.3}\cos 3\Theta + \frac{x^4}{1...4}\cos 4\Theta + \cdots.$$

Digitized by Google

und

$$46)\quad e^{x\cos\Theta}\sin(x\sin\Theta)$$
$$=\frac{x}{1}\sin\Theta+\frac{x^2}{1.2}\sin 2\Theta+\frac{x^3}{1.2.3}\sin 3\Theta+\frac{x^4}{1...4}\sin 4\Theta+\ldots.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\Theta=\frac{1}{2}\pi$, so erhält man, weil

$$\cos\frac{1}{2}\pi=\ 0,\ \sin\frac{1}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{2}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{2}{2}\pi=\ 0;$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi=\ 0,\ \sin\frac{3}{2}\pi=-1;$$
$$\cos\frac{4}{2}\pi=+1,\ \sin\frac{4}{2}\pi=\ 0;$$
$$\cos\frac{5}{2}\pi=\ 0,\ \sin\frac{5}{2}\pi=+1;$$
$$\cos\frac{6}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{6}{2}\pi=\ 0;$$

u. s. w.

ist, die beiden folgenden höchst wichtigen und merkwürdigen, für jedes x zwischen $-\infty$ und $+\infty$, d. h. für jedes reelle x geltenden Gleichungen:

$$47)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1...4}-\frac{x^6}{1...6}+\frac{x^8}{1...8}-\ldots.$$

und

$$48)\quad \sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1...5}-\frac{x^7}{1...7}+\frac{x^9}{1...9}-\ldots.$$

Wenn man

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$

und folglich

$$\varrho\cos\Theta=a,\ \varrho\sin\Theta=b$$

setzt, so ergiebt sich aus 43) auch, wenn man in dieser Gleichung, was nach dem Obigen verstattet ist, $x=\varrho$ setzt, die für jedes reelle a und b geltende Gleichung:

Digitized by Google

$$49)\quad e^a(\cos b+\sin b\sqrt{-1}) = 1+\frac{a+b\sqrt{-1}}{1}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

§. 8.

Ferner wollen wir uns jetzt mit der Summirung der wichtigen Reihe

$$\frac{x}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1}),$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1}),$$
$$\frac{x^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1}),$$

u. s. w.

beschäftigen.

Bezeichnen wir die Logarithmen, deren Basis die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Grösse e ist *), durch den Buchstaben l, so ist nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$(1+2x\cos\Theta+x^2)^{\frac{1}{2}a} = e^{\frac{1}{2}al(1+2x\cos\Theta+x^2)},$$

und folglich nach 28) für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x:

---

*) Welche auch natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt werden.

Digitized by Google

$$50)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\frac{\alpha}{1}x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$51)\quad e^{\frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2)}(\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi\sqrt{-1})$$
$$= 1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1}).$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$\varphi = \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

ist, und immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Also ist nach 49), wenn man in der dortigen Gleichung, was verstattet ist, weil dieselbe für jedes reelle a und b gilt,

$$a = \frac{1}{2}\alpha l(1+2x\cos\Theta+x^2),\ b = \alpha\varphi$$

setzt:

$$1$$
$$+\alpha x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x^2(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{3}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)x^3(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)x^4(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
= \quad & 1 \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\} \frac{\alpha}{1} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^2 \frac{\alpha^2}{1.2} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^3 \frac{\alpha^3}{1.2.3} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^4 \frac{\alpha^4}{1...4} \\
& + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder, wenn man die Einheit auf beiden Seiten abzieht und dann durch α dividirt:

$$
\begin{aligned}
& x\,(\cos\Theta + \sin\Theta\sqrt{-1}) \\
& -\frac{1}{2}(1-\alpha)\,x^2(\cos 2\Theta + \sin 2\Theta\sqrt{-1}) \\
& +\frac{1}{3}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)\,x^3(\cos 3\Theta + \sin 3\Theta\sqrt{-1}) \\
& -\frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\frac{1}{2}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)\,x^4(\cos 4\Theta + \sin 4\Theta\sqrt{-1}) \\
& + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^2 \frac{\alpha^2}{1.2} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^3 \frac{\alpha^3}{1.2.3} \\
& + \left\{\frac{1}{2} l(1+2x\cos\Theta+x^2) + \varphi\sqrt{-1}\right\}^4 \frac{\alpha^4}{1...4} \\
& + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x.

Lässt man nun α sich der Null nähern, geht auf beiden Seiten der obigen Gleichungen zu den Gränzen über, und setzt zugleich für φ seinen obigen Werth, so erhält man die folgende merkwürdige für jedes zwischen -1 und $+1$ liegende x geltende Gleichung:

Digitized by Google

$$52)\quad \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)+\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}\cdot\sqrt{-1}$$

$$= x(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{x^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

in welcher nach dem Obigen bekanntlich

$$\operatorname{Arc\,tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Setzt man

$$a+b\sqrt{-1}=\varrho(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}),$$

so ist

$$\varrho=\sqrt{a^2+b^2},\ \varrho\cos\Theta=a,\ \varrho\sin\Theta=b$$

und

$$1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2=1+2a+a^2+b^2=(1+a)^2+b^2.$$

Weil nun nach 52) für $\varrho<1$

$$\frac{1}{2}l(1+2\varrho\cos\Theta+\varrho^2)+\operatorname{Arc\,tang}\frac{\varrho\sin\Theta}{1+\varrho\cos\Theta}\cdot\sqrt{-1}$$

$$= \frac{\varrho}{1}(\cos\Theta+\sin\Theta\sqrt{-1}$$
$$-\frac{\varrho^2}{2}(\cos 2\Theta+\sin 2\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\varrho^3}{3}(\cos 3\Theta+\sin 3\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\frac{\varrho^4}{4}(\cos 4\Theta+\sin 4\Theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{\varrho^5}{5}(\cos 5\Theta+\sin 5\Theta\sqrt{-1})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Digitized by

wo

$$\text{Arc tang}\frac{\varrho \sin\Theta}{1+\varrho\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss, ist; so ist für

$$\sqrt{a^2+b^2} < 1$$

und wenn man

$$\text{Arc tang}\frac{b}{1+a}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nimmt:

$$53)\quad \frac{1}{2}l\{(1+a)^2+b^2\} + \text{Arc tang}\frac{b}{1+a}\cdot\sqrt{-1}$$

$$= a+b\sqrt{-1} - \frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{3}(a+b\sqrt{-1})^3 - \frac{1}{4}(a+b\sqrt{-1})^4 + \ldots$$

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile in der Gleichung 52) mit einander erhält man die beiden folgenden für jedes x zwischen -1 und $+1$ geltenden Gleichungen:

$$54)\quad \frac{1}{2}l(1+2x\cos\Theta+x^2)$$

$$= \frac{x}{1}\cos\Theta - \frac{x^2}{2}\cos 2\Theta + \frac{x^3}{3}\cos 3\Theta - \frac{x^4}{4}\cos 4\Theta + \ldots$$

und

$$55)\quad \text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

$$= \frac{x}{1}\sin\Theta - \frac{x^2}{2}\sin 2\Theta + \frac{x^3}{3}\sin 3\Theta - \frac{x^4}{4}\sin 4\Theta + \ldots,$$

wo

$$\text{Arc tang}\frac{x\sin\Theta}{1+x\cos\Theta}$$

zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Für $\Theta=0$ erhält man aus 54) die für jedes x zwischen -1 und $+1$ geltende Gleichung:

$$56)\quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

und für $\Theta=\frac{1}{2}\pi$ ergiebt sich aus 55) die ebenfalls für jedes x zwischen -1 und $+1$ geltende Gleichung:

Digitized by Google

$$57)\quad \text{Arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

in welcher Arc tang x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Weil aber die Reihen

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots.$$

und

$$\pm 1, \mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \mp\frac{1}{7}, \pm\frac{1}{9}, \ldots.,$$

da in denselben die absoluten Werthe der Glieder fortwährend abnehmen und die Zeichen wechseln, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen convergiren, und $l2$ und Arc tang (± 1) endliche völlig bestimmte Grössen sind, so ist man nach einem andern bekannten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen zu schliessen berechtigt, dass die Gleichung 56) auch noch für $x=1$, die Gleichung 57) auch noch für $x=\pm 1$ gilt, wodurch wir in Verbindung mit dem Obigen unter Anwendung einer gewiss durch sich selbst sogleich verständlichen Bezeichnung zu den beiden folgenden Gleichungen geführt werden:

$$58)\quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots.$$
$$\{-1 < x = +1\}$$

und

$$59)\quad \text{Arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots.$$
$$\{-1 = x = +1\}$$

wo Arc tang x immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muss.

Für $x=-1$ geht die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung 58) in die Reihe

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots.$$

über, und da dies nach einem bekannten auch schon oben in §. 5. III. angewandten Satze aus der Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen eine divergente Reihe ist, so ist ersichtlich, dass für $x=-1$ die Gleichung 58) ihre Gültigkeit verliert, worauf man auch schon durch die sogleich zu machende Bemerkung, dass $l(1-1) = l0$ keinen endlichen völlig bestimmten Werth mehr hat, hätte geführt werden können.

Digitized by Google

Für $x = 1$ erhält man aus der Gleichung 58):

$$60) \quad l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

und für denselben Werth von x ergiebt sich aus der Gleichung 59), in welcher bekanntlich Arc tang x immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist:

$$61) \quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Indem ich diese Abhandlung hiermit schliesse, wiederhole ich die schon im Eingange gemachte Bemerkung, dass ich in derselben durchaus nicht die Absicht gehabt habe, bloss Neues zu geben. Vielmehr schliesst sich dieselbe an frühere bekannte Muster an, die ich hier wohl nicht erst noch besonders namhaft zu machen brauche. Ich bezwecke mit derselben hauptsächlich nur, eine zusammenhängende im Geiste der neueren Analysis durchgeführte Entwickelung aller derjenigen Reihen zu geben, welche gewissermassen als Elementar-Reihen zu betrachten sind, weil von denselben die meisten übrigen Untersuchungen über die Reihen und die Functionen ihren Auslauf nehmen müssen, so wie denn auch auf denselben lediglich die Construction der Tafeln beruhet, welche in der gesammten Mathematik die häufigste und allgemeinste Anwendung finden. Namentlich habe ich aber in dieser Abhandlung auch eine vollständige Darstellung des Binomischen Lehrsatzes, insbesondere eine gehörige Unterscheidung aller der Fälle von einander, in welchem die betreffende Reihe convergirt oder divergirt, der Satz also gültig oder ungültig ist, zu geben versucht, da in der That die Darstellung dieses wichtigen Theorems, wie dieselbe seit der Zeit des Flors der combinatorischen Analysis ganz in der nämlichen veralteten Weise auch selbst in vielen neueren Lehrbüchern der sogenannten Analysis des Endlichen oder der algebraischen Analysis zum Ueberdruss immer wieder erscheint, den Ansprüchen, welche man nach den neueren Fortschritten der Analysis zu machen berechtigt ist, doch zu wenig genügt, wobei ich natürlich nur Lehrbücher, die sich als eine höhere wissenschaftliche Tendenz verfolgend ankündigen, nicht solche, die bloss für den Elementar-Unterricht in der allgemeinen Arithmetik bestimmt sind oder eine mehr praktische Richtung einschlagen, im Auge habe. Ich wünsche daher durch diese Abhandlung zur grösseren Verbreitung der neueren Ansichten in der Analysis beizutragen, welches dem Zwecke des Archivs durchaus nicht widerspricht, sondern demselben vielmehr völlig gemäss ist. Zugleich soll dieselbe einer anderen in ähnlicher Weise gehaltenen, nächstens folgenden Abhandlung über die imaginären Grössen zur Vorbereitung dienen.

Digitized by Google

XXVI.

Beitrag zu der Lehre von den Farben.

Von dem

Herrn Doctor Botzenhart,

Assistenten der Physik am k. k. polytechnischen Institut zu Wien.

(Durch Herrn Director v. Littrow dem Herausgeber gütigst zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)

Eine vollkommene allen Anforderungen entsprechende Theorie der Farben der Körper ist noch immer eine Aufgabe der Physik, zu deren Lösung eine von mir vor Kurzem gemachte Beobachtung Einiges beitragen dürfte.

Wenn man das von gefärbten Körpern durch Reflexion uns zugesendete Licht mittelst der in Poggendorff's Annalen Bd. LXV. S. 4. beschriebenen dichroscopischen Loupe analysirt, so sieht man bei einer gewissen Schiefe der Incidenz des auf den farbigen Körper fallenden Lichtes und wenn die Ebene des Hauptschnittes des Kalkspathrhomboids mit der Einfallsebene der zum Auge gelangenden Strahlen parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht, zwei Bilder, von denen das eine nahe vollkommen weiss, das andere aber mit derselben Farbe wie der untersuchte Körper erscheint. Am deutlichsten zeigt sich die Erscheinung an ziemlich gut reflectirenden gefärbten Flächen, namentlich gefärbter Papiere, farbiger Gläser, Flüssigkeiten, Krystalle etc. Wenn die Fläche nur einigermassen spiegelt, und man unter dem gehörigen Winkel, den man durch den Versuch leicht ausmitteln kann, gegen die Fläche hinsieht, so ist die Sonderung des weissen und farbigen Bildes eine vollkommene.

Bei minder gut reflectirenden Flächen, wie auch bei farbigen Pulvern und unter andern Incidenzwinkeln der Strahlen ist die Sonderung minder vollkommen und geht bis zur völligen Gleichheit beider Bilder.

Wenn man auf die früher angegebene Weise die vollkommene Sonderung erhalten hat und hält zwischen den farbigen Körper und die Loupe eine parallel zur Axe geschnittene Turmalinplatte so, dass ihr Hauptschnitt dem des Kalkspathes parallel ist, oder auf ihm senkreht steht, so verschwindet das eine oder das andere

Digitized by Google

Bild vollkommen. Das weisse Bild charakterisirt sich als in der Einfallsebene der Strahlen polarisirt, das farbige ist senkrecht darauf polarisirt.

Da nun gewöhnliches Licht auf eine Fläche auffallend durch Reflexion immer nur in der Einfallsebene polarisirt wird, so kann das von der farbigen Fläche kommende auf der Einfallsebene senkrecht polarisirte Licht nicht durch Reflexion an der Oberfläche des Körpers entstehen, sondern ist durchgelassenes (daher senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes) und aus dem Innern des Körpers reflectirtes Licht.

Aus dieser von mir beobachteten Erscheinung gehen zunächst mit grosser Wahrscheinlichkeit folgende zwei Sätze hervor:

1) Das auf die Körper auffallende weisse Licht wird auch als solches reflectirt.

Der öfters aufgestellte Satz, dass farbige Körper von dem auf ihre Oberfläche auffallenden weissen Lichte einige farbige Strahlen zurücksenden, andere in sich eindringen lassen, scheint nach obiger Beobachtung unrichtig.

2) Das von den Körpern uns zugesendete farbige Licht kommt nicht von ihrer Oberfläche, sondern aus ihrem Innern durch Reflexion nach vorausgegangener Transmission.

Dies im Kurzen die von mir gemachte Beobachtung und die daraus zunächst sich ergebenden Folgerungen. Ich habe Versuche mit homogenem Lichte, eben so mit weissem polarisirten Lichte gemacht, welche mir obige zwei Sätze zu bestätigen scheinen.

Da ich über diesen Gegenstand, der mit vielen andern Erscheinungen, als z. B. mit den Farben glühender Körper, der elliptischen Polarisation durch Reflexion von Metalloberflächen etc. im innigsten Zusammenhange zu stehen scheint, noch eine ausgedehnte Reihe von Versuchen anstellen werde, und selbe noch viele Zeit in Anspruch nehmen dürften, so hielt ich es für zweckmässig, das Hauptergebniss meiner Untersuchung vorläufig im Archive mitzutheilen, und behalte mir vor, das Endresultat meiner Untersuchungen späterhin im Detail in dieser Zeitschrift bekannt zu machen.

Digitized by Google

XXVII.

Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

1. *Schwierigkeiten der Parallelentheorie.*

Die Lehre von den parallelen Geraden hat allbekanntlich die hinderliche Eigenheit, dass man, wie man es auch immer anfangen mag, doch jedesmal auf einen Satz stösst, der sich nicht in der gewöhnlichen Weise aus seinen Vorläufern, oder aus der Natur der in ihm verbundenen geometrischen Begriffe erweisen lässt. Die Ursache dieser unangenehmen Unterbrechung des innigsten Zusammenhanges und der folgerechten Reihung aller Sätze der Geometrie liegt in der Unmöglichkeit, die einfachen Begriffe „Lage und Richtung" weder erklären, noch auch nur durch zureichende Grundmerkmale charakterisiren zu können.

2. *Abhilfen.*

Als erste Abhilfe hat man nun vielerhand Erklärungen der Parallellinien versucht. Allein da es sich hier nicht um eine Sach-, sondern nur um eine Worterklärung, d. h. eigentlich um Angabe des Grundes für die Wahl einer Benennung einer bereits erkannten Eigenschaft zweier unbegrenzten geraden Linien handelt, und da naturgemäss derlei Benennungen aus den üblichen Namen der einzelnen Merkmale solcher Eigenschaften zusammengesetzt zu werden pflegen, so kann man die griechische Benennung παραλληλαι, weil sie aus παρα, bedeutend (mit dem Dativ auf die Frage wo?) bei, neben, längs, juxta, und ἀλληλαις, einander zusammengesetzt, und daher durch nebeneinanderisch zu verdeutschen ist, nur dadurch erläutern — wie auch bereits Euklid gethan — dass die also benamseten Gegenstände in ihrer ganzen Ausdehnung entweder im Raume oder auf einer

Digitized by Google

Fläche, neben einander, d. i. jeder auf nur Einer Seite des anderen liegen, und (nicht wie manche sich berührende Raumdinge) keinen Punkt gemein haben, oder nirgends zusammentreffen, sondern überall getrennt (separat) bleiben. Sind diese räumlichen Gegenstände insbesondere gerade, und zugleich in einerlei Ebene befindliche Linien, so lässt sich von ihnen nachweisen: 1) dass jedwede Richtung der einen als einer Richtung der anderen gleich angesehen werden dürfe, mithin insofern beide Geraden gleichgerichtet (äquidirect) oder gleichlaufend (gleichläufig) heissen können, und 2) dass sämmtliche Punkte einer jeden Geraden von der anderen gleiche (senkrechte) Abstände haben, folglich beide Geraden von einander gleichabständig (äquidistant) sind. Diese Gleichabständigkeit besteht auch, wenn eine Gerade neben einer Ebene oder zwei Ebenen neben einander liegen also nebeneinanderisch, oder im obigen Sinne parallel sind. Allein dies berechtiget keineswegs zu der, in vielen neueren Lehrbüchern der Geometrie beliebten Erklärung: „Parallel (nebeneinanderisch) heisst ein räumlicher Gegenstand zu einem anderen (insbesondere zwei Geraden oder Ebenen zu einander, oder eine Gerade zu einer Ebene) wenn jeder Punkt des ersteren gleichweit von dem letzteren (Gegenstande) entfernt ist.“ Eine solche Erklärung klingt wie etwa folgende: „Ein gleichseitiges oder ein gleichwinkeliges Dreieck ist ein solches, dessen Spitzen von den gegenüberliegenden Seiten gleichweit abstehen,“ oder wie folgende: „Ein gleichseitiges Viereck ist ein solches, in welchem die Diagonalen sich winkelrecht halbiren.“ Nichts ist widernatürlicher, als solche, erst absonderlich zu erweisende, Lehrsätze in Erklärungen umzuformen.

3. Allein weder jenes Neben-einander-liegen oder Von-einander-geschieden-sein, noch diese Gleichabständigkeit erschöpft, einzeln für sich genommen, den mit dem Worte „Parallel“ nicht etymologisch, sondern von den Geometern eigentlich verbundenen Begriff. Denn — wie schon Tacquet gegen Euklid bemerkt — gibt es Linien, von denen jede auf blos Einer Seite der anderen liegt, die also in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends zusammentreffen, wie z. B. die Hyperbel oder die Conchois, und ihre gerade Asymptote, zwei Parabeln mit einerlei Brennpunkt und Axe, u. m. a.; und doch nennt sie der Geometer nicht parallel. Andererseits erhält man zu einer krummen Linie oder Fläche eine gleichabständige, wenn man von jedem Punkte derselben auf seiner Normale nach einerlei Seite oder Gegend hin gleichgrosse Strecken nimmt und ihre Endpunkte stetig verbindet. (Klügel, Mathem. Wörterb. 3. Bd. S. 738. Nro. 24.). Aber solche gleichabständige Linien oder Flächen können dessenungeachtet mit einander zusammentreffen, wie z. B. die Ellipse und Parabel mit mancher ihrer inneren, die Cycloide mit jeder äusseren, und die Hyperbel sowohl mit inneren als äusseren Aequidistanten, u. m. dgl. Desswegen däucht es mir der strengeren Wissenschaftlichkeit der Geometrie angemessener zu sein, von jeglichen zwei solchen mit einander zu betrachtenden räumlichen Gegenständen vorerst zu erweisen, dass ihr Getrenntsein und ihre Gleichabständigkeit sich gegenseitig bedingen, und nachher erst desswegen sie parallel zu nennen.

Digitized by Google

4. Eine zweite Abhilfe, deren sich alle neueren kritischen und die gerügte schwache Seite der Parallelentheorie offenherzig eingestehenden Geometer bedienen, ist die zu Grundelegung eines möglichst einleuchtenden Lehrsatzes. Je mehr dieser in der That von selbst erhellet, je leichter er begriffen und zugestanden werden kann, oder je plausibler er ist; für desto gründlicher erkennt man die auf ihn gebaute Parallelentheorie an. Von diesen Theorien sind jedoch alle jene wenigstens tadelnswerth, wenn nicht schlechterdings verwerflich, welche sich auf die Lehre von den Dreiecken stützen, also das Einfache durch das Zusammengesetzte beweisen; da bei den Parallellinien eigentlich nur an einem Paar Geraden, ihre Winkel mit einer blos für die Forschung zu Hülfe genommenen dritten zu betrachten kommen, bei den Dreiecken aber ausser den Winkeln auch noch Seiten, begrenzte gerade Linien, betrachtet werden. Dann aber bleiben der anderen Parallelentheorien nur höchst wenige übrig, und selbst diese sind nicht unbedenklich.

Sehr gern legt man einen der beiden folgenden Sätze als evident zu Grunde:

„Zu einer Geraden gibt es durch jeden Punkt nur eine einzige parallele Gerade."

„Zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, müssen auch zu einander parallel sein."

Der Hauptgrund, den man für diese Sätze beibringt, ist ihre Analogie, ihr Gleichlauten mit vielen anderen. Allein ihnen stehen doch auch folgende analoge Sätze entgegen:

„Zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ gibt es durch jeden Punkt unzählig viele parallele $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$."

„Zwei $\begin{matrix}\text{Geraden}\\\text{Ebenen}\end{matrix}$, die zu einer $\begin{matrix}\text{Ebene}\\\text{Geraden}\end{matrix}$ parallel sind, müssen keineswegs parallel sein, sondern können sich manchmal auch schneiden."

Dadurch leiden obige Sätze sehr an ihrer Evidenz und unbedenklichen Zulassung.

5. Die dritte Abhilfe, welche meines Wissens noch Niemand vor mir vorgeschlagen hat, ist die Berücksichtigung des allgemein und streng erweisbaren nothwendigen Zusammenhanges zweier Paare unzertrennlich zusammen bestehender Beschaffenheiten oder Merkmale — wie deren so vielerlei in der Mathematik vorkommen — von denen die einen bestimmt, die anderen unbestimmt, insbesondere theils Gleichheiten theils Ungleichheiten sind; und die daraus folgende Aufstellung der vier, solchen Zusammenhang umständlich und vollständig ausprechenden Sätze, unter denen im vorliegenden Falle ein nach den gewöhnlichen Schlussarten nicht erweisbarer Lehrsatz vorkommt. — Nachdem ich den Beweis dieses Zusammenhanges vielmals und mit Beseitigung aller der Wissenschaft nachtheiligen Selbstliebe kritisch geprüft und ohne Fehler befunden habe, so glaube ich nicht weiter anstehen zu sollen, diese neue Begründungsweise der Parallelentheorie den Geometern zur Beachtung vorzulegen.

Digitized by Google

6. *Neuer Hauptlehrsatz der Logik.* Hängen zwei Begriffe S und Σ dergestalt unzertrennlich zusammen, dass beide nur zugleich vorhanden sein können, keiner aber ohne den anderen bestehen kann; und ist der Begriff S nur entweder der eindeutige also bestimmte a, oder der zweideutige also unbestimmte b, (namentlich entweder b' oder b''); dessgleichen der Begriff Σ nur entweder der eindeutige also bestimmte α, oder der zweideutige also unbestimmte β, (namentlich entweder β' oder β''): so muss jedweder einzelne der ersteren zwei sich gegenseitig ausschliessenden Begriffe a und b (welcher selbst entweder b' oder b'' ist) mit einem der letzteren zwei einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe α und β (der selbst entweder β' oder β'' ist) zusammen bestehen;

und zwar müssen jederzeit und nothwendig

einerseits die beiden eindeutigen, bestimmten, a u. α,

andererseits die beiden zweideutigen, unbestimmten, b und β,

mit einander bestehen, jeder den andern bedingen; nie aber kann ein eindeutiger, bestimmter, mit einem zweideutigen, unbestimmten, zusammen bestehen.

Eigentlich ist hier nur der letztere verneinende Satz zu erweisen, nemlich, dass unter den gemachten Voraussetzungen nie ein eindeutiger und ein zweideutiger ein bestimmter und ein unbestimmter Begriff, d. i. weder a und β, noch α und b, mit einander bestehen können: denn dieser Satz zerfällt nothwendig in jene zwei ersteren bejahenden Sätze.

Richtig aber muss der Satz sein, weil an dem eindeutigen Begriffe a oder α kein Merkmal oder Kennzeichen sich auffinden lässt, welcher der beiden dem zweideutigen gleichgeltenden einander gegenseitig ausschliessenden Begriffe mit ihm (dem eindeutigen) zusammen bestehen soll, nemlich ob zu a der Begriff β' oder β'', zu α der Begriff b' oder b'' gehöre; und weil man daher durchaus keinerlei Grund hat, mit jenem eindeutigen eher den einen als den anderen der zwei disjunctiven Begriffe verbunden zu denken — mit a eher β' als β'', mit α eher b' als b'' —; oder auch, weil jeder Grund, aus welchem man den einen mit ihm verbunden ansehen will, auch anwendbar ist, um den andern mit ihm verbunden anzunehmen, so dass beide zugleich damit verbunden gedacht werden könnten — mit a sowohl β' als β'', mit α sowohl b' als b'' —; was doch offenbar ungereimt ist, da diese zwei disjunctiven Begriffe β' und β'' so wie b' und b'' einander dermassen ausschliessen, dass sie nie mit einander zugleich vorkommen können.

7. *Fernere Erläuterung.* Wenn demnach die zwei disjunctiven Urtheile

1) S ist entweder a
oder b, und im letzteren Falle entweder b' oder b'';

2) Σ ist entweder α
oder β, und im letzteren Falle entweder β' oder β'';

Digitized by Google

unzertrennlich zusammenhängen, so dass mit einem jeden der Urtheile

$$S \text{ ist } a, \quad S \text{ ist } b,$$

eines der Urtheile

$$\Sigma \text{ ist } \alpha, \quad \Sigma \text{ ist } \beta,$$

nothwendig verbunden sein muss; so müssen jederzeit einerseits die beiden bestimmten Urtheile

$$S \text{ ist } a \text{ und } \Sigma \text{ ist } \alpha,$$

so wie andererseits die beiden unbestimmten zweideutigen Urtheile

$$S \text{ ist } b = b' \text{ oder } b'' \text{ und } \Sigma \text{ ist } \beta = \beta' \text{ oder } \beta''$$

gleichzeitig zusammen bestehen.

Folglich müssen zugleich mit einander vier hypothetische Urtheile gelten:

1) Wenn S, a ist; so ist Σ, α.
2) Wenn S, b ist; so ist Σ, β.
3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a.
4) Wenn Σ, β ist; so ist S, b.

Von diesen sind 1) und 4) so wie 2) und 3) Contrapositionen von einander, mithin unmittelbare Folgerungen aus einander; dessgleichen sind 1) und 3) so wie 2) und 4) Umgekehrte von einander.

8. *Absonderliche Beweisführung in der Anwendung.*

Obwohl diese vier hypothetischen Urtheile, als eben so viel Lehrsätze der angewandten Logik, nach dem obigen Beweise, ganz allgemein und in aller Strenge gelten müssen, und sonach in jedem besonderen Falle mit voller Ueberzeugung von ihrer Giltigkeit angewendet werden dürfen, so muss man sie dennoch in den einzelnen Zweigen der Grössenwissenschaft noch absonderlich beweisen, um darzulegen, dass die in ihnen verbundenen zweierlei Begriffe wirklich einander gegenseitig bedingen.

Gewöhnlich beweist man zwei solche aus ihnen, die nicht Contrapositionen, also nicht nothwendige unmittelbare Folgen aus einander sind, nemlich

entweder 1) und 2), oder 1) und 3);

wonach die beiden übrigen als ihre Contrapositionen, auch ihre nächsten nothwendigen Folgen sind. Der erstere Vorgang ist ein besonderer Fall des allgemeinen Umkehrungsgesetzes von Hauber *).

*) Vergl. meinen Aufsatz im Archiv. 6. Theil. 4. Heft. Nro. XLIV. Art. II., 1. S. 358.

Digitized by Google

Aber es genügt auch schon der Beweis eines einzigen dieser vier Sätze, um sie allesammt über jeden Zweifel zu erheben, oder vielmehr, da sie vermöge des obigen allgemeinen Beweises derselben keinem gegründeten Zweifel unterliegen können, um sie nur noch mehr zu bestätigen und zu bekräftigen. Beweist man z. B. den Satz 1) *), so folgt aus ihm seine Contraposition 4) und aus beiden jeder der zwei anderen.

Denn wollte man etwa den Satz:

3) Wenn Σ, α ist; so ist S, a;

nicht zugestehen, also nicht gelten lassen, dass mit dem Begriffe α der Begriff a zusammenhänge; so müsste man, weil mit dem Begriffe α doch nothwendig einer der Begriffe a und b verbunden sein muss, mit ihm den Begriff b verknüpfen, also den Satz:

Wenn Σ, α ist; so ist S, b;

einräumen. Aus diesen würde aber durch Contraposition sogleich folgen:

Wenn S nicht b ist; so ist auch Σ nicht α;

d. h.

Wenn S, a ist; so ist Σ, β.

Da jedoch diese Folgerung mit 1) im Widerspruche ist, so leidet die Giltigkeit von 3) keinen Zweifel. Dann aber gilt auch seine Contraposition 2).

9. *Gewöhnliche allgemeine Anwendung.*

Der obige logische Hauptlehrsatz kommt vornehmlich da in Anwendung, wo S und Σ Vergleichungen von Grössen oder Beschaffenheiten mancher Gegenstände sind; daher a und α die Gleichheit, das Gleichsein ($=$), dagegen b und β die Ungleichheit, Verschiedenheit, das Verschiedensein ($\gtrless$) solcher Eigenschaften bedeuten. Für diesen Fall gilt folgender

Allgemeiner logischer Lehrsatz. Wenn an irgend zweien, unzertrennlich mit einander bestehenden, sich gegenseitig bedingenden oder bestimmenden Gegenständen G und g zweierlei Merkmale (Beschaffenheiten, Eigenschaften oder Bestimmungsstücke), nemlich sowohl eines Theils A und a, als auch andern Theils B und b vorkommen; und wenn die beiden Merkmale derselben Art entweder gleich ($=$) oder ungleich (verschieden $\gtrless$) sein können, mithin nothwendig jede der beiden Vergleichungen

$$A = a \text{ und } A \gtrless a$$

mit einer der beiden anderartigen

$$B = b \text{ und } B \gtrless b$$

*) Wie in der unten folgenden Lehre vom Zusammentreffen der Geraden.

Digitized by Google

zusammen bestehen muss: so müssen jederzeit und nothwendig einerseits die Gleichheiten der beiderlei Merkmale, d. i.

$$A = a \text{ und } B = b,$$

mit einander und andererseits auch die Ungleichheiten dieser zweierlei Merkmale d. i.

$$A \gtrless a \text{ und } B \gtrless b$$

wieder mit einander bestehen; nie aber kann die Gleichheit der einen Merkmale mit der Ungleichheit der anderen

$$\text{weder } A = a \text{ mit } B \gtrless b,$$
$$\text{noch } B = b \text{ mit } A \gtrless a,$$

bestehen.

Sind nemlich die einen Merkmale gleich, so sind auch die anderen gleich;

sind dagegen die einen Merkmale ungleich, so sind auch die anderen ungleich;

niemals aber können die einen Merkmale gleich und die andern ungleich sein.

Mithin müssen hier jedesmal zugleich folgende vier hypothetische Sätze gelten:

I. Wenn $A = a$ ist; so ist auch $B = b$.
II. Wenn $A \gtrless a$ ist; so ist auch $B \gtrless b$.
III. Wenn $B = b$ ist; so ist auch $A = a$.
IV. Wenn $B \gtrless b$ ist; so ist auch $A \gtrless a$.

10. *Beispiele.*

1) Sind die Zusätze (zweiten Summanden) zu einerlei Grösse (erstem Summand) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Beträge (Summen) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$.

Umgekehrt:

Sind nach geschehenem Zusatze zu einerlei Grösse (Subtrahend) die Beträge (Minuende) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$, so müssen auch die gebrauchten Zusätze (Unterschiede, Differenzen) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$ sein.

2) Sind bei einerlei Multiplikand (erstem Factor) die Multiplikatoren (zweiten Factoren) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Producte $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$.

Digitized by Google

Umgekehrt:

Sind bei einerlei Divisor (erstem Factor) die Dividende (Producte) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$, so sind auch die Quotienten (zweiten Factoren) $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$.

3) Im Dreiecke liegen

gleichen Seiten gleiche Winkel,
und ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber;

also liegen auch umgekehrt:

gleichen Winkeln gleiche Seiten,
und ungleichen Winkeln ungleiche Seiten gegenüber.

II.

Verwendung des aufgestellten logischen Gesetzes in der Parallelentheorie.

11. *Zweckmässigere Benennung der Winkel zweier Geraden in einerlei Ebene mit einer sie beide in zwei Punkten schneidenden dritten.*

Werden (Taf. IV. Fig. 3.) zwei in einerlei Ebene befindliche Geraden LM und $\lambda\mu$ von einer dritten Nv in zwei Punkten P und π geschnitten, so heissen bekanntlich einem allgemeinen Gebrauche gemäss die Winkel a, b, α, β innere, und ihre Scheitelwinkel a', b', α', β' äussere Winkel;

ferner die Winkel a mit α, und b mit β Wechselwinkel,
so wie die Winkel a mit β, und b mit α Gegenwinkel.

Höchst zweckmässig behält man mit Knar diese letzteren Benennungen der Paare zusammengestellter Winkel der einen und anderen Geraden mit der dritten Schneidenden auch dann noch bei, wenn in obigen Paaren an die Stelle eines oder beider Winkel der (gleiche) Scheitelwinkel tritt. — Dann sind

(gleichlautend bezeichnete) Wechselwinkel:

$$a\alpha\ a\alpha'\ a'\alpha\ a'\alpha',\quad b\beta\ b\beta'\ b'\beta\ b'\beta';$$

(ungleichlautend bezeichnete) Gegenwinkel:

$$a\beta\ a\beta'\ a'\beta\ a'\beta',\quad b\alpha\ b\alpha'\ b'\alpha\ b'\alpha'.$$

12. Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Grössen der Wechsel- und Gegenwinkel.

(Neuer) *Hauptlehrsatz.* Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so ist sowohl der Unterschied jeder zwei Wechselwinkel, als auch der Unterschied eines gestreckten Winkels und der Summe jeder zwei Gegenwinkel überall gleich, wofern immer (arithmetisch) das Kleinere vom Grösseren abgezogen wird.

Digitized by Google

Denn behält man in Taf. IV. Fig. 4. die Bezeichnung aus Taf. IV. Fig. 3. mit der einzigen Abweichung bei, dass man die äusseren Winkel gerade so, wie die ihnen als Scheitelwinkel gleichen inneren bezeichnet, weil hier nur die Grösse der Winkel zu berücksichtigen kommt; so hat man, weil a und b so wie α und β Nebenwinkel sind, wenn der gestreckte Winkel mit G bezeichnet wird, die Gleichungen:

$$a+b=G,\quad \alpha+\beta=G.$$

Daraus folgt sogleich $a+b=\alpha+\beta$, und wenn man $a \gtreqless \alpha$ voraussetzt,

$$a-\alpha=\beta-b,$$

wonach $b \lesseqgtr \beta$ sein muss.

Schreibt man die erste Gleichung wie folgt:

$$G=(a+\beta)-(\beta-b)=(b+\alpha)+(a-\alpha),$$

so findet man hieraus und aus dem bereits Gefundenen die Gleichungen:

$$a-\alpha=\beta-b=G-(b+\alpha)=(a+\beta)-G,$$

welche den behaupteten Satz ausdrücken, und in denen $a+\beta \gtreqless G$, $b+\alpha \lesseqgtr G$ ist.

13. *Gefolgerte allgemeine Alternative.*

Verschwindet / Besteht demnach irgend einer dieser durchweg gleichen Unterschiede, so verschwindet / besteht auch schon jeder.

Vereinzelte Betrachtung.

Werden zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten dergestalt geschnitten, dass entweder irgend zwei Wechselwinkel gleich / ungleich sind, oder irgend zwei Gegenwinkel zusammen einen / keinen gestreckten Winkel ausmachen: so sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich / ungleich, und jede zwei Gegenwinkel machen zusammen einen / keinen gestreckten Winkel aus.

14. *Auf diese Vergleichung der Winkel gegründete Unterscheidung*

A. der Seiten der Schneidenden.

Wo die allesammt gleichen Unterschiede wirklich bestehen, da unterscheiden sich die beiden Seiten der schnei-

Digitized by Go

denden Geraden darin von einander, dass auf der $\frac{\text{einen}}{\text{anderen}}$ Seite jeder äussere Winkel $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ als sein innerer Wechselwinkel, und die Summe der inneren Gegenwinkel $\frac{\text{kleiner}}{\text{grösser}}$, jene der äusseren Gegenwinkel aber um eben so viel $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ als ein gestreckter Winkel ist.

Wo aber die allesammt gleichen Unterschiede verschwinden, da besteht auch kein solcher Unterschied zwischen den Seiten der Schneidenden; sondern auf beiden Seiten derselben ist jeder äussere Winkel gleich seinem inneren Wechselwinkel, und sowohl die inneren als die äusseren Gegenwinkel betragen zusammen einen gestreckten Winkel.

All dieses erhellet aus Taf. IV. Fig. 4. und den in Art 12. aufgeführten gleichzeitigen Vergleichungen:

$$a \gtreqless \alpha,\ b \lesseqgtr \beta,\ a+\beta \lesseqgtr G,\ b+\alpha \lesseqgtr G.$$

B. der Arten des Schneidens.

Aus diesen Ergebnissen leuchtet ein, dass zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten nur auf zweierlei Weise geschnitten werden können, nemlich entweder

1) so, dass jede zwei Wechselwinkel *gleich* sind, und jede zwei Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf beiden Seiten der Schneidenden jeder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel gleich ist, und jede zwei gleichnamige $\left(\frac{\text{innere}}{\text{äussere}}\right)$ Gegenwinkel zusammen einen gestreckten Winkel ausmachen, also dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel, *gleiche* Beschaffenheit zeigen; oder

2) so, dass jede zwei Wechselwinkel *ungleich* sind, und jede zwei Gegenwinkel zusammen keinen gestreckten Winkel betragen,

folglich, dass auf der $\frac{\text{einen}}{\text{anderen}}$ Seite der Schneidenden jeder äussere Winkel $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen $\frac{\text{weniger}}{\text{mehr}}$ als einen gestreckten Winkel ausmachen, also

dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung der Winkel *ungleiche* Beschaffenheit zeigen.

Man kann das $\frac{\text{erstartige}}{\text{zweitartige}}$ Schneiden kurz mit Knar ein Schneiden unter $\frac{\text{gleichen}}{\text{ungleichen}}$ Wechselwinkeln nennen.

Digitized by Google

15. *Auf die gegenseitige Lage der beiden Geraden gegründete Unterscheidung*

A. der Seiten der Schneidenden.

Werden zwei Geraden von einer dritten in zwei Punkten geschnitten, so liegt, wenn die Geraden nirgends zusammentreffen, folglich durchweg getrennt sind, zu beiden Seiten der Schneidenden ein Paar getrennter Strahlen (halber Geraden), dagegen wenn die Geraden sich treffen, auf einer Seite ein Paar getrennter, und auf der anderen ein Paar sich schneidender Strahlen. Dort schneiden sich die Geraden weder diesseits noch jenseits der Schneidenden; hier dagegen schneiden sie sich auf nur einer, aber nicht auf der anderen Seite.

B. der Arten des Schneidens.

Zwei Geraden können demnach von einer dritten in zwei Punkten nur dermassen auf zweierlei Art geschnitten werden, dass entweder

1) zu beiden Seiten der Schneidenden jedes Paar halber Geraden getrennt ist, also die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *gleiche* Beschaffenheit haben; oder

2) so, dass auf der einen Seite der Schneidenden der Durchschnittspunkt der zwei Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden zusammentreffen, auf der anderen Seite kein Durchschnittspunkt der Geraden liegt, also ein Paar halber Geraden getrennt sind, folglich so, dass die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich des Zusammentreffens der Hälften jener Geraden, *ungleiche* Beschaffenheit besitzen.

16. *Uebergangsbetrachtung.*

Die Seiten der Schneidenden zeigen daher rücksichtlich zweierlei Umstände, eines Theils gleiche andern Theils ungleiche Beschaffenheiten, nemlich sowohl rücksichtlich der Vergleichungen der Winkel als auch rücksichtlich der gegenseitigen Lagen der halben Geraden, welche auf diesen Seiten sich befinden. Nun entsteht die Frage, ob diese beiderlei Beschaffenheiten der Seiten der Schneidenden mit einander zusammenhängen oder nicht, namentlich also mit Bezug auf den obigen allgemeinen logischen Lehrsatz (in Art. 9.), ob einerseits beide gleichen und andererseits beide ungleichen Beschaffenheiten mit einander bestehen; d. h. ob einerseits das Getrenntsein der beiden Geraden mit dem Schneiden der dritten unter gleichen Wechselwinkeln,

und andererseits

das Zusammentreffen der zwei Geraden mit dem Schneiden der dritten unter ungleichen Wechselwinkeln zusammengehöre.

Diese Frage wird uns der erste von den bald folgenden vier zusammengehörigen Lehrsätzen in der That bejahen. Vorher aber erwägen wir noch nachstehende

17. *Wichtige Bemerkung für die Kritik.*

Die Nothwendigkeit des Beweises solchen Zusammenhanges der angeführten zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten der

ed by Google

Seiten der Schneidenden wird um so mehr einleuchten, wenn man folgende Wahrheit bedenkt:

Obige drei Sätze in Art. 12. und 13. bleiben auch dann noch vollständig giltig, wenn man in ihnen überall die Wörter „*Wechsel-* und *Gegenwinkel*“ mit einander vertauscht.

Denn aus den Gleichheiten

$$G = a+b = \alpha+\beta$$
$$= (a+\alpha)-(\alpha-\beta) = (b+\beta)+(a-\beta)$$

findet man auch

$$a-\beta = \alpha-b = (a+\alpha)-G = G-(b+\beta);$$

wobei man bedingt

$$a \gtreqless \beta,\ b \lesseqgtr \alpha,\ a+\alpha \gtreqless G,\ b+\beta \lesseqgtr G.$$

Demnach können leicht auch die, auf die Vergleichungen der Winkel gestützten, Unterscheidungen der Seiten der Schneidenden und der Arten des Schneidens (in Art. 14.) passend abgeändert ausgesprochen werden, und man wird ersehen, dass hiebei nur entweder auf jeder Seite der Schneidenden jedweder Winkel seinem (gleichnamigen) Gegenwinkel gleich, oder von jeglichen zwei Nebenwinkeln der eine grösser, der andere aber kleiner als sein Gegenwinkel sein könne, also das Schneiden entweder unter gleichen oder ungleichen *Gegenwinkeln* geschehe.

Allein man wird ohne sonderliche Schwierigkeit erkennen, dass diese zweierlei Schneidungen auf das Zusammentreffen und Getrenntsein der Geraden ohne Einfluss sind. Denn je nachdem die gleichen Gegenwinkel schiefe oder rechte Winkel sind, schneiden sich die beiden Geraden oder treffen sich gar nicht; und bei ungleichen Gegenwinkeln können die Geraden eben sowohl einander schneiden als nirgends treffen.

18. *Gegenseitige Abhängigkeit des Zusammentreffens und Getrenntseins zweier in einer Ebene befindlichen Geraden und der zweierlei Schneidungen jeglicher dritten Geraden.*

I. *Hauptlehrsatz.* Zwei gerade Linien, welche von einer dritten in zwei Punkten unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden, *treffen sich nirgends.*

Wenn nemlich die Geraden LM und $\lambda\mu$ (in Taf. IV. Fig. 4.) von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln, $a=\alpha$, $b=\beta$, geschnitten werden, so treffen sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends.

Beweis (nach de Veley). Die Gerade $N\nu$ zertheilt die Ebene, in der sich die Geraden LM und $\lambda\mu$ befinden, in zwei Abtheilungen. Diese lassen sich nun so auf einander legen, dass die Figur $LP\pi\lambda$ auf $\mu\pi PM$ dergestalt zu liegen kommt, dass $P\pi$ in verwendeter Lage sich selbst deckt, daher auch die Winkel

Digitized by Google

a und β die ihnen gleichen α und b decken; folglich PL auf $\pi\mu$ und $\pi\lambda$ auf PM fällt. Könnte nun eines der zwei Paar halber Geraden $PL, \pi\lambda$ und $\pi\mu, PM$ sich schneiden; so müsste auch das andere Paar sich schneiden, weil beide Paare auf einander liegen. Die Geraden LM und $\lambda\mu$ träfen sich aber dann in zwei Punkten, was unmöglich ist. Mithin treffen sich diese Geraden weder diesseits noch jenseits der $N\nu$, also gar nirgends.

Anmerkung. Dieser Satz bewährt demnach den Zusammenhang zwischen den an den beiden Seiten der Schneidenden vorkommenden zweierlei Gleichheiten und Ungleichheiten; sohin gelten, vermöge des von uns aufgestellten logischen Gesetzes, nothwendig und ohne eines nochmaligen Beweises zu bedürfen, auch schon die theils als Contrapositionen theils als Umkehrungen zusammenhängenden drei ferneren Lehrsätze. Um jedoch darzulegen, dass und wie die auf jenes allgemeine Gesetz der Logik gegründeten Beweise dieser Sätze in Lehrbüchern zu geben wären, sollen dieselben hier ebenfalls vollständig dargelegt werden.

19. II. Gegentheilig folgt hieraus:

Zwei *zusammentreffende* Geraden werden von jeder dritten, die sie in zwei Punkten trifft, unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten;

und zwar so, dass auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher die beiden Geraden zusammentreffen, jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel, und die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als ein gestreckter Winkel ist.

Beweis des Anhangs. Durch den Punkt P (Taf. IV. Fig. 5.), in welchem die erstere der zwei im Punkte O sich schneidenden Geraden LM und $\lambda\mu$ von der dritten $N\nu$ geschnitten wird, führe man die Gerade JK dergestalt, dass sie mit der Schneidenden den, mit dem Durchschnittspunkte O auf einerlei Seite liegenden Winkel NPK oder $\alpha' = \alpha$ macht; folglich JK und $\lambda\mu$ von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, und also (vermöge I.) nirgends zusammentreffen. — Nun muss aber jede Gerade, welche in den beiden Scheitelwinkeln b der Geraden LM und $N\nu$ durch ihren Durchschnittspunkt P geführt wird, in die gerade Verbindungslinie $O\pi$ der Schenkel eines solchen Winkels einschneiden *), also auch in die Gerade $\lambda\mu$. Mithin kann die JK, weil sie die $\lambda\mu$ nirgends trifft, keineswegs in den zwei Scheitelwinkeln b der Geraden LM und $N\nu$, sondern nur in den zwei anderen, a, liegen, und daher insbesondere ihre Richtung PK in dem Winkel $NPM = a$; wesswegen $NPM > NPK$ oder $a > \alpha'$ ist. — Weil aber $\alpha' = \alpha$ construirt worden, muss auch $a > \alpha$ sein.

20. III. Umkehrung des ersten Lehrsatzes:

Zwei gerade Linien, welche *nirgends zusammentreffen*, werden von jeder dritten Geraden, die sie beide trifft, unter *gleichen* Wechselwinkeln geschnitten.

---

*) Weil diese Gerade in das Innere der geschlossenen Figur $P\pi OP$ eindringt, und also den Umfang dieser Figur wenigstens noch einmal schneiden muss, was nur in der Strecke $O\pi$ möglich ist.

ed by Google

Beweis. Könnten zwei gerade Linien, die sich nirgends treffen, wie LM und $\lambda\mu$ in Taf. IV. Fig. 4., von einer dritten $N\nu$ unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten werden; so müssten die beiden Seiten der Schneidenden $N\nu$ (vermöge Art. 14.) darin von einander sich unterscheiden, dass auf der einen Seite jeder äussere Winkel grösser, auf der anderen aber kleiner als sein innerer Wechselwinkel ist. Allein die zwei Geraden LM und $\lambda\mu$ treffen einander nirgends, also weder auf der einen, noch auf der anderen Seite der Schneidenden $N\nu$; folglich sind in dieser Hinsicht die beiden Seiten der Schneidenden nicht von einander verschieden, sondern gleich beschaffen. Sonach gibt es durchaus kein Merkzeichen von den zwei Geraden, mittels dessen die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich jener Vergleichungen der Wechselwinkel, von einander unterschieden werden könnten; d. h. es gibt keinen Grund eher auf der einen als auf der anderen Seite der Schneidenden die äusseren Winkel grösser als ihre inneren Wechselwinkel zu denken; oder vielmehr, jeder Grund, aus welchem man eine solche Eigenschaft der einen Seite der Schneidenden zuschreiben will, berechtigt auch, dieselbe Eigenschaft ihrer anderen Seite beizulegen, so dass auf einer jeden Seite der Schneidenden der äussere Winkel nicht nur grösser, sondern auch zugleich kleiner als sein innerer Wechselwinkel sein müsste; was doch in sich selbst schon ungereimt wäre. Mithin können die beiden Seiten der Schneidenden, rücksichtlich der Vergleichung ihrer Wechselwinkel, nur gleich beschaffen, folglich auf jeder Seite jedweder äussere Winkel seinem inneren Wechselwinkel nur gleich sein. Dann aber sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich, und die beiden Geraden LM und $\lambda\mu$ werden von der dritten $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten.

Anderer Beweis. Gesetzt der behauptete hypothetische Satz würde nicht gelten, so müsste mit seiner Bedingung das Gegentheil seiner Folge verbunden sein, also der Satz gelten:

> „Wenn zwei Geraden nicht zusammentreffen, so werden sie von einer dritten unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten."

Aus diesem aber würde mit logischer Strenge in aufhebender Weise gefolgert werden:

> „Wenn zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, so müssen sie zusammentreffen."

Allein dieser Satz ist mit dem ersten genau begründeten Lehrsatze, dem zufolge die Geraden nicht zusammentreffen, im entschiedenen Widerspruche. Mithin hat der behauptete Satz volle Giltigkeit.

21. IV. Gegensätzlich folgt hieraus und aus dem Anhange zum IIten Satze:

Zwei gerade Linien, die von einer dritten in zwei Punkten unter *ungleichen* Wechselwinkeln geschnitten werden, *treffen sich*;

und zwar auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ausmachen.

22. Schlussbemerkung. Nunmehr unterliegt es keinem weiteren Anstande, vor aller Kenntniss der Lehre vom Dreiecke, bloss durch Deckung von ebenen Figuren nachzuweisen, dass durchaus getrennte Geraden, auch durchweg gleichabständig von einander sind. Dann ist man berechtigt, solchen Geraden die Benennung parallel zu geben.

XXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Dr. A. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

1) Wenn man durch die Winkelspitzen eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in der Spitze des Dreiecks hat, so ist jedes Loth von der Parabel auf die Hypotenuse das harmonische Mittel zwischen den darauf gebildeten Abschnitten. (Bemerkenswerth wegen der analogen Lösung der entsprechenden Aufgabe vom geometrischen Mittel.)

2) Wenn man durch den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel Parallelen mit den Asymptoten zieht und diese als Achsen betrachtet, so ist die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, welches die Halbachse der Hyperbel zum Schenkel hat, das harmonische Mittel zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes der Hyperbel.

3) Wenn man eine gleichseitige Hyperbel auf dieselben Achsen wie vorher bezieht, so ist die Ordinate irgend eines Punktes derselben das harmonische Mittel zwischen der zugehörigen Abscisse und der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, welches die Achse der Hyperbel zur Höhe hat.

4) Frage, worauf die Antwort verlangt wird:

Wenn man vier harmonische Strahlen durch zwei Transversalen schneidet und auf jedem Strahle zu den beiden Durchschnitts-

Digitized by Google

punkten und dem Convergenzpunkte den vierten harmonischen Punkt sucht, liegen dann die vier gefundenen Punkte ebenfalls in einer Geraden?

5) In einem Quadrate wird die eine Seite über einen ihrer Endpunkte verlängert, es soll aus der diesem Endpunkte gegenüber liegenden Winkelspitze an die Verlängerung eine Gerade gezogen werden, so dass das zwischen der Verlängerung und der daranstossenden Quadratseite liegende Stück eine gegebene Länge hat.

6. Wenn man um Vielecke gleich breite Streifen mit Begrenzungslinien legt, die den Seiten parallel sind, so ist der Inhalt dieser Streifen bei solchen Vielecken, in die sich Kreise beschreiben lassen, jederzeit durch den Inhalt und Umfang der Vielecke und die gegebene Breite des Streifens bestimmt, d. h. also bei Vielecken von gleichem Inhalt und Umfang bei vorgeschriebener Breite derselben.

XXIX.

Miscellen.

Zu Archiv. Thl. V. S. 430.

Von dem Herrn Director Nizze am Gymnasium zu Stralsund.

Die zweite Gleichung ist in so fern unrichtig, als das Minuszeichen entweder vor beiden Gliedern der Gleichung oder vor keinem stehen muss *). Die letzte Gleichung heisst daher:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+(\varphi-\psi))$$
$$=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha+\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta))\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-(\alpha-\beta)).$$

Soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung die Diagonale CD (Taf. IV. Fig. 6.) senkrecht geschnitten wird, so setze man $\varphi=90^0-\alpha$ und $\psi=90^0-\beta$, also $\varphi-\psi=-(\alpha-\beta)$, wodurch man erhält:

$$1=\cot\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\cot\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)),$$

*) In der zweiten Gleichung auf S. 430. Z. 5. muss man das Minuszeichen streichen. M. s. auch die Thl. VI. S. 224. angezeigten Berichtigungen. Gr.

$$\text{oder } 0 = \cos\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\cos\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)) - \sin\tfrac{1}{2}(A+(\alpha-\beta))\sin\tfrac{1}{2}(A-(\alpha+\beta)),$$

$$0 = \cos A, \text{ mithin } A = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases} \quad B = \begin{cases} +90^0 \\ +270^0 \end{cases}$$

Die Bedeutung des ersten Werths von A und B erhellt sofort aus der Figur. Zur Erklärung des zweiten ist eine neue erforderlich, in welcher die beiden Winkel CAD und CBD an einerlei Seite des Durchmessers CD liegen.

Setzt man pag. 429. in der letzten Gleichung $A = 90^0$, so folgt $\sin\frac{1}{2}((\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)) = 0$, also entweder $\beta-\alpha = \varphi-\psi$, oder $\frac{1}{2}((\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)) = 180^0$, $\alpha-\beta+\varphi-\psi = 360^0$, $\varphi-\psi = 360^0+\beta-\alpha = \beta-\alpha$. Dasselbe ergiebt sich für $A = 270^0$.

Den geometrischen Lehrsatz, welcher hierin liegt, formulirte Herr Dr. Arndt, wie mich dünkt, sehr angemessen so:

Wenn man die Durchschnittspunkte zweier Gegenseitenpaare eines Kreisvierecks durch eine Gerade verbindet, so steht diese stets auf der Seite des dritten Paares senkrecht, welche ein Durchmesser des Kreises ist; wobei auch die Diagonalen zu den Gegenseiten gerechnet sind.

Ich bemerke dabei, dass der geometrische Beweis des Lehrsatzes sich sofort aus der Eigenschaft der drei Höhenperpendikel eines Dreiecks, sich in einem Punkte zu treffen, ergiebt.

Eine Diagonale oder Seite, welche nicht Durchmesser ist, wird wegen des oben ermittelten Werthes von A und B niemals senkrecht von der verbindenden Geraden getroffen.

Digitized by Google

XXX.

Näherungswerth der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms.

Von dem

Herrn Professor Dr. G. W. v. Langsdorff

an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Die genaue Berechnung der Abweichung des Watt'schen Parallelogramms führt zu einer sehr komplicirten für den Praktiker unbrauchbaren Formel. Ueberdies ist die ganz allgemeine Behandlung dieser Aufgabe schon desshalb ohne Nutzen, weil die Unbrauchbarkeit von Verhältnissen, welche gewisse Gränzen bedeutend überschreiten, von selbst in die Augen fällt. Diese Gründe veranlassten mich zu der Untersuchung, ob sich nicht die Beziehung der Abweichung zu den gegebenen Abmessungen für die praktischen Fälle durch eine einfache Näherungsformel ausdrücken lasse. Der Erfolg hat meine Erwartung übertroffen, und scheint mir der Mittheilung werth.

Die wesentliche Einrichtung des Watt'schen Parallelogramms setze ich als bekannt voraus.

Bei der gewöhnlichen Einrichtung, auf welche ich mich hier beschränke, weil sie in jeder Hinsicht die zweckmässigste zu sein scheint, hat der Balancier sd (Taf. V. Fig. 1.) beim mittleren Kolbenstande eine horizontale Lage, die Cylinder- oder Kolbenaxe MN halbirt die Höhe δQ des vom Endpunkte d beschriebenen Bogens, die Länge $ad\,(=r)$ des Parallelogramms ist gleich der Hälfte der Entfernung sd des Endpunktes d von der Axe s des Balanciers, und die Abweichung der Ecke c (des Parallelogramms), welche die Kolbenstange trägt, von der Cylinderaxe MN ist beim höchsten, tiefsten und mittleren Kolbenstande gleich Null.

Es sei nun $ABCD$ das Parallelogramm beim höchsten, $\alpha\beta\gamma\delta$ beim mittleren und $abcd$ bei einem beliebigen Kolbenstande, so folgt aus den Voraussetzungen, dass bei horizontaler Lage des Balanciers die Entfernung $\beta\gamma$ des Endpunktes β des Gegenlenkers von der Cylinderaxe MN

$$= \delta\alpha = PE\,(=r)$$

ist.

Digitized by Google

Die Abweichung A der Ecke c gegen die Balancieraxe s hin ist nun allgemein

$$A = \gamma n = \gamma\beta - n\beta = PE - nf - f\beta$$
$$= as - cs - f\beta = ae - f\beta.$$

Daher ist $A = 0$ für $ae = f\beta$; folglich ist $\alpha E = \beta F$, und für $ae = 0$ ist auch $f\beta = 0$, d. h. bei horizontaler Lage des Balanciers hat der Gegenlenker die horizontale Lage βm.

Nun ist $AE\beta$ Eine Gerade (wegen $\beta\gamma = PE$), daher auch αBF Eine Gerade, weil $\alpha E = F\beta$. Da $AB = \alpha\beta$, $Bq = \alpha E$, $\angle AqB = \angle \alpha F\beta$, so ist $\Delta ABq \cong \Delta \alpha\beta F$, $Aq = \alpha F$, $AE = BF$. Ferner ist $\alpha s = \beta\gamma$, $\alpha E = F\beta$, also $Es = F\gamma$, und $\angle AEs = \angle BF\gamma$; daher $\Delta AEs \cong BF\gamma$, und $B\gamma = As = \gamma\beta$. Hieraus folgt, dass γ die Axe des Gegenlenkers und dass die Länge desselben $= r$ ist.

Da $A = \alpha c - \beta f$, so ist wahrscheinlich nahe

$$A = \frac{ae^2}{2r} - \frac{bf^2}{2r};$$

um uns aber zu überzeugen, ob der Fehler dieses Werthes im Verhältniss zu A klein sei, suchen wir den genauen Werth von $\frac{ae^2 - bf^2}{2r}$. Wir haben

$$\frac{ae^2 - bf^2}{2r} = \frac{ae\,(2r - ae) - \beta f\,(2r - \beta f)}{2r}$$
$$= \alpha c - \frac{\alpha e^2}{2r} - \beta f + \frac{\beta f^2}{2r}$$
$$= (\alpha c - \beta f)\left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right),$$

also genau

$$A = \alpha c - \beta f = \frac{ae^2 - bf^2}{2r \cdot \left(1 - \frac{\alpha e + \beta f}{2r}\right)} = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - (\alpha e + \beta f)},$$

und in der Praxis immer sehr nahe

$$A = \frac{ae^2 - bf^2}{2r - 2\alpha e},$$

und da $ae^2 - bf^2 = (ae + bf) \cdot (ae - bf)$, noch sehr nahe

$$A = ae \cdot \frac{ae - bf}{r - \alpha e}.$$

Bei der Ausführung pflegt man aber AE höchstens $= \frac{As}{3} = \frac{r}{3}$

Digitized by Google

zu nehmen, und für das Maximum von A (worauf es hier ankommt) ist ae sehr nahe $=\frac{3}{5}\,\alpha E$ (siehe unten), also höchstens

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{AE^2}{2r}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left(\frac{r^2}{9}\right)}{2r}=\frac{r}{30}$. Daher ist höchstens

$$A=ae\,.\,\frac{ae-bf}{r-\frac{r}{30}}=\frac{1{,}034}{r}\,.\,ae\,.\,(ae-bf).$$

Für den geringsten Werth, welchen AE in der Ausübung zu erhalten pflegt, nämlich für $AE=\frac{r}{4}$, erhält man den grössten Werth von $A=\frac{1{,}02}{r}\,.\,ae\,.\,(ae-bf)$. Wir setzen daher

$$A=\frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.\,(ae-bf).$$

Für die obere Hälfte des Hubes (Taf. V. Fig. 1.) ist demnach die Abweichung

$$A=\frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.\,(ax-\alpha F),$$

also positiv (d. h. sie findet nach der Axe s hin Statt), weil $ab=\alpha\beta$, und $\angle\,bax<\angle\,\beta\alpha F$, $ax>\alpha F$. Dagegen ist in der unteren Hälfte (Taf. V. Fig. 2.)

$$A=\frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.\,(a'e'-b'f')=\frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.\,(\alpha F-a'x')$$
$$=-\frac{1{,}03}{r}\,.\,a'e'\,.\,(a'x'-\alpha F),$$

also für denselben Werth von ae (oder $a'e'$) eben so gross wie in der oberen Hälfte, aber negativ (d. h. in der Richtung von s nach a), weil $a'x'>\alpha F$ ist.

Es ist also allgemein sehr nahe

$$A=\pm\frac{1{,}03}{r}\,.\,ae\,.\,(ax-\alpha F).$$

Bezeichnet l die Länge AB eines Hängeeisens, so ist

$$ax=\sqrt{l^2-bx^2}.$$

Nun ist

Digitized by Google

$$bx = F\beta - \alpha e - f\beta = F\beta - \alpha e - (\alpha e - A)$$
$$= F\beta - 2\alpha e + A,$$
$$bx^2 = F\beta^2 - 4.\alpha e.F\beta + 4.\alpha e^2 + 2.(F\beta - 2\alpha e).A + A^2,$$

daher

$$ax = \sqrt{(l^2 - F\beta^2 + 4.\alpha e.F\beta - 4.\alpha e^2 - 2(F\beta - 2\alpha e).A - A^2)}$$
$$= \sqrt{(\alpha F^2 + 4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2\alpha e - F\beta).A - A^2)}$$

Da aber, wie man sich leicht überzeugt, das erste Glied αF^2 mehr als das Hundertfache der Summe der übrigen Glieder ist, so hat man sehr nahe

$$ax = \alpha F + \frac{4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2.\alpha e - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},$$

daher

$$A = \frac{1{,}03}{r}.\alpha e.\frac{4.\alpha e.(F\beta - \alpha e) + 2(2.\alpha e - F\beta)A - A^2}{2.\alpha F},$$

$$\left(\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.\alpha e} - 2(2.\alpha e - F\beta) + A\right).A = 4.\alpha e.(F\beta - \alpha e).$$

Es ist aber in der Ausführung $\frac{\alpha F}{\alpha e}$ wenigstens $= 2$, also $\frac{2.\alpha F.r}{1{,}03.\alpha e}$ wenigstens $= 4r$, so dass die übrigen Glieder in der Klammer verschwinden, und man sehr nahe

$$A = \frac{1{,}03.\alpha e}{\alpha F.r}.2.\alpha e.(F\beta - \alpha e)$$

erhält. Nun ist $\alpha e = \sqrt{\alpha e.(2r - \alpha e)}$, und wenn wir wie oben für αe seinen grössten Werth $= \frac{r}{30}$ setzen, $\alpha e = \sqrt{\alpha e.2r(1 - \frac{1}{60})}$ oder näherungsweise $\alpha e = (1 - \frac{1}{120}).\sqrt{\alpha e.2r}$. Daher ist hinlänglich genau

$$A = \frac{1{,}02}{r}.\sqrt{\alpha e.2r}.\frac{2.\alpha e.(F\beta - \alpha e)}{\alpha F}.$$

Der Ausdruck $x^{\frac{1}{2}}(a - x)$ wird ein Maximum für $x = \frac{3}{5}a$. Daher ist die grösste Abweichung sehr nahe

$$A = \frac{1{,}02.2^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}.F\beta^{\frac{1}{2}}.\frac{2}{5}.F\beta}{\alpha F.r^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{0{,}536}{\alpha F}.\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}}.$$

ed by Google

Bezeichnen wir den Kolbenhub durch h, so ist

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - F\beta},$$

also sehr nahe

$$F\beta = \frac{FB^2}{2r - \frac{FB^2}{2r}} = \frac{2r\left(\frac{h}{4}\right)^2}{4r^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2} = \frac{2rh^2}{64r^2 - h^2},$$

wofür wir, weil immer nahe $r = \frac{3}{4}h$ genommen wird,

$$F\beta = \frac{2rh^2}{62r^2} = \frac{2h^2}{62r}$$

setzen können. Diess giebt

$$\sqrt{\frac{F\beta^5}{r}} = \sqrt{\frac{2^5 . h^{10}}{62^5 . r^6}} = 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3},$$

und, wenn wir αF näherungsweise $= l$ setzen,

$$A = \frac{0{,}536}{l} . 0{,}000187 . \frac{h^5}{r^3} = 0{,}000105 . \frac{h^5}{lr^3}.$$

Wird in dem Werthe von $F\beta$ der Hub $h = r$ gesetzt, was gleichfalls gebräuchlich ist, so erhält man $A = 0{,}000095 . \frac{h^5}{lr^3}$. Wir können also ohne Bedenken den Mittelwerth für A nehmen, nämlich

$$A = 0{,}0001 . \frac{h^5}{lr^3}$$

setzen, indem ein Unterschied von $\frac{1}{20}$ des Ganzen hierbei auf die Wahl der Abmessungen keinen Einfluss haben kann.

Nimmt man, wie gewöhnlich, der Watt'schen Vorschrift gemäss, $r = \frac{3}{4}h$ und $l = \frac{h}{2}$, so ist die grösste Abweichung $A = 0{,}00048 . h$, also für $h = 1$ Meter nahe $A = 0{,}5$ Millimeter, und für $h = 2{,}44$ Meter (den grössten gebräuchlichen Hub) $A = 1\frac{1}{6}$ Millimeter. Sollte, für $r = \frac{3}{4}h$ und $h = 2$ Meter, A nur $= 0{,}5$ Millimeter sein, so müsste l beinahe gleich h sein; $h = 2{,}44$ Meter. $l = \frac{h}{2}$ und $A = 0{,}5$ Millimeter fordert r beinahe $= h$.

Digitized by Google

XXXI.

Analytische Behandlung einiger die Linien zweiten Grades betreffenden Gegenstände.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

I. Die Grundeigenschaft von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt als Directrix *).

Gewöhnlich (m. s. z. B. Magnus Sammlung etc. Thl. I. pag. 161. seqq.) pflegt man von der allgemeinen Theorie der Reciprocitätsverwandtschaft auszugehen, und die Resultate dann auf den Kegelschnitt zu übertragen; des Folgenden wegen werde ich das Haupttheorem der Polarität unmittelbar für den Kegelschnitt als Directrix erweisen, und für die allgemeinste Gleichung des letztern die Polare und den Pol zu bestimmen suchen.

§. 1.

Der Berührungspunkt einer von dem ausserhalb des Kegelschnitts $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ liegenden Punkte p, q an den Kegelschnitt gezogenen Tangente werde mit x, y bezeichnet. Die Gleichung dieser Tangente ist bekanntlich

$$(q-y)(Ay+Bx+D)+(p-x)(By+Cx+E)=0,$$

oder

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)-y(Ay+Bx+D)-x(By+Cx+E)=0,$$

indem p, q die laufenden Coordinaten sind. Da nun

$$y(Ay+Bx+D)+x(By+Cx+E)=Ay^2+2Bxy+Cx^2+Dy+Ex$$
$$=-(Dy+Ex+F),$$

---

*) Eine rein geometrische Behandlung dieses Gegenstandes s. m. im Archiv. Thl. V. pag. 135. seqq.

Digitized by Google

so ist die Gleichung der Tangente:

$$q(Ay+Bx+D)+p(By+Cx+E)+Dy+Ex+F=0,$$

oder der Berührungspunkt x, y genügt folgender Gleichung:

1. $(Aq+Bp+D)y+(Bq+Cp+E)x+Dq+Ep+F=0.$

Die letztere drückt eine Gerade aus, in welcher die beiden stets existirenden Berührungspunkte liegen, und welche Berührungssehne genannt wird.

§. 2.

Lehrsatz.

Liegen mehrere Punkte ausserhalb eines Kegelschnitts in gerader Linie, so treffen die den einzelnen Punkten entsprechenden Berührungssehnen in demselben Punkte zusammen, einen besondern Fall ausgenommen, in welchem die Berührungssehnen parallel sind.

Beweis.

Die Gerade, in welcher die in Rede stehenden Punkte liegen, sei $q=mp+n$ (p, q laufende Coordinaten), und p, q; p_1, q_1 seien die Coordinaten von zwei beliebigen Punkten derselben. Die den letztern entsprechenden Berührungssehnen werden nach 1. ausgedrückt durch

$$a)\quad \left.\begin{matrix}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p\\+(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{matrix}\right\}=0,$$

$$b)\quad \left.\begin{matrix}[(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E]p_1\\+(An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F\end{matrix}\right\}=0;$$

nachdem $mp+n$ für q, mp_1+n für q_1 gesetzt worden *).

α) Es kann nun der Fall vorkommen, dass die Geraden a) und b) parallel sind; er tritt nämlich dann ein, wenn der Werth des Bruchs

$$\frac{(Bm+C)p+Bn+E}{(Am+B)p+An+D}$$

von der Grösse p ganz unabhängig ist. Die dazu erforderliche und ausreichende Bedingungsgleichung ergiebt sich, wenn man obigen Bruch der Constanten γ gleich setzt, und die Gleichung dann auf Null bringt, nämlich

---

*) Jede dieser Gleichungen, z. B. a), lässt sich auch unter folgender Form schreiben:

$$[(Am+B)p+(An+D)]y+[(Bm+C)p+(Bn+E)]x+(Dm+E)p+Dn+F=0.$$

Digitized by Google

$$[Bm+C-\gamma(Am+B)]p+Bn+E-\gamma(An+D)=0;$$

und diese Gleichung wird für jedes p gelten, wenn zugleich

$$Bm+C-\gamma(Am+B)=0,$$
$$Bn+E-\gamma(An+D)=0$$

ist. Eliminirt man γ, so entsteht

$$c)\quad (BD-AE)m-(B^2-AC)n+CD-BE=0.$$

Diese Gleichung zeigt dann, dass die gegebene Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser des Kegelschnitts ist. Denn was die Ellipse und Hyperbel betrifft, so sind die Coordinaten des Mittelpunkts bekanntlich

$$t=\frac{AE-BD}{B^2-AC},\quad u=\frac{CD-BE}{B^2-AC},$$

und nach $c)$ also $u=mt+n$, weshalb der Mittelpunkt in der Geraden $q=mp+n$ liegt. — Mit Rücksicht auf die Parabel ist $B^2-AC=0$, und die Gleichung $c)$ also $m=\frac{CD-BE}{AE-BD}$. Setzt man $CD-BE=H_1$, $AE-BD=H$, und eliminirt D zwischen beiden Gleichungen, so kommt $BH_1+CH=0$, oder $m=\frac{H_1}{H}=-\frac{C}{B}$, folglich die Gerade $q=mp+n$ ein Durchmesser, da die Durchmesser der Parabel bekanntlich in der Gleichung enthalten sind $Bu+Ct+E=0$.

Wenn also die gegebene Gerade ein Durchmesser des Kegelschnitts ist, so sind alle Berührungssehnen einander parallel, und werden durch die Gleichung ausgedrückt:

$$y=-\gamma x-\frac{(Dm+E)p+Dn+F}{(Am+B)p+An+D},$$

wo

$$\gamma=\frac{Bm+C}{Am+B}=\frac{Bn+E}{An+D},$$

und zwar sind alle Sehnen demjenigen Durchmesser parallel, welcher dem gegebenen conjugirt ist.

$\beta)$ Ist die gegebene Gerade kein Durchmesser, so wird das Sehnenpaar $a)$ und $b)$ sich schneiden; zieht man $b)$ von $a)$ ab, so sieht man, dass der Coefficient von p oder p_1 verschwindet, folglich muss auch das zweite Glied der Gleichung $a)$ oder $b)$ verschwinden, und es schneiden sich die sämmtlichen Berührungssehnen in demselben Punkte, dessen Coordinaten durch die beiden Gleichungen bestimmt werden:

$$2.\quad \begin{cases}(Am+B)y+(Bm+C)x+Dm+E=0,\\ (An+D)y+(Bn+E)x+Dn+F=0.\end{cases}$$

Digitized by Google

Die erste Gleichung drückt (x, y veränderlich gedacht) den der gegebenen Richtung conjugirten Durchmesser, die zweite diejenige Berührungssehne aus, welche dem Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Ordinatenaxe entspricht, welches letztere leicht aus Gleichung 1. geschlossen wird.

§. 3.

Lehrsatz.

Schneiden sich beliebig viele Secanten eines Kegelschnitts in einem einzigen Punkte, oder sind einander parallel, so liegen die Durchschnitte aller Tangentenpaare, welche man in den beiden Durchschnittspunkten einer Secante mit dem Kegelschnitt an den letztern jedesmal ziehen kann, in einer geraden Linie.

Beweis.

α) Der gegebene Durchschnittspunkt sei p, q; und $y-q=m(x-p)$ die Gleichung einer durch ihn gezogenen, den Kegelschnitt in zwei Punkten treffenden Geraden. Wird diese als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so ist nach 1.

$$(Au+Bt+D)y+(Bu+Ct+E)x+Du+Et+F=0.$$

Identificiren wir diese Gleichung mit $y-q=m(x-p)$, so ergiebt sich

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad q-mp=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D},$$

und wird m aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so entsteht

$$3.\quad (Aq+Bp+D)u+(Bq+Cp+E)t+Dq+Ep+F=0,$$

oder diejenige Gerade, in welcher die sämmtlichen Durchschnitte der Tangentenpaare liegen. Nach 1. ist sie die dem Punkte p, q entsprechende Berührungssehne, wenn der letztere ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

β) Die Geraden seien sämmtlich parallel, und durch $y=mx+n$ ausgedrückt, indem m als constant, n als veränderlich angesehen wird. Wird jede dieser Geraden wieder als Berührungssehne des Punktes t, u angesehen, so hat man wie in α)

$$m=-\frac{Bu+Ct+E}{Au+Bt+D},\quad n=-\frac{Du+Et+F}{Au+Bt+D}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$4.\quad (Am+B)u+(Bm+C)t+Dm+E=0,$$

und dies ist die Gleichung des der gegebenen Richtung conjugirten Durchmessers.

Digitized by Google

§. 4.

Anmerkung.

Der Durchschnittspunkt sämmtlicher Berührungssehnen, welche den einzelnen in einer Geraden liegenden Punkten entsprechen, wird der Pol dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt als Directrix, und die Gerade selbst die Polare genannt.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Durchschnitts der diesen Punkten entsprechenden Polaren.

Beweis.

Sind p, q; p_1, q_1 die gegebenen Punkte, so sind die Gleichungen ihrer Polaren (t, u laufende Coordinaten):

$$(Au+Bt+D)\,q+(Bu+Ct+E)\,p+Du+Et+F=0,$$
$$(Au+Bt+D)\,q_1+(Bu+Ct+E)\,p_1+Du+Et+F=0.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so kommt

$$(A\frac{q-q_1}{p-p_1}+B)\,u+(B\frac{q-q_1}{p-p_1}+C)\,t+D\frac{q-q_1}{p-p_1}+E=0;$$

multiplicirt man aber die erste Gleichung mit p_1, die andere mit p, und zieht sie dann von einander ab, so kommt

$$(Au+Bt+D)\,(p_1q-pq_1)+(Du+Et+F)\,(p_1-p)=0.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen mit der Gleichung 2. in §. 2. überein, wenn man $\frac{q-q_1}{p-p_1}$ statt m, $\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ statt n setzt, und das Theorem ist somit erwiesen, da die Gleichung der die Punkte p, q; p_1, q_1 verbindenden Geraden $y-q=\frac{q-q_1}{p-p_1}(x-p)$, oder $y=\frac{q-q_1}{p-p_1}x+\frac{p_1q-pq_1}{p_1-p}$ ist.

§. 6.

Lehrsatz.

Die Polare eines Punktes ist dem conjugirten Durchmesser desjenigen Durchmessers parallel, welcher durch diesen Punkt gezogen wird.

Digitized by Google

Beweis.

Für den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten ist nach 1. die Gleichung der Polaren $Dq+Ep+F=0$.

α) Für die Ellipse und Hyperbel seien nun t, u die Coordinaten des Mittelpunkts, also $Y=\frac{u}{t}X$ die Gleichung des durch den Anfang gezogenen Durchmessers, somit die Gleichung des conjugirten Durchmessers $Y=-\frac{Bu+Ct}{Au+Bt}X+n$, oder, weil bekanntlich $Au+Bt+D=0$, $Bu+Ct+E=0$ ist: $Y=-\frac{E}{D}X+n'$, folglich dieser conjugirte Durchmesser mit der Polare parallel.

β) Mit Rücksicht auf die Parabel, welche keinen Mittelpunkt hat, ist die Gleichung des durch den Anfang gezogenen Durchmessers $By+Cx=0$ (oder $Ay+Bx=0$), und für seinen Durchschnitt mit der Curve ist zugleich $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, oder (wegen $B^2-AC=0$, und $By+Cx=0$) $2Dy+2Ex+F=0$; also $y=\frac{CF}{2(BE-CD)}$, $x=-\frac{BF}{2(BE-CD)}$. Die Tangente in diesem Durchschnitt entspricht hier dem conjugirten Durchmesser; ihre Gleichung ist $Y=-\frac{E}{Ay+Bx+D}X+n$, aber $Ay+Bx=0$, also $Y=-\frac{E}{D}X+n$, und somit auch für diese Curve der Satz erwiesen.

II. Drei Hauptsätze für das in und um einen Kegelschnitt beschriebene Viereck, wobei die Berührungspunkte des letztern die Ecken des erstern sind.

1) Der Durchschnitt zweier Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks liegt mit einem Paare der Gegenecken des umschriebenen in gerader Linie.

2) Die beiden Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks liegen mit den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseitenpaare des umschriebenen in gerader Linie.

3) Die vier Diagonalen des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks treffen in demselben Punkte zusammen.

§. 7.

Wenn die gerade Linie $y=mx+n$ mit dem Kegelschnitt $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ nur einen Punkt gemein hat, oder eine Tangente desselben ist, so findet man leicht die Bedingungsgleichung:

$$(B^2-AC)n^2+2(AE-BD)mn+(D^2-AF)m^2+2(DE-BF)m+2(BE-CD)n+E^2-CF=0.$$

Digitized by Google

Setzen wir zur Abkürzung

$$\omega)\quad \begin{cases} B^2-AC=G, & BE-CD=K, \\ BD-AE=H, & BF-ED=L, \\ D^2-AF=J, & E^2-CF=M; \end{cases}$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$Gn^2-2Hmn+Jm^2+2Kn-2Lm+M=0.$$

Zweckmässig ist es, die Gerade $y=mx+n$ unter der Form

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

darzustellen; die vorhergehende Gleichung wird dann

$$5.\quad G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0.$$

§. 8.

Nimmt man nun die beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks als Axen der x und y, ihren Durchschnitt also als Anfang der Coordinaten an, und bezeichnet die Coordinaten der Endpunkte dieses Vierecks durch $\alpha, 0;\ \alpha_1, 0;\ 0, \beta;\ 0, \beta_1$; so sind die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten:

$$6.\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta}=1, \\ \frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta_1}=1, \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta_1}=1; \end{cases}$$

und weil sie den Kegelschnitt berühren, so hat man nach 5. die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} 7. & G\alpha^2\beta^2+2H\alpha\beta^2+J\beta^2+2K\alpha^2\beta+2L\alpha\beta+M\alpha^2=0, \\ 8. & G\alpha_1{}^2\beta^2+2H\alpha_1\beta^2+J\beta^2+2K\alpha_1{}^2\beta+2L\alpha_1\beta+M\alpha_1{}^2=0, \\ 9. & G\alpha_1{}^2\beta_1{}^2+2H\alpha_1\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha_1{}^2\beta_1+2L\alpha_1\beta_1+M\alpha_1{}^2=0, \\ 10. & G\alpha^2\beta_1{}^2+2H\alpha\beta_1{}^2+J\beta_1{}^2+2K\alpha^2\beta_1+2L\alpha\beta_1+M\alpha^2=0. \end{cases}$$

Mittelst dieser vier Gleichungen können vier Coefficienten des Kegelschnitts bestimmt werden, einer bleibt unbestimmt (der sechste ist willkührlich), und es können also unendlich viele Linien zweiten Grades vier Gerade berühren. Versuchen wir jene vier Coefficienten zu bestimmen.

Digitized by Google

Eliminirt man M aus den beiden ersten Gleichungen, dann aus den beiden letzten, so kommt:

$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta + 2L\alpha\alpha_1 = 0,$$
$$[2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1)]\beta_1 + 2L\alpha\alpha_1 = 0;$$

zieht man diese Gleichungen von einander ab, so findet sich:

$$11. \quad \begin{cases} L = 0, \\ 2H\alpha\alpha_1 + J(\alpha+\alpha_1) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man G aus 7. und 10., so wird wegen $L = 0$:

$$12. \quad 2K\beta\beta_1 + M(\beta+\beta_1) = 0.$$

Subtrahirt man endlich 10. von 7., so kommt wegen $L = 0$:

$$(G\alpha^2 + 2H\alpha + J)(\beta+\beta_1) + 2K\alpha^2 = 0;$$

führt man in diese Gleichung für $2H\alpha + J$ seinen Werth aus 11. ein, für $\beta+\beta_1$ seinen Werth aus 12., so wird:

$$13. \quad G\alpha\alpha_1\beta\beta_1 - J\beta\beta_1 - M\alpha\alpha_1 = 0.$$

Setzt man $\frac{H}{G} = H_1$, $\frac{J}{G} = J_1$, etc., und drückt mittelst der vier Gleichungen 11., 12., 13. durch M_1 die vier übrigen Grössen aus, so erhält man:

$$14. \quad \begin{cases} L_1 = 0, \\ 2K_1 = -\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1} M_1, \\ 2H_1 = +\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1), \\ J_1 = -\frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1). \end{cases}$$

Noch sind Relationen zwischen den Grössen G, H, J etc. und den ursprünglichen Coefficienten A, B, C, etc. von Wichtigkeit. Man braucht nur auf die Relationen a) zurückzugehen.

$$15. \quad \begin{cases} \text{Aus der 4ten u. 5ten } (B \text{ eliminirt}) \text{ folgt } DM - FK = 0. \\ \text{„ „ „ „ „ } (D \text{ „ }) \text{ „ } BM - EK = 0. \\ \text{Aus der 2ten u. 4ten } (E \text{ eliminirt}) \text{ folgt } BJ - DH = 0. \\ \text{„ „ „ „ „ } (B \text{ „ }) \text{ „ } EJ - FH = 0. \\ \text{Aus der 2ten u. 4ten } (E \text{ eliminirt}) \text{ folgt } DG - BH - AK = 0. \\ \text{„ „ „ „ „ } (D \text{ „ }) \text{ „ } EG - CH - BK = 0. \end{cases}$$

§. 9.

Aus den Betrachtungen im vorigen Paragraphen ergiebt sich leicht die Auflösung der Aufgabe: den Ort des Mittelpunkts aller Linien zweiten Grades zu bestimmen, welche vier Gerade berühren. Denn sind x, y die Coordinaten dieses Mittelpunktes, so ist bekanntlich

$$x = -\frac{H}{G},\ y = -\frac{K}{G},\ \text{oder}\ x = -H_1,\ y = -K_1;$$

also nach 14.:

$$2x = -\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta\beta_1}(M_1 - \beta\beta_1),$$

$$2y = +\frac{\beta+\beta_1}{\beta\beta_1} M_1.$$

Eliminirt man jetzt aus diesen beiden Gleichungen die Veränderliche M_1, so kommt als Gleichung des gesuchten Orts:

$$2y(\alpha+\alpha_1) + 2x(\beta+\beta_1) = (\alpha+\alpha_1)(\beta+\beta_1).$$

Bei der Discussion dieser Geraden halte ich mich nicht auf, da dieser Gegenstand schon oft abgehandelt ist.

§. 10.

Da die Seiten des eingeschriebenen Vierecks Berührungssehnen sind, so ist nach 1. die Gleichung

16.
$$\begin{cases} \text{der dem Punkte } \alpha,\ 0 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (B\alpha + D)y + (C\alpha + E)x + E\alpha + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } \alpha_1,\ 0 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (B\alpha_1 + D)y + (C\alpha_1 + E)x + E\alpha_1 + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } 0,\ \beta \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (A\beta + D)y + (B\beta + E)x + D\beta + F = 0; \\ \text{der dem Punkte } 0,\ \beta_1 \text{ entsprechenden:} \\ \qquad (A\beta_1 + D)y + (B\beta_1 + E)x + D\beta_1 + F = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden ersten Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks sind also wegen $L = 0$ (vergl. 15.):

17. $$x = 0,\ y = -\frac{M}{K} = -\frac{E}{B} = -\frac{F}{D} = \frac{2\beta\beta_1}{\beta+\beta_1}.$$

Digitized by Google

Die Coordinaten des Durchschnitts der beiden andern Gegenseiten sind:

$$18.\quad y=0,\ x=-\frac{J}{H}=-\frac{D}{B}=-\frac{F}{E}=\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}.$$

Da also der erste Durchschnitt auf der Axe der y, der andere auf der Axe der x liegt, so haben wir das Theorem 1) erwiesen.

Betrachtet man ferner zwei Gegenecken des äussern Vierecks als zugeordnete Punkte, den Durchschnitt der Diagonalen als den dritten Punkt, so ist der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks (welcher mit den erwähnten Gegenecken und dem Durchschnitt der Diagonalen in gerader Linie liegt) der dem 3ten Punkte zugeordnete 4te harmonische Punkt, wie sich aus der Definition der 4 harmonischen Punkte, aus dem Werthe von y aus 17., oder von x aus 18. sehr leicht ergiebt.

§. 11.

Die Gleichung der Geraden, welche die Durchschnitte der Gegenseitenpaare des eingeschriebenen Vierecks verbindet, ist

$$Y=-\frac{\beta\beta_1(\alpha+\alpha_1)}{\alpha\alpha_1(\beta+\beta_1)}\left(X-\frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}\right),$$

oder, wie man leicht findet:

$$19.\quad \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2.$$

Nun genügt der Durchschnitt zweier Gegenseiten des umschriebenen Vierecks den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta_1}=1$; der Durchschnitt der beiden andern Gegenseiten den beiden Gleichungen $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta_1}=1$, $\frac{X}{\alpha_1}+\frac{Y}{\beta}=1$. Durch Addition ergiebt sich, dass der Durchschnitt irgend zweier Gegenseiten der Gleichung $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)Y+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)X=2$, d. i. der Gleichung 19. genügt, und somit haben wir auch das Theorem 2) erwiesen.

§. 12.

Die Grössen α, α_1, β, β_1 lassen sich auch durch die Coefficienten des Kegelschnitts A, B, C, etc. ausdrücken. Denn nach 14. ist:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=-\frac{2K_1}{M_1}=-\frac{2D}{F}\text{ (cf. 15.)},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{2H_1}{J_1}=-\frac{2E}{F};$$

folglich wird die Gleichung 19.:

$$20.\quad DY+EX+F=0.$$

Dies ist aber die Gleichung der Polaren des Anfangs der Coordinaten, und somit ist die Gerade, in welcher die vier Durchschnitte der Gegenseiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vierecks liegen, die Polare des Durchschnitts der beiden Diagonalen.

§. 13.

Das Theorem 3) endlich kann durch die Theorie der Polarität am einfachsten erwiesen werden.

Es sei Taf. V. Fig. 3 $ABCD$ das eingeschriebene, $KLMN$ das umschriebene Viereck. Weil K der Pol von AB, M der Pol von CD, so ist KM die Polare des Durchschnitts von AB und CD (cf. §. 5.), ebenso ist die Diagonale LN die Polare des Durchschnitts von BC und AD. Ferner ist B der Pol von KL, D der Pol von MN, also BD die Polare des Durchschnitts von KL und MN, ebenso AC die Polare des Durchschnitts von LM und KN. Da nun die 4 Durchschnitte der Gegenseiten des innern und äussern Vierecks in einer Geraden liegen, so werden ihre Polaren, nämlich die vier Diagonalen, sich in einem Punkte, dem Pole jener Geraden, schneiden.

Digitized by Google

XXXII.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte.

Von

dem Herausgeber.

Das sogenannte Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte ist eine für die Praxis so wichtige Aufgabe, dass jede neue Auflösung derselben, welche einigen Nutzen für die praktische Anwendung verspricht, nicht ganz unbeachtet bleiben wird. Die Auflösungen, welche ich in diesem Aufsatze geben werde, gründen sich auf einen sehr leicht zu beweisenden geometrischen Lehrsatz, der auf folgende Art ausgesprochen werden kann, wobei man Taf. VI. Fig. 1. und Taf. VI. Fig. 2. zu vergleichen hat.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise sich in den Punkten C und D schneiden, von einem dieser beiden Durchschnittspunkte, etwa von dem Punkte C aus, zwei beliebige, die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A und B schneidende gerade Linien AC und BC gezogen, und an diese beiden geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die einander gleichen Winkel CAA' und CBB' gelegt werden, deren nöthigenfalls über die Punkte A und B hinaus verlängerte Schenkel AA' und BB' die beiden Kreise zum zweiten Male in den Punkten A_1 und B_1 schneiden; so geht die durch die Punkte A_1 und B_1 der Lage nach bestimmte gerade Linie jederzeit durch den zweiten Durchschnittspunkt D der beiden Kreise, und ist gegen die Linie DC unter demselben Winkel geneigt wie die Linien AA' und BB' gegen die Linien AC und BC, wenn man nur alle diese Winkel von den Linien AC, BC, DC an nach den Linien AA', BB', A_1B_1 hin ganz in demselben Sinne durchläuft.

Digitized by Google

Beweis.

In dem in Taf. VI. Fig. 1. dargestellten Falle ist

$$\angle CDA_1 = \angle CAA_1 = \angle CAA',$$

und in dem Vierecke $BCDB_1$ ist

$$\angle CBB' + \angle CDB_1 = 2R.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$\angle CAA' = \angle CBB',$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\angle CDA_1 = \angle CBB'$$

ist, so ist

$$\angle CDA_1 + \angle CDB_1 = 2R.$$

Hiermit ist der Satz offenbar vollständig bewiesen.

In dem in Taf. VI. Fig. 2. dargestellten, und überhaupt in jedem andern Falle, kann der Satz ganz auf ähnliche Art bewiesen werden, was Alles zu einfach ist, als dass es hier noch einer weiteren Erläuterung bedürfen sollte.

Wenn man nun nur noch überlegt, dass in beiden Fällen was sehr leicht zu beweisen ist, sowohl die Winkel CDA und CA_1A', als auch die Winkel CDB und CB_1B, einander gleich sind, so wird man leicht die folgende Auflösung des Problems der drei Punkte verstehen, wobei man Taf. VI. Fig. 3. zu vergleichen hat.

Erste Methode des Rückwärtseinschneidens.

Wenn die den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf dem Felde entsprechenden Punkte A, B, C auf dem Messtische gegeben sind, und der dem vierten Punkte $\mathfrak{D}$ auf dem Felde entsprechende Punkt D auf dem Messtische gesucht wird, so lege man an die Linien AC und BC auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA' und CBB', und die beliebigen einander gleichen Winkel CAA'' und CBB'' an. Hierauf lege man die Kippregel an AA', orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an $A''A$, orientire den Tisch wieder nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_2 der Kippregel mit der Linie AA''. Nun lege man die Kippregel an $B'B$, orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme

in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_1 der Kippregel mit der Linie BB'. Endlich lege man die Kippregel an BB'', orientire den Tisch wieder nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_2 der Kippregel mit der Linie BB''. Zieht man nun die Linien A_1B_1 und A_2B_2, so ist deren Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt D.

Dass man die Linien auf dem Messtische nie ganz, sondern immer nur so weit ausziehen muss, als zur Bestimmung ihrer Durchschnittspunkte unumgänglich erforderlich ist, weiss Jeder, der mit der Messtischpraxis nur einigermassen vertraut ist.

Aus dem oben bewiesenen Lehrsatze ergiebt sich aber unter denselben Voraussetzungen wie vorher, wobei man Taf. VI. Fig. 4. zu vergleichen hat, unmittelbar auch die folgende

Zweite Methode des Rückwärtseinschneidens.

An die Linien AC und BC lege man auf entgegengesetzten Seiten derselben in den Punkten A und B die beliebigen einander gleichen Winkel CAA' und CBB'. Hierauf lege man die Kippregel an $A'A$, orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an BB', orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt B_1 der Kippregel mit der Linie BB'. Endlich ziehe man die Linie A_1B_1 und lege durch den Punkt C eine Linie CD, welche mit der Linie A_1B_1 den, den Winkeln CAA' und CBB' gleichen Winkel CDB_1 einschliesst, so ist der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Linie A_1B_1 der gesuchte Punkt D.

Das Anlegen der gleichen Winkel an die Linien AC, BC und A_1B_1 nach den im Vorhergehenden gegebenen näheren Bestimmungen kann man, wie es mir scheint, mit aller erforderlichen Genauigkeit mittelst eines ungleichseitigen hölzernen Dreiecks und eines hölzernen Lineals auf bekannte Weise ausführen, worüber hier nichts weiter zu sagen ist. Will man aber auch diese ganz einfachen Instrumente, welche für andere Operationen doch unentbehrlich sind, ausschliessen, und sich nur den Gebrauch der Kippregel gestatten, so kann man sich zu dem Antragen der Winkel nach den aus dem Obigen bekannten Bestimmungen auch sehr zweckmässig beliebiger, nur möglichst scharf begränzter Objecte auf dem Felde, welche sich gewiss in allen Fällen leicht werden finden lassen, bedienen, wozu eine weitere Anleitung hier ebenfalls nicht erforderlich ist, weil ein Jeder, der nur mit der Einrichtung und dem Gebrauche des Messtisches hinreichend bekannt ist, die sämmtlichen hierzu erforderlichen Operationen leicht in Ausführung zu bringen im Stande sein wird.

Digitized by Google

Noch eine Auflösung unserer Aufgabe, die aber eigentlich nur als eine Modification der vorhergehenden allgemeineren Methoden anzusehen ist, ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen.

In Taf. VI. Fig. 5. sei $\angle CAA' = \angle CDB$, und die Linie AA' schneide den um das Dreieck ACD beschriebenen Kreis zum zweiten Male in dem Punkte A_1. Zieht man dann die Linie A_1D, so ist in dem Vierecke $ACDA_1$ nach einem bekannten Satze

$$\angle CDA_1 + \angle CAA' = 2R,$$

also nach der Voraussetzung

$$\angle CDA_1 + \angle CDB = 2R,$$

und A_1DB ist folglich eine gerade Linie. Nimmt man nun hierzu noch, dass $\angle CDA = \angle CA_1A$ ist, so ergiebt sich unmittelbar die folgende

Dritte Methode des Rückwärtseinschneidens.

Man lege die Kippregel an AC, orientire den Tisch nach $\mathfrak{C}$, drehe die Kippregel um A, visire nach $\mathfrak{B}$, und ziehe an der Kippregel die Linie AA'. Hierauf lege man die Kippregel in umgekehrter Lage an $A'A$, orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage den Durchschnittspunkt A_1 der Kippregel mit der Linie AA'. Dann lege man die Kippregel an A_1B und orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, worauf derselbe richtig orientirt sein wird, so dass, wenn man die Kippregel an A oder C legt und respective nach $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ visirt, der Durchschnittspunkt der Kippregel in dieser Lage mit der Linie A_1B den gesuchten Punkt D geben wird.

Dass man ein ganz ähnliches Verfahren wie so eben auf den Punkt A auch auf den Punkt B anwenden, und dadurch eine zweite der Linie A_1B analoge Linie AB_1 erhalten könnte, wo dann der gesuchte Punkt D der Durchschnittspunkt der beiden Linien A_1B und AB_1 sein würde, versteht sich von selbst. Das vorhergehende Verfahren ist aber einfacher und verdient daher den Vorzug.

Ich hoffe späterhin noch auf diesen Gegenstand in anderer Beziehung zurückzukommen, und bemerke nur noch, dass bei einigen wirklich angestellten Versuchen die drei vorhergehenden Methoden mir den zu bestimmenden Punkt immer sogleich mit aller nur zu wünschenden Sicherheit geliefert haben, möchte aber freilich gern auch die von Anderen und in grösserer Anzahl als mir dies bis jetzt möglich gewesen ist, zu machenden Erfahrungen kennen lernen, da sich nur erst dann ein ganz sicheres Urtheil über die praktische Brauchbarkeit dieser neuen Methoden für eine der wichtigsten geodätischen Operationen wird fällen lassen.

ed by Googl

XXXIII.

Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks $(x^2 + ax + b)^{-(\mu+1)}$.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Wir wollen uns vorerst die Aufgabe stellen, die höheren Differenzialquozienten von

$$(z^2 + k^2)^{-\mu}$$

zu entwickeln, weil sich aus ihrer Lösung leicht die des oben angedeuteten Problems ableiten lässt. Was nun aber die successiven Differenziationen des vorliegenden einfacheren Ausdrucks anbelangt, so findet hier der günstige Umstand statt, dass sich dieselben auf zwei ganz verschiedenen Wegen ohne die mindeste Schwierigkeit ausführen lassen, wodurch es nachher auch möglich wird, durch Vergleichung der beiden Resultate, welche man auf ihnen findet, einen sehr allgemeinen gar nicht mehr in die Differenzialrechnung gehörigen Satz als blosses Corollar aufzustellen.

I.

Zerlegen wir den obigen Ausdruck folgendermassen:

$$(z^2 + k^2)^{-\mu} = \frac{1}{(z + k\sqrt{-1})^\mu} \cdot \frac{1}{(z - k\sqrt{-1})^\mu},$$

so erhellt auf der Stelle, dass wir hier den bekannten Satz

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^n (u.v)}{\partial z^n} \\ &= n_0 u \frac{\partial^n v}{\partial z^n} + n_1 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^{n-1} v}{\partial z^{n-1}} + n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} v}{\partial z^{n-2}} + \ldots + n_n \frac{\partial^n u}{\partial z^n} v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

für

$$u = \frac{1}{(z + k\sqrt{-1})^{\mu}}, \quad v = \frac{1}{(z - k\sqrt{-1})^{\mu}} \tag{2}$$

in Anwendung bringen können. Bezeichnen wir der Kürze wegen $\sqrt{-1}$ mit i und $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m-1)$ mit $[\mu]^m$, so ist

$$\frac{\partial^m (z \pm ki)^{-\mu}}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z \pm ki)^{\mu+m}},$$

also

$$\frac{\partial^m u}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z + ki)^{\mu+m}}, \quad \frac{\partial^m v}{\partial z^m} = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z - ki)^{\mu+m}},$$

und wenn wir diese Gleichungen für die Formel (1) benutzen, so ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial^n (z^2 + k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= (-1)^n \left\{ n_0 \frac{1}{(z+ki)^{\mu}} \cdot \frac{[\mu]^n}{(z-ki)^{\mu+n}} + n_1 \frac{[\mu]}{(z+ki)^{\mu+1}} \cdot \frac{[\mu]^{n-1}}{(z-ki)^{\mu+n-1}} \right.$$
$$\left. + n_2 \frac{[\mu]^2}{(z+ki)^{\mu+2}} \cdot \frac{[\mu]^{n-2}}{(z-ki)^{\mu+n-2}} + \ldots\ldots \right\}.$$

Um nun hier die reellen und imaginären Partieen zu sondern, setzen wir

$$z \pm ki = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

woraus folgt

$$r\cos\varphi = z, \quad r\sin\varphi = k;$$
$$r = (z^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tan\varphi = \frac{k}{z} \text{ oder } \varphi = \operatorname{Arc}\tan\frac{k}{z}. \tag{3}$$

Es wird dann

$$\frac{1}{z+ki} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r}, \quad \frac{1}{z-ki} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{r},$$

und wenn wir noch die Gleichungen

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm i \sin m\varphi,$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi) = \cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)$$

in Anwendung bringen, so nimmt unser Differenzialquotient folgende Form an:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{r^{2\mu+n}} \Big\{ n_0 [\mu]^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi] + n_1 [\mu]^1 [\mu]^{n-1} [\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi]$$

$$+ n_2 [\mu]^2 [\mu]^{n-2} [\cos(n-4)\varphi + i\sin(n-4)\varphi] + \ldots \Big\}.$$

Da nun aber der fragliche Differenzialquotient doch nur eine reelle Grösse sein kann, weil es $(z^2+k^2)^{-\mu}$ ist, so folgt, dass die imaginäre Partie der vorstehenden Gleichung sich von selbst annulliren muss *), so dass wir vermöge des Werthes von r erhalten:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} n_0 [\mu]^n \cos n\varphi + n_1 [\mu]^1 [\mu]^{n-1} \cos(n-2)\varphi \\ \qquad + n_2 [\mu]^2 [\mu]^{n-2} \cos(n-4)\varphi + \ldots \end{array} \right\}.$$

Dividiren wir beiderseits mit $1.2..n$ und bemerken, dass für ein ganzes positives p

$$\frac{n_p [\mu]^p [\mu]^{n-p}}{1.2..n}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\mu(\mu+1)..(\mu+p-1)\,.\,\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots n}$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+p-1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-p+1)}{1.2\ldots(n-p)}$$

$$= (\mu+p-1)_p\,(\mu+n-p+1)_{n-p}$$

ist, so gelangen wir zu dem Resultate:

$$\frac{1}{1.2..n} \cdot \frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}}} \{ (\mu-1)_0\,(\mu+n-1)_n \cos n\varphi + \mu_1 (\mu+n-2)_{n-1} \cos(n-2)\varphi$$

$$+ (\mu+1)_2 (\mu+n-3)_{n-2} \cos(n-4)\varphi + \ldots \},$$

oder $\mu+1$ für μ gesetzt:

---

*) Schreibt man die Reihe, welche den Koeffizienten von i bildet, wirklich hin, so sieht man diess auch a posteriori daran, dass sich diejenigen Glieder gegen einander heben, welche von Anfang und Ende gleichweit entfernt sind.

$$\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^{\mu+\frac{n}{2}+1}} \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 (\mu+n)_n \cos n\varphi \\ \quad + (\mu+1)_1 (\mu+n-1)_{n-1} \cos(n-2)\varphi \\ \quad + (\mu+2)_2 (\mu+n-2)_{n-2} \cos(n-4)\varphi + \ldots . \end{array} \right\} \quad (4)$$

wobei rechts $n+1$ Glieder stehen und φ die unter Nro. (3) angegebene Bedeutung hat.

Nehmen wir endlich

$$z = x + \tfrac{1}{2}a, \quad k = \sqrt{b - \tfrac{1}{4}a^2},$$

so wird nach Nro. (3)

$$\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}{x+\frac{1}{2}a} = \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2x+a}, \quad (5)$$

ferner

$$z^2 + k^2 = x^2 + ax + b,$$
$$\partial z = \partial x;$$

und mithin erhalten wir jetzt die folgende Lösung unseres Problemes:

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n (x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(x^2+ax+b)^{\mu+\frac{n}{2}+1}} \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 (\mu+n)_n \cos n\varphi \\ \quad + (\mu+1)_1 (\mu+n-1)_{n-1} \cos(n-2)\varphi \\ \quad + (\mu+2)_2 (\mu+n-2)_{n-2} \cos(n-4)\varphi + \ldots . \end{array} \right\} \quad (6)$$

Man wird leicht bemerken, dass in dieser $(n+1)$gliedrigen Reihe diejenigen Glieder gleich sind, die von Anfang und Ende gleichweit abstehen, und man könnte daher dieselben zusammennehmen, wobei jedoch gerade und ungerade n unterschieden werden müssen, weil im ersten Falle ein Mittelglied existirt, während es im zweiten fehlt.

II.

Eine von der obigen ganz verschiedene Lösung unseres Problemes ergiebt sich aus dem allgemeinen Satze

$$\frac{\partial^n f(z^2)}{\partial z^n} = (2z)^n f^{(n)}(z^2) + 2.n_2 (2z)^{n-2} f^{(n-1)}(z^2)$$
$$+ 3.4.n_4 (2z)^{n-4} f^{(n-2)}(z^2) + \ldots ,$$

Digitized by Google

von dessen Richtigkeit man sich u. A. mittelst der Bernoullischen Induktion überzeugen kann. Nimmt man hier

$$f(y) = (y + k^2)^{-\mu},$$

so wird für ein ganzes positives m:

$$f^{(m)}(y) = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(y+k^2)^{\mu+m}},$$

$$f^{(m)}(z^2) = (-1)^m [\mu]^m \frac{1}{(z^2+k^2)^{\mu+m}};$$

und folglich

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(z^2+k^2)^\mu} \left\{ [\mu]^n \frac{(2z)^n}{(z^2+k^2)^n} - 2.n_2 [\mu]^{n-1} \frac{(2z)^{n-2}}{(z^2+k^2)^{n-1}} \right.$$
$$\left. + 3.4.n_4 [\mu]^{n-2} \frac{(2z)^{n-4}}{(z^2+k^2)^{n-2}} + \ldots \right\},$$

oder, wenn man mit $(2z)^n$ in die Parenthese multiplizirt und

$$2.n_2 = \frac{n(n-1)}{1}, \quad 3.4.n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2},$$

$$4.5.6.n_6 = \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

setzt:

$$\frac{\partial^n (z^2+k^2)^{-\mu}}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^\mu} \left\{ [\mu]^n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n - \frac{n(n-1)}{1} [\mu]^{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{1.2} [\mu]^{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht durch Division mit $1.2\ldots n$:

$$\frac{1}{1.2..n} \cdot \frac{\partial^n (z^2+k^2)^\mu}{\partial z^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2z)^n (z^2+k^2)^\mu} \left\{ (\mu+n-1)_n \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n \right.$$
$$- \frac{n-1}{1} (\mu+n-2)_{n-1} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}$$
$$\left. + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} (\mu+n-3)_{n-2} \left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2} - \ldots \right\},$$

oder $\mu+1$ für μ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(z^2+k^2)^{-(\mu+1)}}{\partial z^n}\\ &=\frac{(-1)^n}{(2z)^n(z^2+k^2)^{\mu+1}}\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n\right.\\ &\qquad-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}\\ &\qquad\left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-2}-\ldots\right\}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Nehmen wir auch in dieser Gleichung die Substitutionen

$$z=x+\tfrac{1}{2}a,\quad k=\sqrt{b-\tfrac{1}{4}a^2}$$

vor und setzen zur Abkürzung

$$\frac{(2x+a)^2}{x^2+ax+b}=X,$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2..n}\cdot\frac{\partial^n(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}}{\partial x^n}\\ &=\frac{(-1)^n}{(2x+a)^n(x^2+ax+b)^{\mu+1}}\left\{n_0(\mu+n)_n X^n\right.\\ &\qquad-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}X^{n-1}\\ &\qquad\left.+(n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}X^{n-2}-\ldots\right\}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

wobei die Reihe nicht weiter fortgesetzt wird, als bis sich eines ihrer Glieder annullirt.

III.

Wir wollen nun die beiden verschiedenen Lösungen unseres Problemes mit einander vergleichen, wobei es am einfachsten ist, die Gleichungen (4) und (7) zusammenzuhalten. Es ergiebt sich so die Relation

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(z^2+k^2)^{\frac{n}{2}}}\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi+(\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi+\ldots\}\\ &=\frac{1}{(2z)^n}\left\{n_0(\mu+n)_n\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^n-(n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\left(\frac{4z^2}{z^2+k^2}\right)^{n-1}+\ldots\right\}\end{aligned}$$

wobei noch für φ der Werth $\operatorname{Arctan}\frac{k}{z}$ zu setzen wäre, wodurch φ aus der Gleichung verschwände. Man kann aber eben so leicht

ed by Google

auch z herausschaffen, indem man es durch φ ausdrückt, weil nach dem Früheren $\tan\varphi = \frac{k}{z}$, folglich $z = k\cot\varphi$ ist. Hierdurch wird dann

$$\frac{1}{z^2+k^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\cot^2\varphi+1} = \frac{\sin^2\varphi}{k^2},$$

$$\frac{4z^2}{z^2+k^2} = \frac{4\cot^2\varphi}{\cot^2\varphi+1} = (2\cos\varphi)^2;$$

und nun verwandelt sich die vorhergehende Relation in den folgenden goniometrischen Satz:

$$\sin^n\varphi\{\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi + \ldots\}$$
$$\equiv \frac{\tan^n\varphi}{2^n}\{n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^{2n} - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{2n-2} + \ldots\},$$

der sich noch besser so gestaltet:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0(\mu+n)_n\cos n\varphi + (\mu+1)_1(\mu+n-1)_{n-1}\cos(n-2)\varphi \\ &\qquad + (\mu+2)_2(\mu+n-2)_{n-2}\cos(n-4)\varphi + \ldots \\ &= n_0(\mu+n)_n(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(\mu+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{n-2} \\ &\qquad + (n-2)_2(\mu+n-2)_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wobei links $n+1$ Glieder stehen und rechts nur so viele, dass keine negativen Exponenten von $2\cos\varphi$ vorkommen können.

Das vorliegende Theorem ist wegen der beiden völlig willkührlichen Grössen μ und φ, die es enthält, von grosser Allgemeinheit und umfasst viele Sätze, die man auf anderen Wegen gefunden hat. Für $\mu = 0$ z. B. ergiebt sich

$$\cos n\varphi + \cos(n-2)\varphi + \cos(n-4)\varphi + \ldots + \cos(n-2n)\varphi$$
$$= n_0(2\cos\varphi)^n - (n-1)_1(2\cos\varphi)^{n-2} + (n-2)_2(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots.$$

Hierbei ist die linke Seite

$$= \cos n\varphi\{1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \ldots + \cos 2n\varphi\}$$
$$+ \sin n\varphi\{\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \ldots + \sin 2n\varphi\}$$
$$= \cos n\varphi\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\} + \sin n\varphi\left\{\frac{\cot\varphi}{2} - \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right\}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wie man leicht durch eine kleine Reduktion findet. So kommen wir auf den Satz:

Digitized by Google

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = (2\cos\varphi)^n - \frac{n-1}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots,$$

der auch sonst schon bekannt ist. — Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ergiebt sich aus der Gleichung (9) eine Relation, aus welcher sich sämmtliche von Herrn Dr. Björling im VIIten Theile S. 266. mitgetheilten Formeln ableiten lassen, wenn man sich auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n einlässt und einige Transformationen vornimmt.

Eine kritische Bemerkung möge diesen Aufsatz beschliessen. Man leitet oft arithmetische Sätze dadurch ab, dass man eine Funktion auf zwei verschiedene Weisen in eine nach steigenden Potenzen der Veränderlichen fortgehende Reihe verwandelt und dann eine Coeffizientenvergleichung vornimmt. Ich halte diese Methode für wissenschaftlich höchst unbedeutend, wenn ich auch ihre Brauchbarkeit bei Schülern von bloss elementaren Kenntnissen gern zugebe. Denn welchen Weg man auch zur Reihenentwickelung der Funktion einschlagen möge, so ist vermöge des Maclaurin'schen Theorems der Coeffizient von x^n nichts Anderes als $\frac{F^{(n)}(0)}{1.2..n}$; man findet also mittelst jener Methode nichts mehr und nichts weniger, als zwei bloss der Form nach verschiedene Ausdrücke für einen höheren Differenzialquotienten, aber nur in dem ganz speziellen Falle, dass man für jenen sich auf den Werth $x=0$ beschränkt. Es ist daher wissenschaftlich bei weitem richtiger, gleich direkt zwei verschiedene Formen für $F^{(n)}(x)$ aufzusuchen, wobei man den Vortheil hat, dass man in der Relation, welche sich aus der Vergleichung dieser Formen ergiebt, die Variable in ihrer ganzen Willkührlichkeit figuriren sieht und also zu einem Theoreme gelangt, welches schon an sich allgemeiner ist und wegen der darin vorkommenden Variablen auch für andere Zwecke, z. B. für die Integralrechnung, von Nutzen sein kann.

ed by Google

XXXIV.

Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einkleidung.

§. 1. So wie der Kreis entschieden die einfachste krummlinige Raumgestalt ist, eben so hat man seit Euklid das Dreieck für die vermeintlich einfachste geradlinige Raumgestalt angesehen, und auf dessen Lehre alle weiteren Forschungen der Geometrie aufgebaut. Untersucht man jedoch die möglichen noch einfacheren geradlinigen Raumgebilde, so findet man deren zwei, die bisher der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen zu sein scheinen, und die dennoch zu einer natürlichen Grundlage der Geometrie geeigneter sein dürften, als das Dreieck, nemlich:

1. Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte ausser ihr, und
2. Das System zweier paralleler ganzer Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.

§. 2. Dass diese zwei Gestalten wirklich einfacher als das Dreieck, ja sogar die einfachsten möglichen sind, leuchtet daraus ein, dass

a) an ihnen, so wie sie vorliegen, nur zwei Raumdinge, dort eine ganze Gerade und ein Punkt, hier 2 ganze Geraden, bei dem Dreiecke aber 3 Strecken und 3 Winkel als Bestandstücke vorkommen, und

b) dass zwei Systeme jener beiden Arten schon congruiren, wenn sie bloss je zwei Elemente, namentlich je eine Strecke und

Digitized by Google

je einen Winkel gleich haben, wogegen Dreiecke erst dann congruiren, wenn sie je 3 Elemente, namentlich je $n (= 1, 2, 3)$ Seiten und $3-n$ Winkel gleich haben; oder dass jedes jener Systeme durch die 2, jedes Dreieck aber durch die 3 genannten Elemente bestimmt wird; endlich

c) daraus, dass ein geradliniges Raumding, das nicht selbst ein Element — eine Strecke oder ein Winkel — sein soll, nicht durch weniger als 2 Elemente bestimmt werden kann.

§. 3. Von den angeführten zwei einfachsten Raumgestalten kann, wie man leicht einsieht, jegliche auf die andere zurückgeführt, daher auch nur die letztere als Grundlage beibehalten werden. Namentlich scheint es besser zu sein, das Parallelenpaar zu Grunde zu legen, indem es, wenn eine dieser Geraden in ihre Gesammtschaft von Punkten aufgelöst gedacht wird, aus lauter congruenten, stetig an einander hangenden Systemen einer Geraden und eines auswärtigen Punktes besteht.

§. 4. Dass endlich diese einfachsten Raumgestalten, vorzüglich die letztere, zur Aufstellung einer einleitenden Fundamentallehre der Geometrie geeigneter sind, als das Dreieck, erhellet aus folgender Betrachtung. Als, wenngleich unwissenschaftlichen so doch unabweisbaren, Grund der Haupteintheilung der Geometrie erkennt man allgemein an das Liegen der zu erforschenden räumlichen Gegenstände in einerlei Ebene oder nicht; wonach die gesammte Wissenschaft in ihre zwei Hauptabtheilungen, Geometrie der Ebene und des Raumes, Planimetrie und Stereometrie, zerfällt. Als Grund der ersten Untertheilung kann man jedoch nicht — wie neuerdings viel beliebt — die Congruenz, Aehnlichkeit und Messung (Metrik), sondern nur die Gattung der räumlichen Gegenstände gelten lassen, weil jene drei genannten Eigenschaften an jedem Raumdinge erforscht werden können, und also auch müssen.

Der Eintheilungsgrund der Gattungen planimetrischer Gegenstände kann aber nur die Beschaffenheit der sie ausmachenden Linien sein, und ihre Reihenfolge wird durch die grössere oder geringere Einfachheit und Zusammengesetztheit dieser Linien bedingt. Mithin ist zu allererst die gerade Linie — zumeist in ihrer Ganzheit — zu untersuchen, nachher kommen die gebrochenen Linien, und von ihnen vorzugsweise die geschlossenen — je nachdem sie ebene Figuren allseitig eingrenzen oder nicht, Vielecke oder Vielseite genannt —, endlich die krummen Linien zu erforschen. Mithin gehört das Parallelenpaar in die erste, das Dreieck aber in die zweite dieser drei naturgemäss gereihten Gattungen der planimetrischen Gegenstände.

§. 5. Die Fundamentallehre der Geometrie kann daher bloss die gerade Linie, und an ihr zuvörderst die Länge und Richtung, mithin die einfachsten Bestandstücke oder die Elemente aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel erforschen. Hierauf hat sie zu untersuchen: die einfachsten Verbindungen, d. i. Paare ganzer Geraden, rücksichtlich ihres Zusamentreffens oder Getrenntseins, was die sogenannte Parallentheorie ausmacht.

Digitized by Google

An diese reiht sich nun ganz naturgemäss die Erforschung des Parallelenpaares, und (als einer Besonderheit) des Systems einer Geraden mit einem auswärtigen Punkte, vornehmlich rücksichtlich der gegenseitigen Einwirkung oder wechselseitigen Bestimmung der geometrischen Elemente — der Strecken und Winkel. Diese Wechselbeziehung verfolgt sie dann umständlich in der Lehre von der (orthogonalen) Projection auf gerade Linien und vorzugsweise in der von ihr eingeleiteten Goniometrie. Auf dieser Höhe ihrer Forschungen angelangt, vermag sie nunmehr die möglichen und üblichen Methoden der Untersuchung aller weitern verwickelteren Raumgebilde nach ihren Grundzügen darzulegen, und vorzugsweise für eine oder einige, dem Lehrzwecke angemessene Methoden sich zu entscheiden. Die Hauptgattungen dieser Methoden sind:

I. Die synthetische (anschauliche) der Alten, besonders der Griechen, und

II. Die rechnende der Späteren.

Zur letzteren zählt man als Arten:

1. die algebraische;
2. die goniometrische;
3. die Coordinatenmethode (s. g. analytische Geometrie), und zwar
   a) die der Parallel-Coordinaten,
   b) die der Polar-Coordinaten;
4. die Methode der harmonischen Proportionen — meist Neuere Geometrie genannt.

§. 6. Auf die genannten einfacheren Raumgebilde und auf die nach ihnen sich gestaltende Fundamentallehre der Geometrie war ich bereits im Frühling des Jahres 1839 verfallen, wollte sie jedoch erst in dem nach und nach von mir vorbereiteten Lehrbuche der reinen Mathematik bekannt geben. Allein da die gegenwärtig herrschende Fluth der elementar-mathematischen Lehrbücher die Kenntniss des in ihnen enthaltenen Guten und Neuen zumeist lediglich auf den engen Kreis der Schüler ihrer Verfasser beschränkt, so habe ich mich entschlossen, die Grundlinien der gewiss nicht unwichtigen Lehre von den Parallelenpaaren und jene der geometrischen Fundamentallehre in einem, nach Verdienst beliebten, mathematischen Journale den Geometern vor Augen zu legen.

II.

Grundlinien der Lehre von den Parallelenpaaren.

§. 7. Erklärungen. Jedes System zweier unbegrenzten parallelen Geraden g und h heisse, ohne Rücksicht auf die sie enthaltende Ebene, ein Parallenpaar, manchmal zur Abwechselung ein Paar Parallellinien, oder (zwar bildlich und kurz, jedoch nicht wissenschaftlich) ein Geleise (Gleis, franz. l'ornière); die von ihnen, aus der sie enthaltenden Ebene ausgeschnittene

und zum Theil begrenzte Ebenen-Abtheilung der Streifen (Streif franz. la bande) des Parallelenpaars, und jede von einem Punkte der einen Parallellinie zu einem Punkte der anderen gehende Strecke a eine Zwischenlinie (Zwischenstrecke).

Bezeichnet werde ein Parallelenpaar oder sein Streifen dadurch, dass man den üblichen Ansatz des Parallelismus der beiden Geraden g und h in Klammern fasst; als $(g \parallel h)$.

§. 8. Auf die Parallelentheorie gestützte einfache Sätze.

1) Jede Zwischenlinie a ist gegen beide Parallellinien $g \parallel h$, gleich geneigt,

d. h. sie bildet mit ihr gleiche spitze, und gleiche stumpfe oder lauter rechte Winkel als Wechselwinkel, also auch gleiche kleinste hohle Winkel — Neigungswinkel genannt, und durch ag oder ah bezeichnet.

2) Ist daher eine Zwischenlinie auf einer der beiden Parallelen senkrecht, so ist sie auch auf der anderen senkrecht.

3) Eine Zwischenlinie in einem Paar Parallellinien kann, je nachdem sie auf diesen senkrecht oder schief (schräg) steht, entweder eine Querlinie oder eine Schräglinie genannt werden.

4) Alle Querlinien eines Parallelenpaares oder Streifens sind unter sich gleich.

5) Darum kann eine jede von ihnen die Weite (Zwischenweite) des Parallelenpaares, die Breite oder Höhe des Streifens heissen.

§. 9. Congruenz der Parallelenpaare oder Streifen.

1) *Hauptlehrsatz.* Zwei Parallenpaare oder Streifen, $(g \parallel h)$ und $(g' \parallel h')$, sind congruent, wenn sie je eine Zwischenlinie gleichlang, $a = a'$, und gleichgeneigt, $ag = a'g'$ haben.

Wird einfach durch Deckung bewiesen.

2) *Insbesondere*: Gleich $\left\{\begin{matrix}\text{weite}\\\text{hohe}\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}\text{Parallelenpaare}\\\text{Streifen}\end{matrix}$ sind congruent.

§. 10. Vergleichung der Zwischenlinien congruenter Parallelenpaare oder Streifen.

1) Congruente $\begin{matrix}\text{Parallelenpaare}\\\text{Streifen}\end{matrix}$ sind gleich $\begin{matrix}\text{weit}\\\text{hoch}\end{matrix}$.

2) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren, $(g \parallel h) \cong (g' \parallel h')$, sind gleichgeneigte Zwischenlinien, $ag = a'g'$, gleichlang; $a = a'$.

Beide durch Deckung zu erweisen.

3) *Besonderer Fall:* In jedem Parallelenpaare sind parallele Zwischenlinien gleichlang;

Oder: Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

ed by Googl

In $(g \parallel h)$ ist, wenn $a \parallel a'$, auch $a = a'$

4) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind ungleichgeneigte Zwischenlinien ungleichlang, und zwar gehört zu einem grösseren Neigungswinkel eine kürzere Zwischenlinie;

Oder: Bei wachsendem Neigungswinkel verkürzt sich die Zwischenlinie.

Ist in $(g \parallel h)$ oder in $(g \parallel h) \cong (g' \parallel h')$ der Winkel $ag > bg$, so ist $a < b$.

Wird durch geeignete Construction auf 2) zurückgeleitet.

Aus diesen Sätzen folgt somit gegentheilig:

5) In demselben oder in congruenten Parallelenpaaren sind gleichlange Zwischenlinien gleichgeneigt, und

6) eine jede grössere Zwischenlinie bildet einen kleineren Neigungswinkel,

oder: bei wachsender Zwischenlinie nimmt ihr Neigungswinkel ab.

7) Unter allen Zwischenlinien eines Parallelenpaares ist die senkrechte, die Querlinie oder Weite, die kürzeste.

8) Jede Gerade, welche nicht kürzer als die Weite eines Parallelenpaares ist, kann in selbes als eine Zwischenlinie eingetragen gedacht werden.

9) In einem Parallelenpaare können aus jedem Punkte einer Parallellinie zwei, aber auch nicht mehr, gleiche Schräglinien gezogen werden.

§. 11. Vergleichung von zwei Paar Zwischenlinien in zwei Parallelenpaaren.

1) Ist eine Zwischenlinie a eines Parallelenpaares $(g \parallel h)$ einer gleichgeneigten a' eines andern Parallelenpaares $(g' \parallel h')$ gleich, so ist auch jede andere Zwischenlinie b des ersten Parallelenpaares jeder gleich geneigten b' des anderen gleich.

Wenn $ag = a'g'$ und $a = a'$, zugleich aber auch $bg = b'g'$ ist; so ist auch noch $b = b'$.

Folgt aus §. 9. 1) und §. 10. 2).

2) *Besonderer Fall.* Werden zwei gerade Linien, A und B, von zwei Paar insgesammt unter sich parallelen Geraden, $g \parallel h \parallel i \parallel k$, dergestalt geschnitten, dass die Stücke a und a' der einen Geraden A gleichlang, $a = a'$, sind; so müssen auch die zwischen denselben Parallelen liegenden Stücke b und b' der andern Geraden B gleichlang, $b = b'$ sein.

§. 12. Proportionalität der Zwischenlinien in Parallelenpaaren.

Digitized by Google

1) In den Parallelenpaaren sind jede unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien jeden anderen unter sich wieder gleichgeneigten Zwischenlinien (direct) proportional;

das heisst:

In jeglichen zwei Parallelenpaaren ($g \parallel h$) und ($g' \parallel h'$) verhalten sich jede zwei gleichgeneigte Zwischenlinien, a und a', zu einander, wie jede zwei andere wieder unter sich gleichgeneigte Zwischenlinien, b und b';

nemlich, wenn $ag = a'g'$ und $bg = b'g'$
so $a : a' = b : b'$.

Oder: Das Verhältniss zweier Zwischenlinien bleibt sich in allen Parallelenpaaren gleich, so lange ihre Neigungswinkel sich gleich bleiben;

d. i. $a : b = a' : b'$.

2) Sind die Zwischenlinien nicht bloss gegen die Parallellinien, sondern auch gegen einander gleichgeneigt, so sind sie nicht nur zu einander, sondern auch zu den Summen oder Unterschieden der sie einschliessenden Parallelstrecken proportional, je nachdem sie sich zwischen diesen schneiden oder nicht.

Ist $ag = a'g'$, $bg = b'g'$ und $ab = a'b'$, so ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}.$$

3) *Besonderer Fall.* Werden zwei gerade Linien A und B von mehreren unter sich insgesammt parallelen Geraden geschnitten: so sind die dazwischen enthaltenen Stücke a, a' und b, b' jener geraden Linien einander und den Summen oder Unterschieden der von ihnen eingeschlossenen Parallelstrecken, g, h und g', h', proportional, je nachdem die betreffenden Stücke zwischen diesen Parallelenstrecken sich schneiden oder nicht;

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g \pm h}{g' \pm h'}$.

4) *Ganz besonderer Fall.* Werden zwei sich durchscheidende gerade Linien, A und B, von zwei parallelen Geraden geschnitten, so sind die vom Durchschnittspunkte aus genommenen Stücke a, a' und b, b' der geraden Linien einander und den sie abschneidenden Parallelstrecken, g und g', proportional;

nemlich $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{g}{g'}$.

5) Das Verhältniss zweier Zwischenlinien in Parallelenpaaren wächst, entweder

Digitized by Google

a) wenn der Neigungswinkel der ersten abnimmt, oder
b) „ „ „ „ zweiten zunimmt,
c) wenn beides zugleich eintritt.

III.

Hauptsätze in der Lehre vom (orthogonalen) Projiciren in einerlei Ebene auf gerade Linien.

§. 13. Hauptsätze aus dem Projiciren von Strecken.

1) Bei gleichen Neigungswinkeln sind die projicirten Strecken ihren Projectionen proportional;

Oder: Bleibt sich der Neigungswinkel gleich, so bleibt sich auch das Verhältniss der projicirten Strecke zu ihrer Projection gleich.

Specieller Fall von §. 12. 1).

2) Je grösser der Neigungswinkel, desto kleiner ist das Verhältniss der Projection zur projicirten Strecke.

Einzelner Fall von §. 12. 5).

§. 14. Das Rückprojiciren der Strecken und das Projiciren derselben auf ein Paar winkelrechter Axen.

1) Projicirt man eine Strecke a auf eine Axe und ihre Projection a' wieder zurück auf die Projicirte (oder auf eine Parallele zu dieser); so ist die erste Projection a' die mittlere Proportionale zwischen der projicirten Strecke und ihrer zweiten oder Rückprojection a''.

Denn beide Projicirungen geschehen unter gleichem Neigungswinkel, daher ist (nach §. 13. 1)):

$$a : a' = a' : a'' \text{ und } a'^2 = aa''.$$

2) Projicirt man eine Strecke r auf zwei winkelrechte Axen, oder allgemeiner auf zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammengenommen einen rechten Winkel betragen, und ihre Projectionen a und b wieder zurück auf die Projicirte, oder auf eine Parallele derselben; so sind diese zweiten oder Rückprojectionen, a' und b', zusammengenommen der projicirten Strecke gleich;

$$\text{nemlich } a' + b' = r.$$

3) *Hauptlehrsatz* (Nachbildung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Die zweite Potenz (des Zahlwerths) jeder Strecke r gleicht der Summe der zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) ihrer Projectionen a und b auf jegliche zwei winkelrechte Axen, oder auf solche zwei Axen, deren Neigungswinkel gegen die projicirte Strecke zusammen genommen einen rechten Winkel betragen.

Digitized by Google

Denn bei den so eben betrachteten zweimaligen Projectionen a, b und a', b' der Geraden r bestehen ausser der Gleichung

$$a' + b' = r$$

vermöge 1) auch noch die Gleichungen

$$a^2 = a'r, \quad b^2 = b'r,$$

woraus durch Elimination der a' und b' gefunden wird:

$$r^2 = a^2 + b^2.$$

4) (Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes). Verhalten sich drei Grössen R, A, B irgend einer, jedoch der nemlichen Art (z. B. Längen, Winkel, Flächen, Körperräume, Zeiten, u. s. f.) wie die zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) einer Strecke r und ihrer Projectionen a, b auf zwei winkelrechte Axen; so ist die erste auf die projicirte Strecke bezügliche Grösse R so gross, wie die beiden übrigen auf die Projectionen derselben bezüglichen, A und B, zusammen genommen:

$$R = A + B.$$

Denn aus $\frac{R}{r^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$ folgt weiter

$$\frac{R}{r^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2 = r^2}$$

IV.

Grundlage zur Goniometrie.

§. 15. Erklärung der goniometrischen Functionen.

0) Vorbereitung. Angemessen der bereits aufgestellten Lehre von der (orthogonalen) Projection leiten wir die Erklärung der goniometrischen oder Winkelfunctionen (Hilfszahlen) folgender Massen ein. Zuvörderst unterscheiden wir bei jedem Winkel α seine Schenkel insofern von einander, dass wir den Winkel als Ablenkung einer bezeichneten Richtung von einer anderen, des einen Schenkels vom anderen betrachten. Diesen letzteren, als ursprünglich vorhanden gedachte Richtung, nennen wir den Anfangs- oder Ausgangsschenkel; jenen ersteren ablenkenden oder abgelenkten aber den End- oder Schlussschenkel des Winkels. Von diesem abgelenkten Endschenkel wird ein Stück r projicirt, welches das projicirte Schenkelstück, die projicirte Strecke, oder kurz die Projicirte heissen möge. Zu winkelrechten Projectionsaxen nimmt man einerseits die volle Gerade des Anfangsschenkels und andererseits eine darauf senkrechte ganze Gerade, gleichviel ob sie durch des Winkels Scheitel geht oder nicht. Jene nun nennen wir die Haupt- diese die Neben-

Digitized by Google

Projectionsaxe, daher auch die Projection a des Schenkelstücks auf die erstere die Haupt-, und jene b auf die letztere die Nebenprojection. — Dabei nehmen wir die Winkel da, wo nur ihre Functionen in Rechnung kommen, vorerst nur eben so, wie sie sind, d. i. ungemessen.

1) Cosinus, Secante, Sinusversus.

Das Verhältniss der Hauptprojection a zur Projicirten r heisst

des Winkels Cosinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Hauptprojection

des Winkels Secante,

und das Verhältniss des Ueberschusses der Projicirten über ihre Hauptprojection zur Projicirten selbst

des Winkels Sinusversus;

geschrieben: $\frac{a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r-a}{r} = \mathrm{sinv}\,\alpha$.

2) Sinus, Cosecante, Cosinusversus.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Projicirten r heisst

des Winkels Sinus,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Projicirten zur Nebenprojection

des Winkels Cosecante,

und das Verhältniss des Ueberschusses des Projicirten über ihre Nebenprojection zur Projicirten

des Winkels Cosinusversus;

geschrieben: $\frac{b}{r} = \sin\alpha$, $\frac{r}{b} = \mathrm{cosec}\,\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \mathrm{cosv}\,\alpha$.

3) Tangente, Cotangente.

Das Verhältniss der Nebenprojection b zur Hauptprojection a heisst

des Winkels Tangente,

das umgekehrte Verhältniss, d. i. das der Hauptprojection zur Nebenprojection

des Winkels Cotangente;

geschrieben: $\frac{b}{a} = \mathrm{tang}\,\alpha$, $\frac{a}{b} = \mathrm{cotang}\,\alpha$.

§. 16. Andere Aufzählung der Winkelfunctionen nach dem Grade ihrer Abstammung und Bedeutsamkeit.

1) Stammfunctionen: Cosinus und Sinus.

Aus der projicirten Strecke entspringen zunächst gleichzeitig ihre Haupt- und Nebenprojection, daher auch deren Verhältnisse zur Projicirten, genannt Cosinus und Sinus des

Digitized by Google

Winkels, die goniometrischen Stammfunctionen, alle weiteren aber Sprоss- abgeleitete Functionen heissen können.

Zugleich geht in der natürlichen Abfolge der Erzeugung die Hauptprojection der Nebenprojection, also auch der Cosinus dem Sinus voran; wesswegen der Cosinus die Haupt-, der Sinus die Neben-Stammfunction genannt werden kann. Daher sind:

Goniometrische Stammfunctionen:

und zwar:

a) Haupt-Stammfunction: der Cosinus, *b*) Neben-Stammfunction: der Sinus,

d. i. das Verhältniss

der Hauptprojection a der Nebenprojection b

zur Projicirten r;

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha, \qquad \frac{b}{r} = \sin\alpha.$$

2) Sprossfunctionen.

Von diesen ist

a) die vornehmste und darum auch gewöhnlich gebrauchte:

die Tangente, d. i. das Verhältniss der Neben- zur Hauptprojection; geschrieben: $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\alpha$.

An diese drei gewöhnlich vorkommenden Functionen: Cosinus, Sinus, Tangente, schliessen sich noch

b) fünf seltener vorkommende, minder wichtige Sprossfunctionen an; namentlich:

α) die drei umgekehrten jener drei gewöhnlichen Verhältnisse, als:

das umgekehrte des Cosinus, genannt die Secante,
„ „ „ Sinus, „ „ Cosecante,
„ „ der Tangente, „ „ Cotangente,

d. i. $\frac{r}{a} = \sec\alpha$, $\frac{r}{b} = \text{cosec}\,\alpha$, $\frac{a}{b} = \text{cotang}\,\alpha$;

β) die zwei Verhältnisse der Ueberschüsse der Projicirten über ihre Haupt- und Nebenprojection zu ihr, der Projicirten selbst, genannt der Sinusversus und Cosinusversus.

d. i. $\frac{r-a}{r} = \text{sinv}\,\alpha$, $\frac{r-b}{r} = \text{cosv}\,\alpha$.

Digitized by Google

XXXV.

Ueber die Toroide.

Nach einigen Aufsätzen der Herren Breton (De Champ), Terquem, Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Terquem et Gerono. T. III. Paris. 1844. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Der Name Toroide scheint von Breton (De Champ) für eine sonst übrigens ihrer Entstehung nach schon bekannte Curve a. a. O. S. 446. eingeführt worden, und von dem Gebrauche, welcher von dieser Curve in der Baukunst gemacht wird, entlehnt zu sein. Nach einer Angabe von Terquem a. a. O. S. 454. soll Cauchy in den Comptes rendus de l'Académie des sciences. 2. série. 1841 T. XIII. p. 1062. eine analytische Theorie geliefert haben, die mir leider bis jetzt noch nicht zu Gesicht gekommen ist; ich habe aber Grund zu vermuthen, dass dieser Aufsatz von Cauchy nur allgemeine Andeutungen enthält. In der vorliegenden kurzen Abhandlung will ich den Begriff der Toroide angeben und zeigen, wie man zu ihrer Gleichung gelangen kann, wo es sich herausstellen wird, dass es dabei zuletzt hauptsächlich auf eine nicht ganz leichte Elimination einer Grösse aus zwei Gleichungen ankommt, welche von Catalan a. a. O. S. 553. auf eine elegante Weise auszuführen gelehrt worden ist, weshalb ich die Mittheilung dieses Eliminationsverfahrens und der völlig entwickelten Gleichung der Toroide, zu welcher dasselbe führt, als den Hauptzweck dieses Aufsatzes betrachte. Vielleicht wird dadurch einem der geehrten Leser des Archivs Veranlassung gegeben, den Eigenschaften der Toroide und anderer Curven von ähnlicher Entstehung weiter nachzuforschen.

Wenn man sich aus allen Punkten einer gegebenen Ellipse als Mittelpunkten mit demselben gegebenen Halbmesser eine stetige Folge von Kreisen beschrieben denkt, so heisst die, alle diese Kreise berührende oder einhüllende Curve eine *Toroide*.

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei

$$1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

und k sei der gemeinschaftliche Halbmesser der Kreise, welche man sich aus allen Punkten der Ellipse als Mittelpunkten in stetiger Folge beschrieben denkt.

Fassen wir nun irgend einen bestimmten Punkt der Ellipse, dessen Coordinaten x_1, y_1 sein mögen, in's Auge, so haben wir nach 1) die Gleichung

$$2) \quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Die Gleichung des aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Halbmesser k beschriebenen Kreises ist aber

$$3) \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = k^2.$$

Sind nun X, Y die Coordinaten des Punktes, in welchem dieser Kreis von der Toroide berührt wird, den wir den dem Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse entsprechenden Punkt der Toroide nennen wollen, so ist zuvörderst nach 3):

$$4) \quad (X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2 = k^2;$$

die Bedingung aber, dass nach der Erklärung unserer Curve der Kreis und die Toroide in dem Punkte (XY) eine gemeinschaftliche Berührende haben sollen, führt uns zu den folgenden Gleichungen.

Die Gleichung des durch den Punkt (XY) des Kreises gehenden Halbmessers desselben ist

$$5) \quad y - Y = \frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-X),$$

oder auch

$$6) \quad y-y_1 = \frac{Y-y_1}{X-x_1}(x-x_1).$$

Also ist, da die Berührende des Kreises in dem Punkte (XY) auf dem diesem Punkte entsprechenden Halbmesser des Kreises senkrecht steht, nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung dieser Berührenden:

$$7) \quad y - Y = -\frac{X-x_1}{Y-y_1}(x-X).$$

Die Gleichung der die Toroide in dem Punkte (XY) berührenden Geraden ist dagegen nach den Principien der höheren Geometrie:

Digitized by Google

$$8)\quad y-Y=\frac{\partial Y}{\partial X}(x-X);$$

und da nun nach dem Obigen die beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselben Geraden angehören müssen, so ist:

$$9)\quad \frac{\partial Y}{\partial X}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}.$$

Betrachten wir jetzt, was offenbar verstattet ist, alle veränderlichen Grössen als von der unabhängigen Variablen x_1 abhängig, so folgt aus der Gleichung 4) durch Differentiation nach x_1:

$$(X-x_1)\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-1\right)+(Y-y_1)\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)=0$$

oder

$$10)\quad (X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}$$
$$=X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}.$$

Weil aber nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}$$

ist, so ist nach 9):

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1}:\frac{\partial X}{\partial x_1}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1},$$

und folglich

$$(X-x_1)\frac{\partial X}{\partial x_1}+(Y-y_1)\frac{\partial Y}{\partial x_1}=0;$$

also nach 10):

$$X-x_1+(Y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,$$

oder

$$11)\quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{X-x_1}{Y-y_1}.$$

Nun ist nach 2):

$$\frac{x_1}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,\ \text{d. i.}\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

folglich nach 11):

$$\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{X - x_1}{Y - y_1}$$

oder

$$12) \quad a^2 \frac{X - x_1}{x_1} = b^2 \frac{Y - y_1}{y_1}.$$

Setzen wir jetzt

$$13) \quad \Theta = a^2 \frac{X - x_1}{x_1} = b^2 \frac{Y - y_1}{y_1},$$

so erhalten wir:

$$14) \quad x_1 = \frac{a^2 X}{a^2 + \Theta}, \quad y_1 = \frac{b^2 Y}{b^2 + \Theta};$$

und daher nach den Gleichungen 2) und 3):

$$15) \quad \begin{cases} \dfrac{a^2 X^2}{(a^2 + \Theta)^2} + \dfrac{b^2 Y^2}{(b^2 + \Theta)^2} = 1, \\ \dfrac{\Theta^2 X^2}{(a^2 + \Theta)^2} + \dfrac{\Theta^2 Y^2}{(b^2 + \Theta)^2} = k^2. \end{cases}$$

Bedient man sich polarer Coordinaten, und setzt demzufolge

$$X = r \cos\varphi, \quad Y = r \sin\varphi;$$

so werden diese beiden Gleichungen:

$$\left\{ \left(\frac{a \cos\varphi}{a^2 + \Theta} \right)^2 + \left(\frac{b \sin\varphi}{b^2 + \Theta} \right)^2 \right\} r^2 = 1,$$
$$\left\{ \left(\frac{\cos\varphi}{a^2 + \Theta} \right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi}{b^2 + \Theta} \right)^2 \right\} \Theta^2 r^2 = k^2;$$

oder, wenn man r^2 eliminirt und in der dadurch sich ergebenden Gleichung $k^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)$ für k^2 setzt, nach einigen leichten Reductionen:

$$15^*) \quad \begin{cases} r^2 = \left\{ \dfrac{a^2}{(a^2 + \Theta)^2} \cos\varphi^2 + \dfrac{b^2}{(a^2 + \Theta)^2} \sin\varphi^2 \right\}^{-1}, \\ (a^2 k^2 - \Theta^2)(b^2 + \Theta)^2 \cos\varphi^2 + (b^2 k^2 - \Theta^2)(a^2 + \Theta)^2 \sin\varphi^2 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen 15) die Grösse Θ, so erhält man die gesuchte völlig entwickelte Gleichung der Toroide zwischen den Coordinaten X, Y.

Bevor wir die Ausführung dieser Elimination nach Catalan zeigen, wollen wir noch die folgenden Bemerkungen vorausschicken.

Digitized by Google

Zuerst machen wir darauf aufmerksam, dass sich zu jedem Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse leicht der entsprechende Punkt (XY) der Toroide finden lässt. Aus der Gleichung 12) folgt nämlich:

$$a^4\frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = b^4\frac{(Y-y_1)^2}{y_1^2}.$$

Nun ist aber nach 4):

$$(Y-y_1)^2 = k^2-(X-x_1)^2;$$

also

$$a^4\frac{(X-x_1)^2}{x_1^2} = \frac{k^2b^4-b^4(X-x_1)^2}{y_1^2}$$

oder

$$\left(\frac{a^4}{x_1^2}+\frac{b^4}{y_1^2}\right)(X-x_1)^2 = \frac{k^2b^4}{y_1^2},$$

und folglich

$$X-x_1 = \pm\frac{kb^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}x_1.$$

Führt man dies in die aus 12) sich ergebende Gleichung

$$Y-y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(X-x_1)$$

ein, so erhält man mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$Y-y_1 = \pm\frac{ka^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}y_1,$$

und wir haben daher die beiden folgenden Gleichungen, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$16)\quad \begin{cases} X-x_1 = \pm\dfrac{kb^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}x_1, \\ Y-y_1 = \pm\dfrac{ka^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}y_1; \end{cases}$$

oder

$$17)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}\pm kb^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}x_1, \\ Y = \dfrac{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}\pm ka^2}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}}y_1. \end{cases}$$

Digitized by Google

Hieraus ersieht man, dass einem jeden Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse zwei Punkte (XY) der Toroide entsprechen, oder vielmehr, dass es für jede stetige Folge aus den Punkten einer Ellipse als Mittelpunkten beschriebener Kreise jederzeit zwei Toroiden giebt, was auch aus dem Begriffe der Toroide ohne weitere Erläuterung unmittelbar von selbst erhellet.

Weil nach 12)

$$Y-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(X-x_1)$$

und diese Gleichung bekanntlich die Gleichung der dem Punkte $(x_1\, y_1)$ der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist, so ist klar, dass alle Punkte der beiden Toroiden auf den Normalen der ihnen entsprechenden Punkte der Ellipse liegen, und von der Ellipse die constante Entfernung k haben, so dass also die Toroide zu der Klasse von Curven gehört, welche wohl zuerst von Kästner *curvae aequidistantes* genannt worden sind *). Uebrigens wird Leibnitz **) zuerst diese Entstehung einer Curve erdacht haben, scheint sich aber, wie ich, wenn mir auch die Acta Eruditorum jetzt gerade nicht zur Hand sind, doch aus einem Aufsatze von Johann Bernoulli (Opera omnia. T. I. p. 153.) zu schliessen berechtigt zu sein glaube, der Benennung *curvae parallelae* bedient zu haben. Noch gehört hierher eine Abhandlung von v. Prasse: De ellipseos evoluta et aequidistantibus et earum evolutione. Lipsiae. 1798. und De lineis et superficiebus aequidistantibus. Dissertatio inauguralis Michaelis Reiss. Gottingae. 1826. Auch findet sich eine hierher gehörende Untersuchung über die Parabel in dem Lehrbuch der höheren Geometrie in analytischer Darstellung von H. W. Brandes. Theil I. Leipzig. 1822. S. 230., wo aber die Gleichung der betreffenden Curve nicht in völlig entwickelter Gestalt dargestellt ist, indem der Verfasser die wirkliche Ausführung der erforderlichen, etwas weitläufigen Elimination unterlassen hat.

Die Elimination der Grösse Θ aus den beiden Gleichungen 15) hat nun Catalan auf folgende Art auszuführen gelehrt.

Multiplicirt man jede der beiden Gleichungen mit dem Producte $(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

$$18)\quad \begin{cases} a^2(b^2+\Theta)^2 X^2 + b^2(a^2+\Theta)^2 Y^2 = (a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2, \\ \Theta^2(b^2+\Theta)^2 X^2 + \Theta^2(a^2+\Theta)^2 Y^2 = k^2(a^2+\Theta)^2(b^2+\Theta)^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit a^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(a^2+\Theta)^2$, so erhält man:

---

*) Comment. Soc. Gotting. T. XI.

**) Acta Erud. 1695. Nov. pag. 93.

Digitized by Google

$$19)\quad (a^2-b^2)\,\Theta^2\,Y^2 = (a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2.$$

Multiplicirt man dagegen die erste der beiden in Rede stehenden Gleichungen mit Θ^2, die zweite mit b^2, zieht dann die erste Gleichung von der zweiten ab, und dividirt hierauf auf beiden Seiten durch $(b^2+\Theta)^2$, so erhält man:

$$20)\quad (a^2-b^2)\,\Theta^2\,X^2 = -(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2.$$

Durch Addition der Gleichungen 19) und 20) ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)\,\Theta^2(X^2+Y^2) = {}& \Theta^2\{(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2\}\\ &+k^2\{a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2\};\end{aligned}$$

aber nach bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned}(a^2+\Theta)^2-(b^2+\Theta)^2 &= (a^2-b^2)(a^2+b^2+2\Theta),\\ a^2(b^2+\Theta)^2-b^2(a^2+\Theta)^2 &= -(a^2-b^2)(a^2b^2-\Theta^2);\end{aligned}$$

folglich

$$21)\quad \Theta^2(X^2+Y^2) = \Theta^2(a^2+b^2+2\Theta)-k^2(a^2b^2-\Theta^2).$$

Multiplicirt man die Gleichung 19) mit a^2, die Gleichung 20) mit b^2, und addirt dann die beiden Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$\begin{aligned}(a^2-b^2)\,\Theta^2(a^2\,Y^2+b^2\,X^2) = {}& a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2\\ &-b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2;\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}&a^2(a^2k^2-\Theta^2)(b^2+\Theta)^2-b^2(b^2k^2-\Theta^2)(a^2+\Theta)^2\\ &\quad= \Theta^2\{b^2(a^2+\Theta)^2-a^2(b^2+\Theta)^2\}\\ &\qquad+k^2\{a^4(b^2+\Theta)^2-b^4(a^2+\Theta)^2\}\\ &= (a^2-b^2)\,\Theta^2(a^2b^2-\Theta^2)\\ &\quad+k^2\Theta\{2(a^2-b^2)\,a^2b^2+(a^4-b^4)\,\Theta\}\\ &= (a^2-b^2)\,\Theta\{\Theta(a^2b^2-\Theta^2)+k^2\Theta(a^2+b^2)+2k^2a^2b^2\};\end{aligned}$$

folglich

$$22)\quad \Theta(a^2\,Y^2+b^2\,X^2) = \Theta(a^2b^2-\Theta^2)+k^2\Theta(a^2+b^2)+2k^2a^2b^2.$$

Ordnet man die Gleichungen 21) und 22) nach den Potenzen von Θ, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$23)\quad \begin{cases}2\Theta^3-(X^2+Y^2-a^2-b^2-k^2)\,\Theta^2-a^2b^2k^2=0,\\ \Theta^3+(a^2\,Y^2+b^2\,X^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\,\Theta-2a^2b^2k=0.\end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen einmal Θ^3 und dann $a^2b^2k^2$, so erhält man, wenn der Kürze wegen

ich a. a. O. bekannte Resultate erwiesen, und viele Theoreme über die Grössenform q_p^k, d. i. $\frac{q(q+k)(q+2k)\ldots(q+(p-1)k)}{1.2.3\ldots p}$, aufgestellt.

Was nun zuerst die Sätze II. und III. betrifft, so sind beide in der allgemeinern Gleichung ($f(p) = 1 + \lambda p$, λ eine beliebige Grösse, gesetzt)

$$1. \quad \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k \cdot \frac{1}{f(p-k)} = (-1)^n \cdot \frac{\lambda . 2\lambda . 3\lambda \ldots n\lambda}{f(p) . f(p-1) \ldots f(p-n)}$$

enthalten, wo p eine beliebige Grösse ist. Denn man sieht leicht, dass diese Gleichung das Theorem II. giebt für $\lambda = 2$, $p = n$; das Theorem III. für $\lambda = 2$, $n = 2p+1$ (im letzteren Falle sind einige Transformationen nöthig, die ich hier übergehen kann). Man erhält die Gleichung 1., wenn man von der Grundreihe ausgeht:

$$\frac{1}{f(p)}, \quad \frac{1}{f(p-1)}, \quad \frac{1}{f(p-2)}, \text{ etc.}$$

und die $n$te Differenz bildet. Denn da allgemein $f(p) - f(p-\mu) = \lambda\mu$, so wird nach und nach

$$\Delta(\gamma_0) = \frac{1}{f(p)} - \frac{1}{f(p-1)} = -\frac{\lambda}{f(p) . f(p-1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = -\lambda \left[\frac{1}{f(p) . f(p-1)} - \frac{1}{f(p-1) . f(p-2)} \right]$$

$$= -\lambda . \frac{f(p-2) - f(p)}{f(p) . f(p-1) . f(p-2)} = \frac{\lambda . 2\lambda}{f(p) . f(p-1) . f(p-2)},$$

u. s. w.

$$\Delta^n(\gamma_0) = (-1)^n \frac{\lambda . 2\lambda . 3\lambda \ldots n\lambda}{f(p) . f(p-1) \ldots f(p-n)}.$$

Der Satz V. kann auf folgende Form gebracht werden:

$$2. \quad 1 - \frac{2}{3} m_1 + \frac{2.4}{3.5} m_2 - \frac{2.4.6}{3.5.7} m_3 + \ldots \pm \frac{2.4.6 \ldots 2m}{3.5.7 \ldots (2m+1)} = \frac{1}{2m+1},$$

oder

$$2^*). \quad \frac{2.4.6 \ldots 2m}{3.5.7 \ldots (2m+1)} - m_1 \cdot \frac{2.4.6 \ldots (2m-2)}{3.5.7 \ldots (2m-1)} + \ldots \pm 1 = (-1)^m \cdot \frac{1}{2m+1}.$$

Man hat nun nach der so eben angewandten Methode

ed by Googl

$$\Delta(\gamma_0) = \frac{2.4.6...2m}{3.5.7...(2m+1)} - \frac{2.4.6...(2m-2)}{3.5.7...(2m-1)} = -\frac{2.4.6...(2m-2)}{3.5.7...(2m+1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = -\left[\frac{2.4.6...(2m-2)}{2.5.7...(2m+1)} - \frac{2.4.6...(2m-4)}{3.5.7...(2m-1)}\right] = 3.\frac{2.4.6...(2m-4)}{3.5.7...(2m+1)},$$

$$\Delta^2(\gamma_0) = 3\left[\frac{2.4.6...(2m-4)}{3.5.7...(2m+1)} - \frac{2.4.6...(2m-6)}{3.5.7...(2m-1)}\right] =$$

$$-3.5.\frac{2.4.6...(2m-6)}{3.5.7...(2m+1)},$$

u. s. w.

$$\Delta^n(\gamma_0) = (-1)^n.3.5.7...(2n-1).\frac{2.4.6...(2m-2n)}{3.5.7...(2n+1)}.$$

Also ist nach (a), wenn $\frac{2.4.6...2m}{3.5.7...(2m+1)} = f(m)$ gesetzt wird:

3. $$f(m) - n_1 f(m-1) + n_2 f(m-2) - ... \pm f(m-n) = (-1)^n . \frac{2.4.6...(2m-2n)}{(2n+1)(2n+3)...(2m+1)}.$$

Diese Gleichung enthält den Satz V. als speciellen Fall, denn für $n=m$, wobei der Zähler $2.4.6...(2m-2n)$, wie man übersehen wird, der Einheit gleich zu setzen, resultirt die Relation 2*).

Die beiden noch übrigen Theoreme I. und IV. haben eine andere Quelle. Mit Rücksicht auf das letztere ist das allgemeine Glied $\frac{1}{n-p}(n-p)_{m-p} = \frac{(n-p-1)_{m-p}}{n-m}$, und die Summe der Reihe ist folglich $\frac{1}{n-m}\sum_{p=0}^{p=m}(n-p-1)_{m-p}$. Die aufgestellte Gleichung enthält also weiter nichts als den bekannten Satz von den Binomialcoefficienten:

$$(n-1)_m + (n-2)_{m-1} + (n-3)_{m-2} + ... + (n-m-1)_0 = n_m$$

nur in etwas veränderter Form, und dieser Satz ist nur eine Wiederholung der Formel

$$n_m = (n-1)_m + (n-1)_{m-1}.$$

Das Theorem I. endlich nimmt, wenn man mit dem ersten Factor auf der Linken der zweiten multiplicirt, und Binomialcoefficienten einführt, die Gestalt an:

4. $$\frac{m+1}{m+2}\left[\frac{1}{(m+r)_{r-2}} + \frac{1}{(m+r-1)_{r-3}} + \frac{1}{(m+r-2)_{r-4}} + ... + \frac{1}{(m+2)_0}\right] = 1 - \frac{1.2.3...(r-1)}{(m+2)(m+3)...(m+r)},$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{m+1}{m+2}\cdot\sum_{k=0}^{k=r-2}\frac{1}{(m+r-k)_{r-k-2}}=1-\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(m+2)(m+3)\ldots(m+r)}.$$

Diese Formel ist keine andere als diejenige, welche ich in einer andern Abhandlung des Crelle'schen Journals: Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden." (Band 31. p. 253–58. Formel 21.) aufgestellt habe, und welche so lautet:

$$\sum_{m=0}^{m=n}\frac{1}{(p+m)_p}=\frac{p}{p-1}\left[1-\frac{1}{(n+p)_{p-1}}\right].$$

Setzt man nämlich hier $p=m+2$, $m=r-k-2$, $n=r-2$, so kommt

$$\sum_{k=r-2}^{k=0}\frac{1}{(m+r-k)_{m+2}}=\frac{m+2}{m+1}\left[1-\frac{1}{(m+r)_{m+1}}\right],$$

und diese Relation stimmt mit 4. überein, da $(m+r-k)_{m+2}=(m+r-k)_{r-k-2}$, und $(m+r)_{m+1}=(m+r)_{r-1}$ ist.

Uebrigens habe ich die Formel 21. aus der viel allgemeinern 20. erhalten, nämlich

$$\sum_{m=0}^{m=n}\frac{1}{(q+mk)_p}=\frac{p}{(p-1)k}\left[\frac{1}{q_{p-1}}-\frac{1}{[q+(n+1)k]_{p-1}}\right].$$

Digitized by Google

XXXVII.

Weitere Erörterungen analytischer Gegenstände. Versuch einer genetischen Erklärung der analytischen Reihe.

Von dem

Herrn Dr. Barfuss zu Weimar.

---

§. 1.

Fragt man nach der Summe einer Reihe

$$\text{I.}\quad f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x),$$

in welcher jedes Glied als einerlei Function des Stellenzeigers n und einer willkührlichen Grösse x zu denken ist, so verlangt man bekanntlich einen, der Summe aller Glieder gleichen Ausdruck, der zwar auch eine Summe mehrerer Glieder sein kann, in welchem aber die Anzahl der Glieder sich gleich bleibt, welches auch der Stellenzeiger n des letzten Gliedes in der Reihe I. sein mag. Wir kennen nur eine Reihe, welche sich in Folge unserer arithmetischen Theorien unmittelbar summiren lässt, nämlich die Summe gleicher Glieder $a+a+a+\ldots$, für welche wir na schreiben. Jede andere Reihe muss also auf diese zurückgeführt werden können, wenn wir nur noch dazu bemerken, dass a auch 0 sein kann; ausserdem wäre die Summation gar nicht ausführbar. Es ergiebt sich hieraus leicht der Grundgedanke für alle Reihensummirung; man muss mit der Gleichung:

$$\text{II.}\quad \Sigma(n,x)=f(0,x)+f(1,x)+f(2,x)+\ldots+f(n,x)$$

irgend eine Rechnung anstellen, wodurch sich die Reihe auf eine, von n abhängige Anzahl gleicher Glieder reducirt, sei es auch, dass ausserdem noch einige andere Glieder, deren Anzahl durch n nicht bedingt ist, stehen bleiben. Man erhält dadurch eine Gleichung für $\Sigma(n,x)$, aus welcher dieses in der verlangten Form hervorgeht. Dabei machen wir den wesentlichen Unterschied, ob man nach der Reduction eine Reihe $a+a+a+\ldots$ erhält, in welcher $a=$ einer bestimmten Grösse ist, oder ob $a=0$ gefunden

Digitized by Google

wird. So wie man Reihen der ersten Art arithmetische nennt, so will ich die der anderen Art geometrische nennen. Die einfache arithmetische Reihe

$$0.x+1.x+2.x+\ldots+nx$$

und die geometrische

$$1+x+x^2+\ldots.+x^n$$

geben das Beispiel.

§. 2.

Welchen Weg man einschlagen muss, um die Summe einer Reihe zu finden, hängt lediglich vom Bildungsgesetz ihrer Glieder ab, aber so wie dieses Bildungsgesetz in vielerlei Formen, die alle analytisch gleichgeltend sind, ausgesprochen werden kann, so lässt sich auch die Summirung auf mancherlei Weise gestalten. Bei der geometrischen Reihe lässt die Reduction etwas am Anfange stehen, was eine vom Stellenzeiger n des letzten Gliedes unabhängige Grösse ist und in manchen Fällen auch 0 sein kann, dann verschwinden sämmtliche Glieder bis zur Stelle $n-\mu$, wobei μ bei allen Werthen von n constant bleibt, und nun behält man noch einige von n abhängige Glieder, die sich also ändern, wenn n verschiedene Werthe annimmt. Die Anzahl derselben bleibt sich entweder bei jedem Werthe von n gleich, und dann ist das Summirungsgeschäft vollständig gelungen, oder aber es ist ihre Anzahl mit n veränderlich, und dann ist die Summe in der oben geforderten Weise nicht gefunden, vielmehr ist die beabsichtigte Summation nur auf eine andere, vielleicht noch verwickeltere zurückgeführt. Bezeichnet man die mit der Reihe angestellte Rechnung mit F, so ist die durch $F.\Sigma(n,x)$ dargestellte Grösse nur in so fern von n abhängig, als $\Sigma(n,x)$ davon abhängt.

Damit man die Glieder, welche bei der Reduction am Anfange und am Ende der Reihe noch stehen bleiben, gehörig von einander sichten könne, sagt man, die Glieder am Ende seien diejenigen, welche dadurch in die Rechnung kommen, dass man die Reihe mit dem Gliede $f(n,x)$ abbricht. Denkt man sich nämlich die Reihe ins Unbestimmte fortgesetzt, so verliert man bei der Reduction die Endglieder und man findet die Anfangsglieder ohne Zweideutigkeit. Aber klarer noch wird der Ausdruck, wenn man die Reihe

III. $$\Sigma(n,v,x)=v^0f(0,x)+v^1f(1,x)+v^2f(2,x)+\ldots+v^nf(n,x)$$

zu Grunde legt, aus welcher die in II. entsteht, wenn $v=1$ wird. Hier haben die Glieder am Ende wenigstens den Factor $v^{n-\mu}$ und die Rechnung giebt überhaupt einen Ausdruck von der Form:

IV. $$F.\Sigma(n,v,x)=\begin{cases} a+bv+cv^2+\ldots.+dv^\delta \\ +Av^{n-\mu}+Bv^{n-\mu+1}+Cv^{n-\mu+2}+\ldots. \end{cases}$$

ed by Googl

Dabei sind $abc\ldots d$ Functionen von x, nicht von n oder v, $ABC\ldots$ aber sind Functionen von n und x. Die Zahl der Glieder in der Reihe $a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta$ ist unveränderlich bei jedem Werthe von n, und eben dieses gilt oft auch von der Reihe $Av^{n-\mu} + Bv^{n-\mu+1} + \ldots$, aber in vielen Fällen wächst hier auch die Anzahl der Glieder mit n, obschon sie immer endlich ist. Immer ist μ eine unveränderliche ganze Zahl und man könnte die Rechnung in allen Fällen so gestalten, dass man $\mu = -1$ hätte.

Dass man an die Stelle der Reihe

$$f(0,x) + f(1,x) + f(2,x) + \ldots + f(n,x)$$

die allgemeinere

$$f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

setzen kann, ergiebt sich daraus, dass jene aus dieser hervorgeht, wenn $v = 1$ genommen wird. Man wird leicht gewahr, dass das für die Reihe II. angegebene Summationsverfahren von aller Unbestimmtheit befreit wird, wenn man es dem Gesetz der Reihe III., welches ich das Gesetz der geometrischen Reihe nennen will, unterordnet, ja es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn die erstere in der bezeichneten Weise bildsam ist, es auch die letztere sein muss. Die Nichtachtung dieser Bemerkung ist der Grund aller Schwierigkeiten in der Reihenlehre gewesen; man verlor die syntaktische Bedeutung des ganzen Reductionsverfahrens und glaubte sich nur dann zu einem Schlusse berechtigt, wenn das, was man den Rest nennt, für unendlich grosse Stellenzeiger verschwindet.

§. 3.

Wir lassen nun die sämmtlichen Glieder weg, welche bei der Reduction am Ende der Reihe stehen bleiben, also die Glieder, die eben daher stammen, dass man die Reihe bei einem Gliede abbricht, oder die Glieder, die in dem Ausdrucke in IV. den Factor $v^{n-\mu}$ haben. Wir erhalten dadurch die allerdings unrichtige Gleichung:

$$F.\Sigma(n,v,x) = a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta,$$

und finden hieraus statt des wahren $\Sigma(n,v,x)$ eine blosse Function von v und x, die wir die Summe der unendlichen, d. h. der ohne letztes Glied gedachten Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$ nennen. Bezeichnen wir sie mit $\varphi(v,x)$, so schreiben wir dann:

$$\text{V.}\quad \varphi(v,x) = f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$$

und es ist klar, dass diese Gleichung immer unrichtig sein muss, wenn man die Reihe bei einem Gliede abbricht, mag sie nun der Function $\varphi(v,x)$ sich ohne Ende nähern oder nicht. Man darf daher diesen Ausdruck auch nicht so verstehen, als ob

$$\varphi(v,x) = f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots + v^n f(n,x)$$

für $n = \infty$ sei, vielmehr folgt auch jenseits des Gliedes $v^x f(x,x)$ noch die endlose Reihe $v^{x+1} f(\infty+1,x) + \ldots$. Diess muss man wohl berücksichtigen, wenn man bei dem Gebrauche der unendlichen Reihen nicht auf widersinnige Resultate gelangen will.

Der Ausdruck: „Summe einer unendlichen Reihe" hat an sich keinen Sinn, denn man kann immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern zusammenzählen. Man muss ihm erst eine Bedeutung beilegen, und so wie nun die neuere Analysis in ihrer Einseitigkeit hierfür die Annäherungsgrenze bestimmt, so hat die ältere aus allgemeineren Rücksichten diejenige Formel gewählt, die ich eben erklärt habe. Hier bezieht sich nämlich die Unendlichkeit der Reihe gar nicht auf eine unendliche Menge von Gliedern, sondern lediglich auf die analytische Behandlungsweise, welche unter allgemeineren Bedingungen möglich ist, als unter denen der Convergenz.

§. 4.

Diese so bestimmte Summe der unendlichen Reihe hat nun zwei sehr merkwürdige Eigenschaften. Einmal nämlich ist sie denselben analytischen Bedingungen unterworfen, denen die Reihe unterliegt, wenn diese ohne letztes Glied gedacht und nach dem Gesetz behandelt wird, welches ich in §. 2. aufgestellt habe. Wir sagen dafür, die Summenformel habe mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften. In V. nämlich hat die Function $\varphi(v,x)$ die Eigenschaft, dass $a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta$ durch die Rechnung $F.\varphi(v,x)$ herauskommt, aber eben diese Eigenschaft hat auch die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$, wenn in ihr kein Glied als das letzte gedacht wird. Wem die Unendlichkeit der Reihe Schwierigkeiten macht, der kann diese Redensart auch ganz vermeiden, wenn er dafür den Ausdruck der Dimension substituirt. Ein Glied von der Dimension m hat die Form Mv^m, wo M nicht weiter von v abhängt. Darnach hat die Reihe $f(0,x) + vf(1,x) + v^2 f(2,x) + \ldots$ bis auf Glieder von beliebiger Dimension mit der Function $\varphi(v,x)$ gleiche syntaktische Eigenschaften, nämlich bis auf Glieder von der Dimension $n - \mu$, wenn die Reihe mit dem Gliede $n$ter Dimension abgebrochen wird. So ist denn zugleich klar, dass die ältere Theorie mit unendlichen Reihen eigentlich gar nichts zu schaffen hat.

Aus der Identität der Summe und der Reihe hinsichtlich ihrer syntaktischen Eigenschaften entspringt der sehr allgemeine Reihencalcul der älteren Analysis, welcher nur dem Gesetz unterworfen ist, dass da, wo man mit den Reihen rechnet, die Glieder gleicher Dimension vollständig beisammen stehen und dass nur solche Glieder weggelassen werden, welche bei beliebiger Fortführung der Reihen zu beliebigen Dimensionen aufsteigen können. Auf solche Weise finden sich einerseits endliche, d. h. vom Dimensionszeichen unabhängige Formen, andererseits unendliche Reihen mit gleichen syntaktischen Eigenschaften, also unendliche Reihen mit ihren Summen in dem erklärten Sinne.

Digitized by Google

Dagegen ist uns die Function $\varphi(v,x)$ oft zuerst gegeben und wir sollen sie in eine Reihe entwickeln. Diese Entwickelung geschieht immer nur unter der Bedingung, dass die Reihe mit ihrer erzeugenden Function $\varphi(v,x)$ die syntaktischen Eigenschaften theile, und hieraus ist klar, dass Entwickeln und Summiren solche Operationen sind, deren eine das Umgekehrte der anderen ist. Der Entwickelung dient vorzüglich die Methode der unbestimmten Coefficienten, mit Hülfe derer man auf die leichteste Weise findet, wie die Glieder der Reihe Functionen ihres Stellenzeigers sind. Die Bestimmung geschieht eben nach den syntaktischen Eigenschaften, denen die Reihe zufolge der ihr schon gesetzten Summe genügen muss.

§. 5.

Doch das Alles giebt den unendlichen Reihen nur syntaktische Bedeutung; ihre arithmetische Bedeutung und somit ihren praktischen Werth erhalten sie durch den Satz, dass die Summe der Reihe zugleich ihre Annäherungsgrenze ist, wenn sie eine solche hat.

Setzen wir nämlich der Kürze halber in dem Ausdrucke IV.:

$$a + bv + cv^2 + \ldots + dv^\delta = y,$$
$$Av^{n-\mu} + Bv^{n-\mu+1} + \ldots = y_n;$$

so haben wir

$$F.\Sigma(n,v,x) = y - y_n,$$

und wenn wir dann die Rechnung, durch welche $F.\Sigma(n,v,x)$ sich in $\Sigma(n,v,x)$ verwandelt, durch Φ bezeichnen, so ist

$$\text{VI.} \quad \Sigma(n,v,x) = \Phi.(y - y_n),$$

wobei die Rechnung Φ nur in so fern von n abhängig ist, als y_n davon abhängt. Nähert sich nun $\Sigma(n,v,x)$ bei wachsendem n einer festen Grenze, so wird sich natürlich $\Phi.(y-y_n)$ derselben Grenze nähern, und um diese Grenze zu erhalten, wird man aus $y-y_n$ alles das weglassen müssen, was den Ausdruck $\Phi.(y-y_n)$ von n abhängig macht, denn die Annäherungsgrenze ist eben von n unabhängig. Daher muss man das ganze y_n weglassen, denn was davon stehen bleiben dürfte, müsste doch von n unabhängig sein, und es würde somit aus dem Ausdrucke $y_n = Av^{n-\mu} + Bv^{n-\mu+1} + \ldots$, in welchem $A, B \ldots$ von v nicht abhängen, eine von n unabhängige Grösse sich sondern, was aber wegen des Factors $v^{n-\mu}$ unmöglich ist.

Diess scheint mir die, der alten Analysis eigenthümliche Schlussweise zu sein, und wenn man auch eine genauere Zergliederung der Gedanken hier wünschen mag, so bleibt die Sache doch vollkommen richtig und liegt so nahe, dass die älteren Analysten, wie es scheint, gar nicht an eine weitere Ausführung dachten. Ihnen stand daher der Satz:

Digitized by Google

dass diejenige Formel, welche die Annäherungsgrenze der Reihe vorstellt, mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften habe,

wie ein Axiom fest, und diess muss man bei der Beurtheilung der älteren Theorie wohl im Auge haben, wenn man über ihre Methoden ein richtiges Urtheil fällen will.

Obige Art zu schliessen ist auch in der That so oberflächlich nicht, als sie beim ersten Anblick scheinen mag. Wenn der Ausdruck $\Phi.(y-y_n)$ mit wachsendem n sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist er eben mit n veränderlich, aber nur in so fern, als y_n von n abhängt, und man kann seine Annäherungsgrenze nur dadurch erhalten, dass man aus $y-y_n$ das mit n Veränderliche weglässt. Daher ist dieselbe entweder $\Phi.y$ oder $\Phi.(y+z)$, wo z nur eine Function von v und x sein kann. Dieses z müsste sich nun als ein analytischer Bestandtheil von y_n nachweisen lassen, denn die Grenze, welcher sich $\Phi.(y-y_n)$ ohne Ende nähert, ist ja durch die Natur dieses Ausdrucks bedingt und muss aus derselben bestimmbar sein. Wenn sich aber aus

$$y_n = v^{n-\mu}(A + Bv + \ldots.)$$

das Glied z nach irgend welchen analytischen Bedingungen absondert, so muss aus $A + Bv + Cv^2 + \ldots.$ ein Glied $\frac{z}{v^{n-\mu}}$ sich ausscheiden lassen, und da A von v nicht abhängt, so hätte man das Glied $\frac{z}{v^{n-\mu}}$ in $Bv + Cv^2 + \ldots.$ zu suchen. Aus $B + Cv + \ldots.$ müsste sich also ein Glied von der Form $\frac{z}{v^{n-\mu+1}}$ absondern lassen, und da B von v nicht abhängt, so hätte man dieses Glied in $Cv + \ldots$ zu suchen. Indem man aber so fortschliesst, findet man, dass das Glied z in y_n nirgends gefunden wird, dass also $\Phi.y$ die Annäherungsgrenze von $\Phi.(y-y_n)$ ist.

§. 6.

Hiermit habe ich die wesentlichsten Momente der älteren Theorie der Reihen dargelegt, so wie ich sie aus der Lectüre verschiedener Werke geschöpft habe. Dabei habe ich Sorge getragen, so viel als möglich Alles zu vermeiden, was ich vielleicht als mein Eigenthum in Anspruch nehmen dürfte, um dem Leser mit möglichster Treue das vorzuführen, was sich aus den Quellen schöpfen lässt. Statt der Reihe II. wählte ich die allgemeinere in III., weil die letztere in der That für alle Rechnungen mit Reihen das allgemeine Formular ist, ich will aber damit nicht sagen, dass die Theorie nicht auf die blosse Form in II. gegründet werden könne.

Es scheint mir allerdings ein Mangel der älteren Theorie zu sein, dass sie ihren Hauptsatz nicht gehörig begründet hat, ja dass man denselben aus den meisten Werken erst herausklauben muss. Dieser Hauptsatz heisst:

Digitized by Google

die Formel, welche die Annäherungsgrenze einer Reihe vorstellt, hat mit derselben Reihe, wenn sie als geometrische behandelt wird, gleiche syntaktische Eigenschaften.

Gegen diesen Mangel der älteren Analysis hat aber die neuere keinen Vorzug, denn sie weist uns zwar in den meisten Fällen klar nach, wie die Reihe einer bestimmten Grenze sich ohne Ende nähert, aber sie weist nicht nach, wie dieser Umstand eine nothwendige Folge der Rechnung war, durch welche man die Summe fand. Man giebt daher unnöthiger Weise noch die Betrachtung des Restes hinzu, während doch daraus, dass die Summenformel mit der Reihe gleiche syntaktische Eigenschaften bekam, das Verschwinden des Restes bei convergirenden Reihen mit Nothwendigkeit folgte.

Ueberhaupt liegt in der Verkennung des obigen Satzes das ganze Missverständniss, und sehr häufig bleiben auch die älteren Analysten in dieser Beziehung nicht vorwurfsfrei. Daher z. B. die verschiedenen Ansichten über die Methode der unbestimmten Coefficienten, namentlich der unnütze Zusatz, dass man die Form der Reihe vor der Coefficientenbestimmung gerechtfertigt wissen will. Begreift man unter dieser Methode alle die Fälle, wo man statt unbekannter Zahlen $A, B, C \ldots$ setzt, so mag die gedachte Forderung gerecht sein, sie fällt aber alsbald weg, wenn die Coefficienten durch eine Reihe von Gleichungen folgeweise aus einander bestimmt sind. Denn hier kann die Reihe nur so gewählt werden, dass sie mit der ihr im Voraus gesetzten Summe gleiche syntaktische Eigenschaften bekommt. Darnach bestimmt sich aber nicht nur die Relation der Coefficienten, sondern auch zugleich das, was man die Form der Reihe nennt.

Steht nun der obige grosse Satz der älteren Analysis fest, (und er wird stehen trotz aller modernen Kritik), so ist zugleich klar, dass die neuere Analysis gegen die ältere in ein kümmerliches Licht zurücktritt. Die älteren Methoden, namentlich die der unbestimmten Coefficienten, die der Umkehrung der Reihen, die combinatorische Anordnung des Systemes nach deutscher Erfindung, behalten nicht nur ihre volle Gültigkeit, sondern sie sind sogar schön und echt wissenschaftlich, da sie das Manigfaltige zu einem innigen Ganzen verbinden. Wo weist denn die neuere Theorie nach, dass Summiren und Entwickeln ganz gleiche Operationen sind, in welchen sich nur die Aufgabe umkehrt?

§ 7.

Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch folgende zwei Bemerkungen anführen. Die erste betrifft den Gebrauch des Zeichens $=$ zwischen der Function und ihrer entwickelten Darstellung. So viel ich mich erinnere, hat Thibaut zuerst über diese Sache klar gesprochen, da man nach ihm den Ausdruck

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

nicht als eine identische Gleichung verstehen, sondern ihn unter

Digitized by Google

der Bedingung auffassen soll, dass die Reihe bis zum $n$ten Gliede vollständig sei und dass dem zu Folge der Fehler über die $n$te Dimension hinausgehe. Daher müsste der Ausdruck eigentlich so vervollständigt werden:

$$f(x) \text{ bis zum Gliede } n\text{ter Dimension} = A_0 + A_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + A_n x^n.$$

Dieses behält seine Geltung, die Reihe mag con- oder divergiren, aber das Gleichheitszeichen lässt sich immer dadurch rechtfertigen, dass der Fehler recht klein werden kann. Zu unseren modernen Theorien fehlt nur noch eine, welche nur recht stark convergirende Reihen als richtig zulässt.

Obige Bemerkung Thibaut's lässt sich nun leicht zur höchsten Allgemeinheit bringen, wenn man die Reihe ohne letztes Glied auffasst. Dadurch enthält sie immer den Rest in sich, wodurch sie sich zur vollständigen Function ergänzt, und das Gleichheitszeichen wird eben so nothwendig, wie bei der Formel $a+b=b+a$.

Die zweite Bemerkung betrifft die unzureichende Unterscheidung zwischen con- und divergirenden Reihen. Alle Reihen, welche nicht einer endlichen Grösse als ihrer Grenze sich nähern, nennt man divergirende, und versagt dadurch einer Menge von Reihen die Theilnahme am Begriff der Convergenz, bei welchen sich die Summe unendlich vieler Glieder eben so rechtfertigen lässt, wie wenn Annäherung an eine endliche Grenze statt hat. Man denke sich die Reihe so gestaltet und ihre Glieder so gruppirt, dass eine Reihe mit lauter positiven Gliedern entsteht. Bezeichnet dann Σ_n die Summe aller Glieder vom 1sten bis zum $n$ten, so hat man

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1} + \ldots + X_{n+m} = \Sigma_n + \Sigma_{n+m} - \Sigma_n,$$

also

$$\Sigma_{n+m} = \Sigma_n \left(1 + \frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}\right).$$

Verschwindet nun der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ für $n = \infty$ auch dann, wenn man $m = \infty$ nimmt, so hat die Reihe bei unendlich vielen Gliedern eine Summe, aber dieselbe muss nicht nothwendig endlich sein. Der Ausdruck $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ verschwindet aber allemal, wenn die Glieder der Reihe bis zum Verschwinden abnehmen.

Bei divergirenden Reihen verschwindet der Quotient $\frac{\Sigma_{n+m} - \Sigma_n}{\Sigma_n}$ unter den angegebenen Bedingungen nicht, und daher kann auch von einer Summe ihrer unendlich vielen Glieder nicht die Rede sein, wovon auch in der That kein guter Schriftsteller geredet hat.

Digitized by Google

XXXVIII.

Ein neues Theorem von den Linien zweiten Grades.

„Die Quadratsumme der reciproken Werthe „zweier auf einander senkrechten Durchmesser „bei einem Kegelschnitt (Ellipse und Hyperbel) „ist constant, nämlich bei der Ellipse der Qua„dratsumme, bei der Hyperbel der Quadratdif„ferenz der reciproken Werthe der Axen gleich.“

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es scheint mir überflüssig zu sein, dieses Theorem auf dem gewöhnlichen Wege zu erweisen, da dies keine Schwierigkeiten hat; ich erlaube mir aber den Weg anzugeben, welcher mich zur Entdeckung des Satzes führte, namentlich auch deshalb, weil so zugleich ein für die Gleichung des zweiten Grades in ihrer allgemeinsten Form geltender Ausdruck für die gedachte Quadratsumme gefunden wird.

Die den Kegelschnitt ausdrückende Gleichung sei

$$1.\quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$

und α der Coordinatenwinkel, auf den sie sich bezieht. Die Transformation der Coordinaten in secundäre, für welche die Axen der x' und y' mit der Axe der x die auf bekannte Weise gezählten Winkel ξ und η einschliessen, und der neue Anfang durch die primitiven Coordinaten p, q dargestellt wird, giebt

$$x = p + \frac{\sin(\alpha - \xi)}{\sin\alpha} x' + \frac{\sin(\alpha - \eta)}{\sin\alpha} y',$$

$$y = q + \frac{\sin\xi}{\sin\alpha} x' + \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} y'.$$

Digitized by Google

Mittelst dieser Werthe wird die Gleichung 1.

$$2.\quad A'y'^2+2B'x'y'+C'x'^2+2D'y'+2E'x'+F'=0,$$

wo

$$3.\quad\begin{cases} A'\sin\alpha^2 = A\sin\eta^2+2B\sin\eta\sin(\alpha-\eta)+C\sin(\alpha-\eta)^2, \\ B'\sin\alpha^2 = A\sin\eta\sin\xi+B[\sin\eta\sin(\alpha-\xi)+\sin\xi\sin(\alpha-\eta)] \\ \qquad\qquad +C\sin(\alpha-\eta)\sin(\alpha-\xi), \\ C'\sin\alpha^2 = A\sin\xi^2+2B\sin\xi\sin(\alpha-\xi)+C\sin(\alpha-\xi)^2, \\ D'\sin\alpha = (Aq+Bp+D)\sin\eta+(Bq+Cp+E)\sin(\alpha-\eta), \\ E'\sin\alpha = (Aq+Bp+D)\sin\xi+(Bq+Cp+E)\sin(\alpha-\xi), \\ F' = Aq^2+2Bpq+Cp^2+2Dq+2Ep+F. \end{cases}$$

Für $B^2-AC\gtrless 0$ kann nun der neue Anfang p, q bekanntlich so bestimmt werden, dass zugleich

$$Aq+Bp+D=0,\quad Bq+Cp+E=0$$

ist, also D', E' verschwinden, und die Gleichung 2. die Form annimmt:

$$4.\quad A'y'^2+2B'x'y'+C'x'^2+F'=0,$$

und dabei wird, wenn man zur Abkürzung $B^2-AC=G$, $BD-AE=H$, $D^2-AF=J$ setzt:

$$5.\quad F'=\frac{H^2-GJ}{AG}=\frac{\Omega}{G},$$

so dass $\Omega=AE^2+CD^2+FB^2-ACF-2BDE$ ist. Die Gleichung 4. bezieht sich, wie aus ihrer Form leicht erhellt, auf ein Coordinatensystem, dessen Axen noch eine beliebige Richtung haben, während der Anfang in den Mittelpunkt der Kurve verlegt ist, so dass also die Axen des Systems zwei beliebige Durchmesser sind.

Nehmen wir nun das secundäre System rechtwinklig, so ist allgemein $\sin\eta=\cos\xi$, $\sin(\alpha-\eta)=-\cos(\alpha-\xi)$, und nach 3.

$$6.\quad\begin{cases} A'\sin\alpha^2 = A\cos\xi^2-2B\cos\xi\cos(\alpha-\xi)+C\cos(\alpha-\xi)^2, \\ B'\sin\alpha^2 = A\sin\xi\cos\xi+B[\cos\xi\sin(\alpha-\xi)-\sin\xi\cos(\alpha-\xi)] \\ \qquad\qquad -C\sin(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi), \\ C'\sin\alpha^2 = A\sin\xi^2+2B\sin\xi\sin(\alpha-\xi)+C\sin(\alpha-\xi)^2. \end{cases}$$

Hieraus findet man sofort

$$7.\quad (A'+C')\sin\alpha^2=A-2B\cos\alpha+C,$$

und die Summe der Coefficienten A', C' ist folglich constant, da sie von dem Winkel ξ nicht mehr abhängt. Setzen wir jetzt in

Digitized by Google

der Gleichung 4. zuerst $y'=0$, dann $x'=0$, und bestimmen resp. x', y', so kommt $C=-\frac{F'}{x'^2}$, $A'=-\frac{F'}{y'^2}$, und x', y' werden die Entfernungen des Mittelpunkts der Kurve von den Durchschnitten der letztern mit den Coordinatenaxen sein, d. h. die halben auf einander senkrechten Durchmesser. Vermöge dieser Werthe von A', C' wird die Gleichung 7.

$$8.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2+\left(\frac{1}{y'}\right)^2=-\frac{A-2B\cos\alpha+C}{F'\sin\alpha^2}.$$

Dies ist der constante Ausdruck für die Quadratsumme der reciproken Werthe zweier halben auf einander senkrechten Durchmesser.

Bestimmt man nun den Winkel ξ so, dass B' verschwindet, oder

$$9.\quad \left.\begin{array}{l} A\sin\xi\cos\xi+B[\cos\xi\sin(\alpha-\xi)-\sin\xi\cos(\alpha-\xi)] \\ -C\sin(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi) \end{array}\right\}=0$$

ist, so wird die Gleichung 4.

$$10.\quad A'y'^2+C'x'^2+F'=0,$$

wo aber unter A', C' diejenigen Werthe zu verstehen sind, welche die durch dieselben Buchstaben in den Gleichungen 6. bezeichneten Grössen durch die Substitution des durch Gleichung 9. bestimmten Werths von ξ annehmen. Diese Gleichung 10. bezieht sich auf ein System, dessen Coordinatenaxen die Axen der Kurve sind, und die Lage der letztern gegen die Axe der x des primitiven Systems wird durch den doppelten Werth des Winkels ξ bestimmt, den er aus der Gleichung

$$11.\quad \operatorname{tang}2\xi=\frac{C\sin2\alpha-2B\sin\alpha}{A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha}=\frac{Z}{N}$$

erhält, die aus 9. sehr leicht folgt.

Aus 6. findet man $(A'-C')\sin\alpha^2=A\cos2\xi-2B\cos(\alpha-2\xi)+C\cos2(\alpha-\xi)=\cos2\xi(N+Z\operatorname{tang}2\xi)=N\sec2\xi$; aber $N\sec2\xi=\pm\sqrt{Z^2+N^2}=\pm\sqrt{L}$, folglich

$$12.\quad \sec2\xi=\pm\frac{\sqrt{L}}{A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha},$$

und

$$13.\quad (A'-C')\sin\alpha^2=\pm\sqrt{L}\ ^*).$$

---

*) Der Ausdruck $L=(A-2B\cos\alpha+C\cos2\alpha)^2+(C\sin2\alpha-2B\sin\alpha)^2$ lässt sich auf die Form bringen $(A-2B\cos\alpha+C)^2+4(B^2-AC)\sin\alpha^2$.

Verbindet man damit die Gleichung 7., so kommt

$$14.\quad \begin{cases} A' = \dfrac{A-2B\cos\alpha+C\pm\sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}, \\ C' = \dfrac{A-2B\cos\alpha+C\mp\sqrt{L}}{2\sin\alpha^2}. \end{cases}$$

a) Ist nun $B^2-AC<0$, wie bei der Ellipse, so ist A' positiv, weil nach der ersten der Gleichungen 6. $AA'\sin\alpha^2 = \{A\cos\xi - B\cos(\alpha-\xi)\}^2 - (B^2-AC)\cos(\alpha-\xi)^2$ *). Ferner ist auch C' positiv, weil das Product $A'C'\sin\alpha^2 = -(B^2-AC)$, also >0 ist. Daher ist nach 10. $F'<0$, und man kann setzen $a^2=\frac{-F'}{C'}$, $b^2=\frac{-F'}{A'}$. Die Gleichung 10. wird dann $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, und a, b sind resp. die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse. Es ist folglich

$$15.\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A-2B\cos\alpha+C-\sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}, \\ \left(\frac{1}{b}\right)^2 = -\dfrac{A-2B\cos\alpha+C+\sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

$$16.\quad \left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2 = -\frac{A-2B\cos\alpha+C}{F'\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

$$17.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2+\left(\frac{1}{y'}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

b) Wenn $B^2-AC>0$, wie bei der Hyperbel, so ist die Gleichung $-\frac{C'}{F'}x'^2-\frac{A'}{F'}y'^2=1$. Vergleicht man dieselbe mit $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, und nimmt das Vorzeichen in dem Ausdrucke für C' so, dass $-\frac{C'}{F'}$ positiv ist, so wird $-\frac{A'}{F'}$ für das entsprechende Vorzeichen negativ, und man kann setzen $\frac{1}{a^2}=-\frac{C'}{F'}$, $\frac{1}{b^2}=\frac{A'}{F'}$, oder

$$18.\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^2 = -\dfrac{A-2B\cos\alpha+C\mp\sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}, \\ \left(\frac{1}{b}\right)^2 = +\dfrac{A-2B\cos\alpha+C\pm\sqrt{L}}{2F'\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also

---

*) Der Coefficient A kann immer positiv genommen werden.

Digitized by Google

$$19.\quad \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = -\frac{A - 2B\cos\alpha + C}{F\sin\alpha^2},$$

und nach 8.

$$20.\quad \left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

Anmerkung 1. Zwei auf einander senkrechte Durchmesser der Hyperbel werden diese Kurve nur dann zu gleicher Zeit schneiden, das obige Theorem also für die Hyperbel auch nur Anwendung finden, wenn der Asymptotenwinkel ein stumpfer ist. Dies voraus gesetzt, seien OT, OT' die Asymptoten, O der Mittelpunkt, und in ihm auf OT, OT' resp. die Perpendikel OM, OM' errichtet, welche die Aeste in M, M' schneiden (Taf. V. Fig. 4.). In den Winkelräumen MOT', $M'OT$ werden dann unendlich viele Paare auf einander senkrechter Durchmesser möglich sein, welche die Kurve zugleich treffen. Wächst der eine halbe Durchmesser ON ins Unendliche, so nähert sich der andere offenbar der Grenze OM', und die Gleichung 20. geht dann über in

$$21.\quad \left(\frac{1}{OM'}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2,$$

d. h. bei einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel stumpf, ist das Quadrat des reciproken Werths desjenigen Perpendikels, welches man im Mittelpunkte auf eine Asymptote bis zum Durchschnitt mit dem einen Ast gezogen hat, dem Quadratunterschiede der reciproken Werthe der halben Axen gleich.

Anmerkung 2. Aus dem obigen Theorem lässt sich noch ein für die Ellipse und Hyperbel zugleich geltender Satz ableiten.

Es seien OD, OD' (Taf. V. Fig. 5.) zwei beliebige auf einander senkrechte Durchmesser, O der Mittelpunkt, DD' die Verbindungslinie der Endpunkte der Durchmesser. Es ist $OD = x'$, $OD' = y'$. Nun hat man $\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = \frac{x'^2+y'^2}{(x'y')^2} = \frac{OD^2+OD'^2}{(OD.OD')^2}$; ist h die Länge des von O auf DD' gefällten Perpendikels, so ist $OD.OD' = DD'.h$, $(OD.OD')^2 = (OD^2+OD'^2)h^2$, folglich $\frac{x'^2+y'^2}{(x'y')^2} = \frac{1}{h^2}$, und daraus der Satz:

Die Entfernung des Mittelpunkts einer Ellipse oder Hyperbel von der Sehne, welche die Endpunkte zweier auf einander senkrechten halben Durchmesser verbindet, ist eine constante Grösse.

XXXIX.

Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel.

Von dem

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Einleitung.

1. Die analytische Goniometrie, vornehmlich die höhere in der Differential- und Integralrechnung, pflegt durchgängig da, wo Rechnungsverbindungen zwischen Winkelfunctionen und ihren Winkeln selbst vorkommen, die Zahlwerthe der Winkel durch die Zahlwerthe der die Winkel bestimmenden Kreisbogen zu ersetzen, indem sie diese durch ihren Halbmesser ausmisst, weil so die Rechnungsformeln am einfachsten ausfallen. Eigentlich nimmt sie — was freilich fast nirgends in den Lehrbüchern der Analysis gesagt wird — denjenigen Winkel zur Messeinheit, dessen bestimmender Kreisbogen die Länge seines Halbmessers hat.

2. Solches Hin- und Herspringen vom Winkel zum Bogen und vom Bogen zum Winkel, wo man es doch nur mit Einer dieser zwei wesentlich von einander verschiedenen Art von Grössen zu thun haben will, kann von einer unbefangenen Kritik der wissenschaftlichen Geometrie durch die allerdings hochpreisliche und für die angewandte Geometrie bei der Messung und Zeichnung von Winkeln unschätzbare Proportionalität der Winkel und ihrer Kreisbogen durchaus nicht gerechtfertigt werden; immer wird solches Durcheinandermengen ungleichartiger Grössen nur als Krücke angesehen werden müssen, deren sich die Wissenschaft gewiss entledigen wird, sobald sie auf sicherem Fusse einherzugehen sich im Stande fühlen wird.

ed by Google

3. Am meisten lag mir in der, von mir aufgestellten Fundamentallehre der Geometrie daran, die Elemente *) aller Raumgebilde, nemlich die Strecken und Winkel sowohl einzeln als mit einander verbunden, und auf einander einwirkend, vollständig und dermässen durch sie allein zu erforschen, dass an solche niedere Goniometrie die höhere unmittelbar, ohne Dazwischentreten der Lehre von der Kreislinie, sich anschliessen könne. Nach vielem Sinnen gelang mir dies im Jänner des Jahres 1841, wo ich entdeckte, dass der oben beschriebene, als natürliche Winkelmesseinheit der analytischen Goniometrie dienende Winkel auch die Grenze ist, welcher diejenigen Winkel zugleich ohne Ende sich nähern, die sich bei der Theilung eines unendlich abnehmenden Winkels einerseits durch seinen Sinus andererseits durch seine Tangente als Quotienten ergeben. Dadurch erst wurde meine geometrische Fundamentallehre in sich selbst vollkommen abgeschlossen. Ich hoffe, die Darstellung dieses neuartigen Gegenstandes werde den Geometern nicht unwillkommen sein.

II.

Proportionalität unendlich abnehmender Winkel zu ihren Sinus und Tangenten; und Grenze der Quotienten eines unendlich abnehmenden Winkels durch dessen Sinus und Tangente.

4. Nähert sich der ablenkende Endschenkel eines Winkels α dem Anfangsschenkel unendlich, d. i. nimmt der Winkel α unendlich ab und nähert sich so seiner Grenze 0 ohne Ende, so nähern sich auch seine goniometrischen Functionen den gleichnamigen des Winkels 0 als ihren Grenzen unendlich; folglich sein Cosinus ohne Ende wachsend der Grenze 1, sein Sinus und seine Tangente aber, unendlich abnehmend, der gemeinschaftlichen Grenze 0.

In Zeichen: für $\lim \alpha = 0$ ist $\lim \cos\alpha = 1$, $\lim \sin\alpha = 0$, $\lim \operatorname{tang}\alpha = 0$.

5. Bei dieser gleichzeitigen unendlichen Abnahme des Winkels α, seines Sinus und seiner Tangente tritt jedoch der höchst merkwürdige Umstand ein, dass dieselbe nahe und desto genauer in gleichem Verhältnisse oder in directer Proportionalität dieser dreierlei Grössen erfolgt, je kleiner sie insgesammt schon geworden sind, nemlich, dass dem Verhältnisse jeder zwei schon hinreichend kleiner Winkel das Verhältniss sowohl ihrer Sinus als ihrer Tangenten sehr nahe, und um so genauer gleich wird, je näher beide Winkel an ihrem gänzlichen Verschwinden stehen.

6. Seien, um dies zu beweisen, α und α' zwei einstimmige (zugleich positive oder zugleich negative) und schon so kleine Winkel, dass in den bekannten Gleichungen

*) Vergleiche meinen obigen Aufsatz Nro. XXXIV.

$$\sin(\alpha+\alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\alpha') = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha'}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'}$$

die Cosinus positiv und die Tangenten bereits kleiner als 1 ausfallen, wozu die Winkel einzeln kleiner als ein halber rechter sein müssen.

Um Doppelvergleichungen — das nach Umständen Grösser- oder Kleinersein — zu vermeiden, und weil hier mit den Winkeln ihre Sinus und Tangenten einstimmig sind, mögen die Winkel so wie ihre Functionen nur absolut — weder positiv noch negativ — betrachtet werden.

Nehmen nun die Winkel α, α' nach und nach ohne Ende ab, was durch

$$\lim.\ (\alpha, \alpha') \geqq 0$$

angedeutet werden soll; so nehmen auch ihre Sinus und Tangenten eben so ab, ihre Cosinus dagegen wachsen allmälig bis auf 1, so dass man hat:

$$\lim.\ (\cos\alpha, \cos\alpha') \leqq 1, \quad \lim.\ (\sin\alpha, \sin\alpha') \geqq 0,$$

$$\lim.\ (\operatorname{tang}\alpha, \operatorname{tang}\alpha') \geqq 0.$$

Dann ist, wenn man in der ersten Gleichung $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ durch die gewöhnlich grössere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 1, dagegen im Nenner der zweiten Gleichung die $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha'$ durch die gewöhnlich kleinere und nur ausnahmsweise am Ende eben so grosse Zahl 0 ersetzt,

$$\lim.\ \sin(\alpha+\alpha') \leqq \sin\alpha + \sin\alpha',$$

$$\lim.\ \operatorname{tang}(\alpha+\alpha') \geqq \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha'.$$

Mit den hinreichend abnehmenden Winkeln stehen demnach nicht blos ihre Sinus, sondern auch ihre Tangenten, dermassen in Verbindung, dass zur Summe jeder zweier Winkel desto genauer nicht nur die Summe ihrer Sinus, sondern auch die Summe ihrer Tangenten gehört, je kleiner diese Winkel sind. Folglich sind den hinreichend kleinen Winkeln sowohl ihre Sinus als auch ihre Tangenten direct proportionirt.

7. Nemlich für die kleinsten Winkel ist, wenn wir die angenäherte Gleichheit durch $\doteq$ andeuten,

$$\alpha : \alpha' \doteq \sin\alpha : \sin\alpha' \doteq \operatorname{tang}\alpha : \operatorname{tang}\alpha',$$

oder auch:

ed by Google

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} \doteq \frac{\alpha'}{\sin\alpha'} \text{ und } \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} \doteq \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'},$$

d. h. der Quotient jedes hinreichend kleinen Winkels durch seinen Sinus oder durch seine Tangente ist fast ganz unveränderlich, oder bei unendlich abnehmendem Winkel nähert sich bei der Theilung des Winkels sowohl durch seinen Sinus als auch durch seine Tangente der Quotient, welcher also, weil die Winkelfunctionen Zahlen sind, wieder ein Winkel ist, einer fixen Grenze, die demnach ebenfalls ein Winkel sein muss.

8. Beide diese veränderlichen Quotienten streben aber der nemlichen Grenze zu.

Denn wegen $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ist $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha$, also $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} : \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha$; folglich, weil für $\lim\alpha \geqq 0$, $\lim\cos\alpha \leqq 1$ ist, muss $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} : \lim\frac{\alpha}{\sin\alpha} \leqq 1$, also $\lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} \leqq \lim\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ sein.

9. Bezeichnen wir nun mit Γ den Winkel, der den Quotienten $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$ als gemeinschaftliche Grenze vorgesteckt ist, so haben wir

$$\lim\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \Gamma = \lim\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

III.

Der erste Quotient nähert sich abnehmend, der zweite wachsend ihrer gemeinschaftlichen Grenze.

10. Höchst wichtig ist die Frage, wie diese beiden veränderlichen Quotienten ihrer gemeinsamen Grenze Γ zustreben, ob wachsend oder abnehmend. Darüber geben obige Vergleichungen (in 6.) Aufschluss. Denn ersetzt man in ihnen erst α' durch $\alpha'+\alpha''$, dann α'' durch $\alpha''+\alpha'''$, nachher wieder α''' durch $\alpha'''+\alpha^{IV}$ u. s. f., so findet man

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots.) \leqq \sin\alpha+\sin\alpha'+\sin\alpha''+\sin\alpha'''+\ldots.,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots.) \geqq \operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'+\operatorname{tang}\alpha''+\operatorname{tang}\alpha'''+\ldots.;$$

und wenn man hierin alle Winkel gleich werden lässt:

$$\sin n\alpha \leqq n\sin\alpha,\ \operatorname{tang} n\alpha \geqq n\operatorname{tang}\alpha.$$

Digitized by Google

Theilt man hiedurch den Winkel $n\alpha$, so findet man

$$\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \gtrless \frac{\alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{n\alpha}{\operatorname{tang} n\alpha} \lessgtr \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Sinkt demnach der Winkel auf einen vielten (aliquoten) Theil seiner selbst herab, so muss sein Quotient durch den Sinus abnehmen, jener durch die Tangente wachsen.

Der Quotient eines unendlich abnehmenden Winkels durch seinen Sinus / seine Tangente nähert sich also im Abnehmen / Wachsen der ihnen beiden gemeinschaftlichen Grenze, wenigstens dann, wenn der Winkel jedesmal auf einen vielten Theil seiner selbst, insbesondere also in einer geometrischen Reihe abnimmt.

11. Ganz allgemein führt man aber die Untersuchung, indem man durch obige Vergleichungen (in 6.) die Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ theilt, wodurch man zunächst

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \gtrless \frac{\alpha+\alpha'}{\sin\alpha+\sin\alpha'}, \quad \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \lessgtr \frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\alpha'}$$

erhält. Die zweiten Quotienten sind aber bekanntlich eigenthümliche (zusammengesetzte arithmetische) Mittel, folglich ist

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \gtrless \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$
$$\frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} = \operatorname{Med}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'}\right).$$

Soll aber der erstartige / zweitartige der Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ angehörige Qnotient grösser / kleiner sein als das Mittel der den beiden Theilen α und α' entsprechenden Quotienten, so muss er, da alle diese Quotienten absolute Grössen sind, auch gewiss grösser / kleiner sein als einer (der kleinere / „ grössere) der beiden letzteren Quotienten, folglich entweder zwischen sie beide hineinfallen oder auch noch grösser / kleiner sein als der andere.

Jenes Dazwischenfallen ist jedoch unmöglich. Denn da die Summe $\alpha+\alpha'$ grösser als jeder ihrer Theile α und α' ist, so müsste bei abnehmendem Winkel jeder solche Quotient bald abnehmen, bald wachsen. Allein die Theile dieser Winkelsumme, d. h. die Abnahmen des veränderlichen Winkels, können beliebig klein, mithin auch so klein angenommen werden, dass derlei abwechselndes Zu- und Abnehmen des Quotienten endlich einmal aufhört und daher nur ununterbrochenes Zu- oder Abnehmen eintritt.

Digitized by Google

Mithin muss der $\frac{\text{erstartige}}{\text{zweitartige}}$ der Winkelsumme $\alpha+\alpha'$ entsprechende Quotient $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ sein als jeder einzelne der den beiden Theilen α und α' entsprechenden Quotienten; nemlich weil $\alpha+\alpha' > (\alpha, \alpha')$ ist, muss sein:

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')} \geqq \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}, \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}\right),$$
$$\frac{\alpha+\alpha'}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')} \leqq \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \frac{\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha'}\right).$$

12. Der Quotient eines bereits hinreichend kleinen und noch immer weiter abnehmenden Winkels durch $\frac{\text{seinen Sinus}}{\text{seine Tangente}}$ muss demnach $\frac{\text{abnehmen}}{\text{wachsen}}$, und fortwährend $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ sein als die gemeinschaftliche Grenze beider Quotienten, nemlich für $\lim \alpha \geqq 0$ ist

$$\lim \frac{\alpha}{\sin\alpha} \geqq \Gamma \geqq \lim \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha},$$

und für hinreichend kleine Winkel α ist

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} > \Gamma > \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

13. Die letzte Vergleichung lässt sich sogleich benützen, um zwei ausgezeichnete einschliessende Grenzen für den Grenzwinkel Γ aufzustellen. Setzt man nemlich $\alpha = \frac{1}{4}R$, so ist $\operatorname{tang}\alpha = 1$; und setzt man $\alpha = \frac{1}{3}R$, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; daher findet man

$$\tfrac{1}{4}R < \Gamma < \tfrac{2}{3}R.$$

Der Grenzwinkel Γ ist demnach ein spitziger zwischen der Hälfte und zwei Drittheilen des rechten Winkels oder zwischen 45 und 60 Grad liegender Winkel.

Benennung des Grenzwinkels.

14. Dieser Winkel muss wegen seiner engsten Verknüpfung mit den Winkelfunctionen nothwendig in vielerlei weiteren Forschungen der Goniometrie vorkommen, und weil er als eine fixe Grenze mit einer bestimmten — sogleich genügend scharf zu ermittelnden — Grösse begabt ist, gleich jedem andern bestimmten Winkel zur Messung der Winkel geeignet sein. Desswegen verdient er gewiss durch eine eigenthümliche Benennung ausgezeichnet zu werden. Ich glaube zu einer solchen lieber ein Nennwort als ein Eigenschaftswort in Antrag bringen zu sollen; theils

Digitized by Google

wegen der wünschenswerthen Kürze, theils weil man auch der gewöhnlichen Winkeleinheit, dem neunzigsten Theile des rechten Winkels, den einsilbigen Namen Grad (franz. degré) beigelegt hat. Darum schlage ich vor, ihm den kurzen altdeutschen Namen „der Gehren" zu geben *). Denn dieser Winkel ist, wie wir so eben nachgewiesen haben, ein mittlerer spitziger, und der Gehren heisst (landschaftlich) ein spitziges Werkzeug, besonders ein Pfeil, Spiess, Speer, ferner ein spitz zulaufendes Stück Land, ein keilförmiger Streifen Zeug, Keil in Hemden, Zwickel in Strümpfen (franz. le chanteau, engl. goar); daher auch das Gehrmaass oder -holz, bei Holzarbeitern ein Richtscheit mit einem nach einem Winkel von 45 Graden abgeschrägten Querbrettchen zum Vorzeichnen einer schrägen Richtung, die sie eine Gehre oder Gehrung nennen **).

IV.

Berechnung des Gehrens.

15. Sei wieder α ein genügend kleiner absoluter Winkel. Um die Grössen der Winkel $\frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ schätzen zu können, vergleichen wir sie mit einem bereits festbestimmten Winkel, am angemessensten mit dem, ganz natürlich gleich am Anfange der Lehre von den Winkeln sich aufdringenden, gestreckten Winkel, den man jetzt schon gern mit G zu bezeichnen pflegt. Ihre Verhältnisse zu diesem oder ihre Maasse, Maasszahlen, Zahlwerthe, wenn sie durch ihn ausgemessen werden, mögen durch p und q bezeichnet werden, so dass man hat

$$\frac{\alpha}{\text{tang}\,\alpha} : G = p, \quad \frac{\alpha}{\sin\alpha} : G = q.$$

16. Dann geben die obigen Vergleichungen (in 12.) durch G getheilt

$$p < \frac{\Gamma}{G} < q \quad \text{und}$$

$$\lim p \leqq \frac{\Gamma}{G} \leqq \lim q.$$

Das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G liegt also zwischen zwei zu einerlei Winkel α gehörigen Zahlen p und q; von denen, bei unendlich abnehmendem Winkel α, die erstere wachsend, die andere abnehmend, diesem Verhältnisse als ihrer gemeinsamen Grenze ohne Ende zustrebt.

---

*) Wie ich bereits in einer Note zu meinem Aufsatze im Archiv. Theil 6. Heft. 2. Seite 120. gethan habe.

**) Vergleiche die Wörterbücher von Adelung, Heinsius, Heyse, u. a.

ed by Google

17. Setzen wir nun den Winkel α auf seine Hälfte, $\frac{1}{2}\alpha$, herab, so mögen die aus ihr hervorgehenden Winkel $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha}$ und $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ zum gestreckten Winkel die Verhältnisse p_1 und q_1 haben, so dass man habe

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang}\frac{1}{2}\alpha} : G = p_1, \quad \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} : G = q_1.$$

Sind nun für einen gewissen Winkel α seine Functionen sin und tang bekannt, daher auch beide Zahlen p und q bestimmbar, so lassen sich aus ihnen auch die dem halben Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ zukommenden ähnlichen Zahlen p_1 und q_1 äusserst leicht berechnen. In der That, obige Gleichungen geben auf der Stelle

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha}{pG}, \quad \sin\alpha = \frac{\alpha}{qG};$$

und wenn man diese Gleichung durch jene theilt:

$$\cos\alpha = \frac{p}{q};$$

daher in gleicher Weise

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{p_1 G}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{q_1 G},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{p_1}{q_1}.$$

Ferner können von den zwischen den goniometrischen Functionen des ganzen und halben Winkels bestehenden Beziehungsgleichungen hier am besten folgende zwei benützt werden:

$$\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1, \quad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Denn die Substitution obiger Ausdrücke für die Winkelfunctionen verwandelt diese Gleichungen in

$$\frac{p}{q} = 2\frac{p_1^2}{q_1^2} - 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{p_1}{q_1^2}.$$

Theilt man nun die erste Gleichung nach Uebertragung des Gliedes -1 durch die zweite und durch 2, so findet man sogleich für p_1 den höchst einfachen Ausdruck

$$p_1 = \frac{p+q}{2},$$

und die zweite Gleichung gibt dazu

$$q_1^2 = q p_1 \quad \text{oder} \quad q_1 = \sqrt{q p_1}.$$

Digitized by Google

Es ist also p_1 das arithmetische Mittel (die halbe Summe) von p und q;

und q_1 das geometrische Mittel (die zweite Wurzel aus dem Producte) von q und p_1.

Weil der Winkel α einen rechten nicht übersteigt, so sind seine Functionen allesammt positiv, folglich wegen $\cos\alpha = \frac{p}{q} < 1$ sicher $p < q$. Daher ist auch $p < p_1 < q$ und $p_1 < q_1 < q$, also im Zusammenhange $p < p_1 < q_1 < q$.

18. Will man nun diese Halbirung des Winkels α hinreichend oft wiederholen, und aus den, für einen gewissen Winkel α bekannten Verhältnissen p und q zu den nach und nach sich ergebenden Winkeln

$$\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2^2},\ \frac{\alpha}{2^3},\ \ldots\ldots$$

die ähnlichen Verhältnisse

$$p_1 q_1,\ p_2 q_2,\ p_3 q_3,\ \ldots\ldots$$

also in Gesammtheit die Zahlenreihe

$$p,\ q;\ p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3;\ \ldots\ldots$$

aufstellen, so wird man vom dritten Gliede an jedes nachkommende wie folgt berechnen.

Zu den bekannten zwei Anfangsgliedern p, q rechnet man ihr arithmetisches Mittel p_1 und schreibt es als drittes Glied an. Darauf berechnet man von den jetzigen zwei Schlussgliedern q, p_1 das geometrische Mittel q_1, und setzt es als viertes Glied an. Und in dieser Weise rechnet man fortwährend von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel und schreibt dieses als unmittelbar nachfolgendes Glied an.

Bei einer solchen Reihe fällt jedes spätere Glied zwischen die zwei ihm zunächst vorangehenden, also auch zwischen jedwede zwei unmittelbar auf einander folgende frühere Glieder. Desswegen müssen die Glieder einer derartigen Reihe einer gewissen gemeinschaftlichen Grenze zustreben, der sie desto näher liegen, je spätere sie sind, und welche zwischen jeden zwei benachbarten Gliedern liegt. Darum sind auch die gemeinschaftlichen Anfangsziffern jeder zwei decimal ausgedrückten Nachbarglieder auch die Anfangsziffern der decimal dargestellten Grenze, hier des Verhältnisses des Gehrens zum gestreckten Winkel.

19. Die Rechnung anlangend, so lässt sich noch bemerken, dass man anstatt des geometrischen Mittels zweier nur wenig von einander unterschiedenen Zahlen ihr arithmetisches Mittel nehmen könne, und zwar dann schon gewiss, wenn diese Zahlen, in Decimalen ausgedrückt, wenigstens in halb

Digitized by Google

so vielen Anfangsziffern übereinstimmen, als in wie vielen man das geometrische Mittel berechnen will. Denn sei δ der Unterschied zweier absoluter Zahlen a und b, von denen $a > b$ ist, nemlich

$$\delta = a - b.$$

Nun ist bekanntlich

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

daher

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \text{ und } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

d. h. das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist jedenfalls grösser als ihr geometrisches.

Sei d der Unterschied und m das arithmetische Mittel dieser zwei Mittel, also

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = d,$$

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 2m,$$

so ist $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = 2dm;$$

folglich nach dem Obigen $2dm = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich

$$d = \tfrac{1}{8}\frac{\delta^2}{m},$$

und sofort $$\frac{d}{m} = \tfrac{1}{8}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2.$$

Stimmen nun die Zahlen a und b, also auch ihr Mittel m in n obersten Ziffern überein, so beginnt der in einen Decimalbruch verwandelte Quotient $\frac{\delta}{m}$ an der $n$ten Decimalstelle mit einer von Null verschiedenen (geltenden) Ziffer, folglich seine zweite Potenz an der $2n$ten Decimalstelle, wenigstens mit 1 und höchstens mit 99, und also ihr 8ter Theil oder der Quotient $\frac{d}{m}$ spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle mit einer geltenden Ziffer oder an der $2n$ten Decimalstelle höchstens mit 12. Mithin beginnt der dem Quotienten $\frac{d}{m}$ gleiche Decimalbruch frühestens an der $(2n-1)$ten Decimalstelle und da höchstens mit 1, gewöhnlich aber erst an der $2n$ten und spätestens an der $(2n+1)$ten Decimalstelle. Folglich

stimmen das arithmetische und geometrische Mittel $\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$, und also auch ihr eigenes arithmetisches Mittel wenigstens in $2n-1$, gewöhnlich in $2n$, und höchstens in $2n+1$ obersten oder Anfangsziffern überein.

Begehrt man demnach das geometrische Mittel der Zahlen a und b in p obersten Ziffern genau, so muss sein, $2n+(-1,0,+1) = p$; also ist $n = \frac{p+(1,0,-1)}{2}$, nemlich n wenigstens die kleinere, meistens aber die grössere Hälfte von p, wenn p ungerad, dagegen die genaue Hälfte, wenn p gerad ist. Z. B. für $p=7$ ist $n=4$ oder 3; für $p=8$ ist $n=4$.

Man kann demnach das geometrische Mittel zweier Zahlen durch ihr leichter zu berechnendes arithmetisches dann schon ganz gewiss ersetzen, wenn die zwei Zahlen entweder in der genauen oder grösseren Hälfte der Anzahl Ziffern übereinstimmen, in der man das Mittel zu berechnen beabsichtigt.

20. Ist man sonach in der aufzustellenden Zahlenreihe (Art. 18.) so weit vorgerückt, dass zwei Glieder in der ersten oder grösseren Hälfte der Ziffern, in der man die Glieder insgesammt berechnet, übereinstimmen; so hat man fortan von den jedesmaligen zwei Schlussgliedern nur immer ihr arithmetisches Mittel zu rechnen und als nächst kommendes Glied anzusetzen. Allein die Grenze einer nach diesem Bildungsgesetze der einzelnen Glieder aufzustellenden Reihe lässt sich ganz einfach durch die beiden gegebenen Anfangsglieder der Reihe ausdrücken.

Denn sind a und b diese Anfangsglieder, so findet man für die weiteren Glieder folgende Ausdrücke:

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^2},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^4},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^5}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5},$$

$$\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^6}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5}+\frac{b}{2^6}.$$

u. s. w.

Demnach ist von diesen das $2r$te Glied

$$=\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^4}+\frac{a}{2^6}+\cdots+\frac{a}{2^{2r}}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2^3}+\frac{b}{2^5}\cdots+\frac{b}{2^{2r-1}}+\frac{b}{2^{2r}}$$

ed by Google

und das $(2r+1)$te

$$= \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^6} + \ldots + \frac{a}{2^{2r}} + \frac{a}{2^{2r+1}} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2^3} + \frac{b}{2^5} + \ldots + \frac{b}{2^{2r+1}},$$

also, wenn man diese geometrischen Reihen in umgekehrter Folge summirt,

$$\text{jenes Glied} = \frac{a - \frac{a}{2^{2r}} + 2b - \frac{b}{2^{2r-1}}}{3} + \frac{b}{2^{2r}},$$

$$\text{und dieses} = \frac{a - \frac{a}{2^{2r}} + 2b - \frac{b}{2^{2r+1}}}{3} + \frac{a}{2^{2r+1}}.$$

Mithin ist die gemeinsame Grenze, welcher sämmtliche Glieder zustreben, oder der die Reihe zustrebt,

$$= \frac{a+2b}{3} = b + \frac{a-b}{3} = b - \frac{b-a}{3},$$

nemlich gleich dem zweiten Gliede mehr oder weniger dem Drittel des Unterschiedes beider Anfangsglieder, je nachdem das erste oder zweite Glied das grössere von beiden ist.

21. Sonach braucht man die Glieder der Zahlenreihe (in 18.) dadurch, dass man abwechselnd das arithmetische und geometrische Mittel nimmt, nur so weit zu berechnen, bis einmal die beiden Schlussglieder in der ersten oder grösseren Hälfte der für alle Glieder festgesetzten Ziffermenge übereinstimmen, oder vielmehr, bis ihr geometrisches Mittel mit ihrem arithmetischen übereinstimmt; da man dann aus diesen zwei Schlussgliedern höchst leicht die Grenzzahl, nemlich das Verhältniss des Gehrens zum gestreckten Winkel, berechnen kann. Bedient man sich der Logarithmen, so kann man aus den Logarithmen der einander schon sattsam genäherten Glieder auf gleiche Weise den Logarithmen der fraglichen Grenze berechnen; weil der Logarithme des geometrischen Mittels zweier Zahlen das arithmetische Mittel der Logarithmen dieser Zahlen ist.

22. Zu Winkeln, deren goniometrische Functionen leicht angebbar sind, und mit denen man die hier beschriebene Rechnung anheben kann, eignen sich am besten diejenigen vielten Theile des gestreckten Winkels, deren Nenner die kleinsten Primzahlen, 2 und 3 sind, d. i. die Hälfte und das Drittel des gestreckten Winkels. Denn für

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\, G = R \text{ ist } \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = 1,\ \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{0},$$

$$\text{also } p = 0,\ q = \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}5;$$

und für

Digitized by Google

$\alpha = \frac{1}{3} G = \frac{2}{3} R$ ist $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{3}$;

daher $p = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $q = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

23. Legt man nun *erstens* die Hälfte des gestreckten Winkels zu Grunde, so erhält man folgende Tafel zusammengehöriger Werthe:

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G:\alpha$ d. i. der Winkel α ist der ....te Theil des gestreckten	p	q	$\log p$	$\log q$
0	2	0	0·5	.	9·6989700
1	4	0·25	0·3535534	9·3979400	9·5484550
2	8	0·3017767	0·3266407	9·4796857	9·5140703
3	16	0·3142087	0·3203643	9·4972181	9·5056442
4	32	0·3172865	0·3188217	9·5014516	9·5035479
5	64	0·3180541	0·3184376	9·5025010	9·5030244
6	128	0·3182458	0·3183417	9·5027627	9·5028935

Nun fällt bereits das geometrische Mittel 0·3183417 der beiden nächst früheren Glieder mit ihrem arithmetischen überein *), daher lässt sich das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und sein Logarithme aus den zwei Schlussgliedern wie folgt berechnen.

Vorletztes Glied 0·3182458,		sein Logarithme	9·5027627
Letztes „ 0·3183417	„	„	9·5028935
Unterschied	959	. . . . .	1308
Dessen Drittel	320	. . . . .	436
Dieses ab vom Letzten			

Daher die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183097$ und $\log\frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499$

24. Geht man aber *zweitens* von dem Drittel des gestreckten Winkels aus, so findet man folgende Tafel zusammengehöriger Werthe:

*) Hier ist $\delta = 0{\cdot}0001919$, $m = 0{\cdot}318\ldots$, also $\frac{\delta}{m} = 0{\cdot}00060\ldots$ und $\frac{d}{m} = 0{\cdot}000000045\ldots$.

Digitized by Google

Anzahl der Winkelhalbirungen.	$G:\alpha$ d. h. der Winkel α ist der ....te Theil des gestreckten	p	q	$\log p$	$\log q$
0	3	0·1924501	0·3849002	9·2843181	9·5853481
1	6	0·2886751	0·3333333	9·4604094	9·5228787
2	12	0·3110042	0·3219752	9·4927663	9·5078225
3	24	0·3164897	0·3192207	9·5003596	9·5040910
4	48	0·3178552	0·3185372	9·5022293	9·5031602
5	96	0·3181962	0·3183666	9·5026949	9·5029275
6	192	0·3182814	0·3183240	9·5028112	9·5028693

Nun kommt schon das geometrische Mittel 0·3183240 der beiden Vorläufer mit ihrem arithmetischen überein *). Daher findet man das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ und seinen Logarithmen aus den zwei letzten Gliedern auf folgende Weise.

Letztes	Glied 0·3183240,	sein Logarithme	9·5028693
Vorletztes	„ 0·3182814	„ „	9·5028112
Unterschied	426		581
Dessen Drittel	142		194
Dieses ab von dem Letzten			

bleibt die Grenze $\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183098$ und $\log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499$.

25. Es ist demnach mit einer geringen Unsicherheit der letzten Decimalziffer

$$\text{das Verhältniss} \quad \frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}3183098$$

$$\text{und sein Logarithme} \quad \log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}5028499.$$

Führt man die Rechnung in mehr Decimalen aus, so findet man

$$\frac{\Gamma}{G} = 0{\cdot}31830\ 98861\ 83790$$

$$\log \frac{\Gamma}{G} = 9{\cdot}50285\ 01273\ 05866.$$

*) Hier hat man $\delta = 0{\cdot}0000852$, $m = 0{\cdot}318$, also $\frac{\delta}{m} \leqq 0{\cdot}00027$ und $\frac{d}{m} \leqq 0{\cdot}0000000091$.

Digitized by Google

Daher ist der Gehren

$\Gamma = 0.318309886\ G$ in gestreckten Winkeln ausgedrückt
$= 0.636619772\ R$ „ rechten „ „
$= 57.295779^{0}$ „ Graden „
$= 57^{0}17'44{\cdot}806''$ „ Graden, Min. u. Sec. „
$= 206264{\cdot}806''$ „ Secunden „

V.

Der Gehren als Winkeleinheit. Ludolphische Zahl.

26. Da der Gehren ein bestimmter Winkel ist, so ist er eben so wie jeder andere bestimmte Winkel, wie der gestreckte und der rechte Winkel und der Grad, zur Messung aller übrigen Winkel geeignet, und sogar in den höheren goniometrischen Rechnungen die gewöhnliche Messeinheit der Winkel.

Nimmt man den Gehren Γ zur Winkeleinheit, so wird der Zahlwerth des gestreckten Winkels, also das Verhältniss $\frac{\Gamma}{G}$ des gestreckten Winkels G zum Gehren Γ, das ist das umgekehrte des früheren Verhältnisses $\frac{\Gamma}{G}$, des Gehrens Γ zum gestreckten Winkel G, von ihrem ersten ausführlichen Berechner Ludolph von Köln die Ludolphische Zahl genannt, und stets mit dem Buchstaben π bezeichnet, also $\frac{G}{\Gamma} = \pi$ gesetzt.

Auf diese Weise ist nach unserem obigen Rechnungsergebnisse

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318309886183790$$

$$\log\frac{\Gamma}{G} = \log\frac{1}{\pi} = 9{\cdot}502850127305866,$$

und hieraus folgt durch Umkehrung der Betrag der Ludolphischen Zahl und ihres Logarithmen:

$$\frac{G}{\Gamma} = \pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793$$

$$\log\frac{G}{\Gamma} = \log\pi = 0{\cdot}49714\ 98726\ 94133.$$

Durch den Gehren Γ ausgedrückt oder ausgemessen ist demnach

der gestreckte Winkel $G = \pi\,\Gamma$,

der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}\,\Gamma$,

Digitized by Google

der volle Winkel $2G = 4R = 2\pi\Gamma$,

und der Grad $\frac{G}{180} = \frac{R}{90} = \frac{\pi}{180}\Gamma$.

27. Bisher nahmen wir die Winkel selbst, ungemessen, in Betrachtung und bezeichneten sie durch Buchstaben. Denken wir sie uns nun durch den Gehren ausgemessen und lassen wir die früher gebrauchten Buchstaben α, G, R, Γ gegenwärtig die Zahlwerthe der Winkel vorstellen. Dann ist

der Gehren $\Gamma = 1$,

der gestreckte Winkel $G = \pi$,

der rechte Winkel $R = \frac{\pi}{2}$,

der volle Winkel $4R = 2G = 2\pi$,

der Grad $= \frac{\pi}{180}$.

28. Theilen wir durch die obigen Vergleichungen (in 12.) insgemein den Winkel α, so finden wir für jeden hinreichend kleinen Winkel α

$$\sin\alpha < \frac{\alpha}{\Gamma} < \operatorname{tang}\alpha,$$

und für einen unendlich abnehmenden Winkel α

$$\lim \sin\alpha \leqq \frac{\alpha}{\Gamma} \leqq \lim \operatorname{tang}\alpha.$$

Man ersieht auf den ersten Blick, dass diese Vergleichungen am einfachsten ausfallen, wenn man den Gehren zur Winkeleinheit macht, und diese Buchstaben Γ und α wieder Werthzahlen vorstellen, also $\Gamma = 1$ sein lässt. Denn so erhält man

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tang}\alpha,$$

und für $\lim \alpha \geqq 0$

$$\lim \sin\alpha \leqq \alpha \leqq \lim \operatorname{tang}\alpha.$$

Nimmt man demnach den Gehren zur Winkeleinheit, so ist der Zahlwerth jedes spitzen Winkels grösser als sein Sinus und kleiner als seine Tangente;

und bei unendlichem Abnehmen des Winkels nähern sich sein Sinus wachsend, seine Tangente aber abnehmend dem Zahlwerthe des Winkels;

oder bei den kleinsten Winkeln sind die Sinus und Tangenten den Zahlwerthen der Winkel gleich.

Die letzten Grenzgleichungen sind bekanntlich die Grundlage der goniometrischen Differentiations-Gesetze, also auch der Entwickelung der goniometrischen Functionen in Reihen.

Digitized by Google

29. Andere zuweilen brauchbare Grenzgleichungen ergeben sich, wenn man in den früheren (in 15.) für p und q ihre Ausdrücke und für $\frac{\Gamma}{G}$ auch noch $\frac{1}{\pi}$ einführt. So erhält man

$$\lim \frac{\alpha : G}{\sin \alpha} \leqq \frac{1}{\pi} \geqq \lim \frac{\alpha : G}{\operatorname{tang} \alpha},$$

und wenn man alles umkehrt

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha : G} \geqq \pi \geqq \lim \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\alpha : G},$$

oder

$$\lim \left(G : \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) \geqq \pi \geqq \lim \left(G : \frac{\alpha}{\operatorname{tang} \alpha}\right).$$

VI.

Anwendung des Gehrens in der Kreisrechnung.

30. Aus dieser ganzen Darstellung ersieht man nun, dass und wie die gesammte niedere und höhere Goniometrie ohne jene unwissenschaftliche Einmengung des Kreisbogens abgehandelt werden kann. Zum Schlusse soll hier nur noch gewiesen werden, wie die so eben gegebene Lehre vom Gehren sowohl in der Rectification der Kreisbogen und Kreislinien als auch in der Quadratur der Kreisausschnitte und Kreise sich anwenden lässt.

31. Rectification der Kreisbogen und Quadratur der Kreisausschnitte.

Sei a die Länge eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreisbogens, α der ihm angehörige Winkel am Mittelpunkte und S der Flächeninhalt des ihm entsprechenden Kreisausschnittes.

Man betrachte vom Winkel α einen beliebigen Theil, halbire ihn, bezeichne eine solche Hälfte mit ω und führe die Sehne des dem vollen Theile 2ω angehörigen Kreisbogens, die dann auf der Halbirungslinie dieses Winkeltheils senkrecht steht und durch sie halbirt wird. Dann kann diese Halbirungslinie an einer jeden solchen Winkelhälfte ω als Anfangsschenkel und Hauptprojectionsaxe angesehen werden. Mithin ist des als Endschenkel von ω vorfindigen Halbmessers r Hauptprojection der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte also $r \cos \omega$, und seine Nebenprojection die halbe Sehne daher $= r \sin \omega$; folglich der Flächeninhalt des von diesen drei Strecken gebildeten rechtwinkligen Dreieckes

$$= \tfrac{1}{2} . r \cos \omega . r \sin \omega = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \omega \cos \omega = \tfrac{1}{4} r^2 \sin 2\omega.$$

Mithin ist die ganze Sehne $= 2r \sin \omega$ und der Flächeninhalt des von ihr und von den, ihren Grenzpunkten angehörigen Halbmessern begrenzten gleichschenkligen Dreieckes $= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\omega$.

Digitized by Google

Theilt man nun den ganzen Winkel in beliebige Theile, deren Hälften der Reihe nach ω, ω', ω'', ω'''... sind, und zieht die den ganzen Theilen 2ω, $2\omega'$, $2\omega''$, $2\omega'''$... zukommenden Sehnen, so ist die aus ihnen zusammengesetzte, und dem Kreisbogen a eingeschriebene gebrochene Linie

$$= 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \sin\omega''' + \ldots),$$

und der Flächeninhalt des von ihr und von den, dem Winkel α als Schenkel dienenden Halbmessern begrenzten, dem Kreisausschnitte S eingeschriebenen Vieleckes

$$= \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \sin 2\omega''' + \ldots).$$

Lässt man nun sämmtliche Winkeltheile ω, ω', ω''... unendlich abnehmen, so ist der Kreisbogen die Grenze der ihm eingeschriebenen gebrochenen Linie, und der Kreisausschnitt die Grenze des ihm eingeschriebenen Vieleckes, nemlich für

$$\lim(\omega, \omega', \omega'' \ldots) = 0$$

ist

$$a = \lim 2r(\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots),$$
$$S = \lim \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots).$$

Zur Reduction dieser Ausdrücke multipliciren wir dieselben, weil

$$\alpha = 2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots$$

ist, mit α, und theilen sie durch $2\omega + 2\omega' + 2\omega'' \ldots$. Da erhalten wir

$$a = r\alpha : \lim \frac{\omega + \omega' + \omega'' + \ldots}{\sin\omega + \sin\omega' + \sin\omega'' + \ldots},$$
$$S = \tfrac{1}{2}r^2\alpha : \lim \frac{2\omega + 2\omega' + 2\omega'' + \ldots}{\sin 2\omega + \sin 2\omega' + \sin 2\omega'' + \ldots};$$

oder, weil die vorkommenden Quotienten eigenthümliche Mittel sind:

$$a = r\alpha : \mathrm{Med}\left(\lim\frac{\omega}{\sin\omega}, \lim\frac{\omega'}{\sin\omega'}, \lim\frac{\omega''}{\sin\omega''}, \ldots\right),$$
$$S = \tfrac{1}{2}r^2\alpha : \mathrm{Med}\left(\lim\frac{2\omega}{\sin 2\omega}, \lim\frac{2\omega'}{\sin 2\omega'}, \lim\frac{2\omega''}{\sin 2\omega''}, \ldots\right).$$

Alle diese Quotienten haben aber nach dem oben Erwiesenen eine gemeinschaftliche Grenze, nemlich den Gehren Γ; daher ist diesem auch ihr Mittel gleich, und sofort erhält man die Länge des Kreisbogens

$$a = r\frac{\alpha}{\Gamma},$$

Digitized by Google

und den Flächeninhalt des Kreisausschnittes

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\alpha}{\Gamma}.$$

Man berechnet demnach die Länge eines Kreisbogens, wenn man mit dem Zahlwerthe seines durch den Gehren gemessenen Winkels am Mittelpunkte den Halbmesser multiplicirt

32. Noch ist hier folgende Wahrnehmung von Wichtigkeit. Für $\alpha = \Gamma$ wird $a = r$.

Mithin ist der von uns „Gehren" genannte Grenzwinkel auch derjenige Winkel, dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist *).

33. Rectification der Kreislinie und Quadratur des Kreises.

Lassen wir in den letzten Ausdrücken von a und S den Winkel α am Mittelpunkte in einen vollen $= 2\pi\Gamma$ übergehen, und bezeichnen wir die Länge der Kreislinie mit C und den Flächeninhalt des Kreises mit K; so wird

$$C = 2\pi r, \quad K = \pi r^2.$$

Lassen wir noch d den Durchmesser des Kreises bedeuten, dann ist $r = \frac{d}{2}$, daher

$$C = \pi d, \quad K = \frac{\pi}{4} d^2.$$

34. Die erstere Gleichung gibt auch $\frac{C}{d} = \pi$.

Mithin ist die Ludolphische Zahl π auch das Verhältniss jeder Kreislinie zu ihrem Durchmesser, oder das sogenannte Kreisverhältniss; in welcher Bedeutung sie eigentlich gewöhnlich in der Geometrie vorkommt.

---

*) Vergl. nochmals die bereits oben citirte Note zu meinem Aufsatze im Archiv. Thl. VI. Heft 2. S. 120.

Digitized by Google

XL.

Note sur la convergence des séries.

Par

Monsieur C. J. Malmsten,

Professeur des Math. à l'Université d'Upsal.

---

§. 1.

Pour décider la convergence d'une série

$$f(0), f(1), f(2) \ldots . f(n) \ldots . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Mr. Cauchy a proposé le théorème suivant (Exerc. de Math. Tom. II. pag. 230.):

„La série (1), dont tous les termes sont positifs, est conver-„gente, lorsque des valeurs infinies de n réduisent toujours à „zéro non seulement le produit

$$n f(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

„mais encore le produit

$$n^{1+\delta} . f(n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

„δ désignant un nombre déterminé, mais qui peut être aussi „petit que l'on voudra. La même série est divergente, quand „le produit (2) diffère sensiblement de zéro, et devient supérieur „à une certaine quantité A, toutes les fois qu'on attribue au „nombre n des valeurs considérables et supérieures à une limite „donnée."

Nous donnerons dans la note présente une extension très importante de ce théorème.

§. 2.

Pour cela nous démontrerons en premier lieu les trois théorèmes suivants.

Théorème I. En désignant comme à l'ordinaire par lx le logarithme Népérien de x, et en posant

$$l^2x = llx,\ l^3x = ll^2x,\ \ldots\ l^{(p)}x = ll^{(p-1)}x \ldots$$

on aura toujours

$$l^{(p+1)}(n+1) - l^{(p+1)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n \ldots l^{(p-1)}n.l^{(p)}n}. \quad \ldots (4)$$

pourvuque n soit suffisamment grand pour que $l^{(p)}n$ soit une quantité positive.

Démonstration. Pour toutes les valeurs positives de x on a

$$l(1+x) < x, \quad \ldots\ldots (5)$$

d'où

$$l(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n},$$

c'est à dire

$$l(n+1) - ln < \frac{1}{n}. \quad \ldots\ldots (6)$$

Cette formule donne immédiatement

$$l(n+1) < ln\,(1 + \frac{1}{n.ln}),$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$l^2(n+1) - l^2n < l\,(1 + \frac{1}{n.ln}),$$

et à l'aide de (5)

$$l^2(n+1) - l^2n < \frac{1}{n.ln}. \quad \ldots\ldots (7)$$

De cette formule on aura

$$l^2(n+1) < l^2n \left\{1 + \frac{1}{n.ln.l^2n}\right\}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$l^3(n+1) - l^3n < l\,(1 + \frac{1}{n.ln.l^2n}),$$

d'où encore, à l'aide de (5),

$$l^3(n+1) - l^3n < \frac{1}{n.ln.l^2n}. \quad \ldots\ldots (8)$$

by Google

La formule (4) étant ainsi démontrée pour $p=1$ et $p=2$, il suffit actuellement de faire voir qu'elle a encore lieu pour $p+1$, si elle est vraie pour p. Supposons donc qu'elle est vraie pour p : on aura

$$l^{(p+1)}(n+1) < l^{(p+1)}n \cdot \left\{1 + \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p)}n.l^{(p+1)}n}\right\}$$

et, en prenant les logarithmes,

$$l^{(p+2)}(n+1) - l^{(p+2)}n < l\left(1 + \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p+1)}n}\right),$$

d'où enfin à l'aide de (2)

$$l^{(p+2)}(n+1) - l^{(p+2)}n < \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p)}n.l^{(p+1)}n},$$

c'est à dire le même résultat que celui de (4), en y mettant $p+1$ au lieu de p. C. Q. F. D.

Théorème II. Les mêmes choses étant supposées que dans le théorème I., on a toujours

$$l^{(p+1)}n - l^{(p+1)}(n-1) > \frac{1}{n.ln.l^2n...l^{(p)}n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Démonstration. Étant x positif et inférieur à 1 on a

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.},$$

d'où l'on voit que $-l(1-x)$ est une quantité positive et supérieure à x, c'est à dire que

$$-l(1-x) > x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

À l'aide de cette formule, étant

$$ln - l(n-1) = -l\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

on aura

$$ln - l(n-1) > \frac{1}{n},$$

ou ce qui est la même chose

$$ln\left\{1 - \frac{1}{n.ln}\right\} > l(n-1),$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$l^2 n - l^2(n-1) > -l\left(1 - \frac{1}{nln}\right),$$

et de plus, en vertu de (10),

$$l^2 n - l^2(n-1) > \frac{1}{nln}.$$

Ainsi la formule (9) étant démontrée pour $p=1$, il suffit actuellement de faire voir, qu'étant vraie pour p, elle subsiste encore pour $p+1$. Supposons donc qu'elle soit vraie pour p; on aura

$$l^{(p+1)} n \left\{1 - \frac{1}{n.ln \ldots l^{(p)} n.l^{(p+1)} n}\right\} > l^{(p+1)}(n-1) \ldots . (10^*),$$

d'où, en prenant les logarithmes, on aura

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > -l\left(1 - \frac{1}{n.ln \ldots l^{(p)} n.l^{(p+1)} n}\right),$$

et enfin à l'aide de (10)

$$l^{(p+2)} n - l^{(p+2)}(n-1) > \frac{1}{n.ln.l^2 n \ldots l^{(p+1)} n},$$

c'est à dire le même résultat que celui de (10*), en y mettant $p+1$ au lieu de p. C. Q. F. D.

Théorème III. Les mêmes choses étant supposées que dans les théorèmes précédents, on a toujours

$$\frac{1}{n.ln \ldots l^{(p-1)} n.(l^{(p)} n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha} - (l^{(p)} n)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \quad \ldots (11)$$

toutes les fois que $\alpha > 1$.

Démonstration. En vertu de la formule connue

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on voit facilement que pour toutes les valeurs positives de x on a

$$e^x > 1 + x. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Mais la formule (9) donne

$$l^{(p+1)} n - \frac{1}{n.ln.l^2 n \ldots l^{(p)} a} > l^{(p+1)}(n-1),$$

d'où il suit

$$e^{l^{(p+1)} n} \cdot e^{-\frac{1}{n.ln \ldots l^{(p)} n}} > e^{l^{(p+1)}(n-1)},$$

Digitized by Google

c'est à dire

$$l^{(p)}n \cdot e^{-\frac{1}{n.ln...l^{(p)}n}} > l^{(p)}(n-1).$$

Cette formule élévée à $1-\alpha$ donnera, toutefois que $\alpha > 1$,

$$[l^{(p)}n]^{1-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

d'où „a fortiori“ (à cause de (12)) il provient

$$(l^{(p)}n)^{1-\alpha} \cdot \left\{1 + \frac{\alpha-1}{n.ln...l^{(p)}n}\right\} < [l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n.ln...l^{(p-1)}n.(l^{(p)}n)^{\alpha}} < \frac{[l^{(p)}(n-1)]^{1-\alpha} - [l^{(p)}n]^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

$(\alpha > 1)$. C. Q. F. D.

§. 3.

A l'aide des formules (4) et (11) nous pouvons démontrer très facilement, qu'en posant

$$u_k^{(\alpha)} = \frac{1}{(m+k).l(m+k).l^2(m+k)...l^{(p-1)}(m+k).(l^{(p)}(m+k))^{\alpha}}$$

(m étant suffisamment grand pour que $l^{(p)}m$ soit positif), la série

$$u_0^{(\alpha)}, \quad u_1^{(\alpha)}, \quad u_2^{(\alpha)}, \quad u_3^{(\alpha)}, \ldots \ldots \quad (13)$$

est *divergente* pour $\alpha \leqq 1$, et *convergente* pour $\alpha > 1$.

A) La série (13) est divergente pour $\alpha \leqq 1$. Désignons par $S_k^{(\alpha)}$ la somme de k premiers termes de la série (13), c'est à dire

$$S_k^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)} + u_1^{(\alpha)} + u_2^{(\alpha)} + \ldots + u_{k-1}^{(\alpha)},$$

et faisons dans (4) n successive égal à

$$m, \; m+1, \; m+2, \; \ldots . m+k-1;$$

en ajoutant les resultats nous aurons

$$S_k^{(1)} > l^{(p+1)}(m+k-1) - l^{(p+1)}m,$$

c . fait voir que pour des valeurs toujours croissantes de k la somme $S_k^{(1)}$ croit elle-même au delà de toute limite, d'où il suit nécessairement que la série (13) est divergente pour $\alpha=1$; elle l'est donc encore plus pour $\alpha<1$.

B) La série (13) est convergente pour $\alpha>1$. Faisons dans (11) n successive égal à

$$m+k,\ m+k+1,\ m+k+2,\ \ldots . m+k+r-1;$$

en ajoutant les résultats nous obtiendrons

$$S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)} < \frac{[l^{(p)}(m+k-1)]^{1-\alpha} - [l^{(p)}(m+k+r-1)]^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

d'où en passant à la limite pour k (α étant >1), on aura

$$\lim (S_{k+r}^{(\alpha)} - S_k^{(\alpha)}) = 0, \quad [k=\infty]$$

pour une valeur quelconque de r. Cette formule ayant lieu, la série (13) ne pourra qu'être convergente pour $\alpha>1$.

§. 4.

En vertu de ce que nous venons de prouver, nous pouvons démontrer les propositions suivantes.

Théorème IV. Soit proposée la série infinie

$$u_0, u_1, u_2 \ldots . u_n \ldots . ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

s'il existe un nombre entier p tel que non seulement la limite du produit

$$n . ln . l^2 n \ldots . l^{(p-1)} n . l^{(p)} n . u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

mais encore celle du produit

$$n . ln . l^2 n \ldots . l^{(p-1)} n . (l^{(p)} n)^{1+\delta} . u_n \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

s'évanouit pour $n=\infty$, δ désignant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, mais déterminée, la série (14) sera convergente; si au contraire la limite du produit (15) diffère sensiblement de zéro, la même serie sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe).

Démonstration. A) Supposons que l'expression (16) s'évanouisse toujours pour $n=\infty$, et désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série (14). Soit N le plus grand des produits

$$\varphi(n) . u_n,\ \varphi(n+1) . u_{n+1},\ \varphi(n+2) . u_{n+2},\ \ldots . \varphi(n+m-1) . u_{n+m-1},$$

ed by Google

où nous avons posé pour abréger les expressions

$$\varphi(n) = n \,.\, ln \,.\, l^2 n \ldots . \, l^{(p-1)} n \,.\, (l^{(p)} n)^{1+\delta};$$

N deviendra nul pour $n = \infty$. D'ailleurs on voit aisément que la différence

$$S_{n+m} - S_n$$

sera inférieure au produit

$$N \,.\, \left\{ \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \frac{1}{\varphi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n+m-1)} \right\},$$

qui s'évanouit pour $n = \infty$, quelque grand que soit m (en vertu de ce que nous avons démontré dans le paragraphe précédent). La série (14) sera donc elle-même convergente.

B) Supposons en second lieu que pour $n = \infty$ l'expression (15) diffère sensiblement de zéro et qu'elle devienne constamment supérieur à une quantité positive A. Alors, tous le termes de la série (14) étant supposés du même signe, la différence $S_{n+m} - S_n$ surpassera le produit

$$A \,.\, \left\{ \frac{1}{\psi(n)} + \frac{1}{\psi(n+1)} + \frac{1}{\psi(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\psi(n+m-1)} \right\} \ldots (17)$$

où nous avons posé, pour abréger, les expressions

$$\psi(n) = n \,.\, ln \,.\, l^2 n \ldots . \, l^{(p-1)} n \,.\, l^{(p)} n. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Donc comme le produit (17) croîtra indefiniment avec m, attendu que la série (13) pour $\alpha = 1$ est divergente, il est clair que la série (14) dans ce cas sera pareillement divergente.

C. Q. F. D.

Théorème V. Étant proposée une série infinie

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots . \, u_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

soit pour $n = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{l \,.\, \dfrac{1}{u_n \,.\, n \,.\, ln \ldots . \, l^{(p-1)} n}}{l^{(p+1)} n} \right\} = \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

où p est un entier; la série (19) sera convergente, s'il existe un tel p que $\alpha - 1$ est une quantité positive, qui diffère sensiblement de zéro; au contraire la même série sera divergente (supposé que tous ses termes soient du même signe) s'il existe un tel p, que $\alpha - 1$ devient une quantité négative sensiblement différente de zéro.

Démonstration. *A*) Supposons $\alpha - 1 = \varepsilon$, ε étant positif et différent de zéro; donc la formule (20) donne pour des valeurs infiniment grandes de n

$$l \cdot \frac{1}{u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (1+\varepsilon)\, l^{(p+1)} n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (l^{(p)} n)^{1+\varepsilon},$$

ou ce qui est la même chose

$$u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n \cdot (l^{(p)} n)^{1+\varepsilon} = 1.$$

Mais ε étant positif et sensiblement différent de zéro, on peut poser

$$\varepsilon = \delta + \delta',$$

où δ et δ' sont tous les deux positifs et sensiblement différents de zéro. On aura donc enfin

$$u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n \cdot (l^{(p)} n)^{1+\delta} = \frac{1}{(l^{(p)} n)^{\delta'}},$$

c'est à dire la limite du produit (16) s'évanouit pour $n = \infty$; d'où il suit (Théor. IV.) que la série (19) est convergente dans le cas où $\alpha - 1$ est positif et différent de zéro.

B) Supposons en second lieu que $\alpha - 1 = -\varepsilon$, ε étant positif et sensiblement différent de zéro. La formule (20) donne pour $n = \infty$

$$l \cdot \frac{1}{u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (1-\varepsilon)\, l^{(p+1)} n,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n} = (l^{(p)} n)^{1-\varepsilon},$$

ou enfin

$$u_n \cdot n \cdot ln \ldots . l^{(p-1)} n \cdot l^{(p)} n = (l^{(p)} n)^{\varepsilon}.$$

Ainsi la limite du produit (15) étant différente de zéro, il suit du théorème IV., que la série (19) est divergente (supposé que tous les termes soient du même signe), si $\alpha - 1$ est négatif et sensiblement différent de zéro. C. Q. F. D.

Digitized by Google

§. 5.

Le théorème, que nous venons de démontrer, ne fait en effet que relever les règles pour discerner la convergence des séries infinies, qui se trouvent exposées en détail dans un Mémoire excellent de M. Bertrand (dans le Journ. de Math. par M. Liouville. Tom. 7. pag. 35.). Ces règles constituent, comme on sait, un criterium très général pour le cas exceptionel

$$\lim . \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

à l'aide duquel on pourra le plus souvent décider, s'il y a convergence ou divergence. Mais étant fondées essentiellement sur les formules (4) et (11), dont la déduction a exigé jusqu'à présent le secours du calcul intégral, elles n'ont pu être proposées conjointement avec les autres propositions élémentaires sur les suites infinies.

Ce qu'il y a de plus important dans la note présente c'est que nous avons demontré les dites formules (4) et (11) sans secours du calcul intégral et par cela donné aux règles de M. Bertrand leur place méritée dans la théorie élémentaire des suites.

XLI.

Ueber die höheren Differenzialquotienten beliebiger Funktionen des Logarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Kennt man die successiven Differenzialquotienten $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc. einer beliebigen Funktion $f(z)$, so kann man hieraus den höheren Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n}$$

auf folgende sehr einfache Weise ableiten.

Für $lx = z$, also $\partial z = \frac{\partial x}{x}$, ist

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)\frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{\partial f(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f'(lx).$$

Differenziirt man wieder diese Gleichung nach der Regel für die Differenziation der Produkte und bemerkt, dass analog dem Vorigen $\frac{\partial f'(lx)}{\partial x} = \frac{1}{x} f''(lx)$ ist, so erhält man leicht

$$\frac{\partial^2 f(lx)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\{f'(lx) - f''(lx)\}.$$

Erneuerte Differenziationen führen weiter zu den Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 f(lx)}{\partial x^3} = +\frac{1}{x^3}\{2f'(lx) - 3f''(lx) + f'''(lx)\},$$

$$\frac{\partial^4 f(lx)}{\partial x^4} = -\frac{1}{x^4}\{6f'(lx) - 11f''(lx) + 6f'''(lx) - f^{IV}(lx)\},$$

u. s. w.

Man schliesst hieraus, dass der $n$te Differenzialquotient von $f(lx)$ unter folgender Form stehen werde:

$$1. \quad \frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{A_1 f'(lx) - A_2 f''(lx) + A_3 f'''(lx) - \ldots \pm A_n f^{(n)}(lx)\},$$

worin $A_1, A_2, \ldots A_n$ gewisse numerische Coeffizienten bedeuten. Es ist in der That sehr leicht, sich mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ von der formellen Richtigkeit der induktorisch abgeleiteten Gleichung (1) zu überzeugen.

Um nun die Werthe der genannten Coeffizienten zu bestimmen, braucht man blos zu bemerken, dass dieselben nur durch ihre Stellung bedingt sind, keineswegs aber von der Natur der Funktion $f(z)$ oder $f(lx)$ abhängen, dass folglich diese n unbekannten Grössen ganz im Allgemeinen bestimmt sind, wenn man sie für irgend eine spezielle Form von $f(z)$ ermittelt hat. Um aber das Letztere bewerkstelligen zu können, wird es nöthig, für $f(z)$ eine solche Wahl zu treffen, dass man die auf beiden Seiten der Gleichung (1) angedeuteten Differenziationen ganz unmittelbar ausführen kann. Diess ist nun in der That der Fall, wenn man

$$f(z) = e^{-\mu z}$$

Digitized by Google

setzt, wobei μ eine beliebige Constante bedeutet. Es wird dann für ein ganzes positives k

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \mu^k e^{-\mu z},$$

also

$$f^{(k)}(lx) = (-1)^k \mu^k x^{-\mu}.$$

Ferner hat man unmittelbar

$$f(lx) = x^{-\mu},$$

also

$$\frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} = (-1)^n \mu(\mu+1)(\mu+2)..(\mu+n-1) x^{-\mu-n}.$$

Substituiren wir diesen Werth nebst Dem, was sich aus der vorigen Gleichung für $k = 1, 2, .. n$ ergiebt, in die Gleichung (1), so folgt

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1) x^{-\mu-n}$$
$$= \frac{1}{x^n}\{A_1 \mu x^{-\mu} + A_2 \mu^2 x^{-\mu} + A_3 \mu^3 x^{-\mu} + \ldots + A_n \mu^n x^{-\mu}\}$$

oder, wenn man beiderseits mit $x^{-\mu-n}$ hebt,

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$$
$$= A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + \ldots + A_n \mu^n.$$

Diese Relation unter den Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ sagt uns, dass dieselben mit den sogenannten Fakultätenkoeffizienten identisch sind, welche die Coeffizienten der successiven Potenzen von μ bilden, wenn man die Fakultät $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)$ in eine nach steigenden Potenzen von μ fortschreitende Reihe verwandelt, was durch gewöhnliche Multiplikation geschehen kann. Bezeichnen wir die Fakultätenkoeffizienten einer Fakultät vom Grade n mit

$$\overset{n}{C}_1, \overset{n}{C}_2, \overset{n}{C}_3, \ldots \overset{n}{C}_n;$$

so ist für jedes ganze positive k

$$A_k = \overset{n}{C}_k,$$

folglich nach Nro. (1)

$$2. \quad \frac{\partial^n f(lx)}{\partial x^n} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{\overset{n}{C}_1 f'(lx) - \overset{n}{C}_2 f''(lx) + \overset{n}{C}_3 f'''(lx) - \ldots \pm \overset{n}{C}_n f^{(n)}(lx)\},$$

Digitized by Google

und hiermit hat unsere Aufgabe ihre vollständige Lösung gefunden, da sich die Fakultätenkoeffizienten vermöge ihrer combinatorischen Bedeutung independent berechnen lassen.

Beispielsweis sei $f(z)=z^m$, wobei m eine ganz beliebige Grösse ist; es wird dann für ein positives ganzes k

$$f^{(k)}(z) = m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{k-1})\, z^{m-k},$$

oder wenn wir mit m_k den $k$ten Binomialkoeffizienten des Exponenten m und $1.2\dots k$ mit k' bezeichnen,

$$f^{(k)}(z) = k' m_k z^{m-k},$$

folglich

$$f^{(k)}(lx) = k' m_k (lx)^{m-k}.$$

Da ferner $f(lx)=(lx)^m$ ist, so ergiebt sich jetzt

$$3.\quad \frac{\partial^n (lx)^m}{\partial x^n} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \dots \dots + (-1)^{n-1} n' m_n \overset{n}{C}_n (lx)^{m-n}\}.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich auch der Ausdruck $[l(1+x)]^m$ für ganze positive m nach dem Taylorschen Theoreme

$$F(h+x) = F(h) + \frac{F'(h)}{1} x + \frac{F''(h)}{1.2} x^2 + \dots \text{ etc.}$$

in eine Reihe verwandeln, wenn man

$$F(x) = (lx)^m$$

und $h=1$ setzt. Es ist dann nach dem Vorigen

$$4.\quad F^{(n)}(x) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \dots \dots + (-1)^{n-1} n' m_n \overset{n}{C}_n (lx)^{m-n}\}.$$

Hier sind nun drei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $n<m$, $n=m$ oder $n>m$ ist. Im ersten bleiben die Exponenten $m-1$, $m-2$, $\dots m-n$ sämmtlich positiv und grösser als Null, und daher wird für $x=h=1$

$$5.\qquad F^{(n)}(1) = 0,\quad n<m.$$

Digitized by Google

Im zweiten Falle ist $m-n=0$, folglich das letzte Glied in der Parenthese

$$= (-1)^{m-1} m' m_m \overset{m}{C}_m,$$

während in allen übrigen Gliedern positive von Null verschiedene Exponenten des lx vorkommen. Es wird daher

$$6. \qquad F^{(n)}(1) = m' m_m \overset{m}{C}_m, \quad n = m.$$

Für $n > m$ endlich fallen alle diejenigen Glieder weg, in welchen lx negative Exponenten erhalten würde, weil bekanntlich

$$m_{m+1} = m_{m+2} = m_{m+3} = \ldots = 0$$

ist. Es reduzirt sich daher die Formel (4) auf

$$F^{(n)}(x) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\{1' m_1 \overset{n}{C}_1 (lx)^{m-1} - 2' m_2 \overset{n}{C}_2 (lx)^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} m' m_m \overset{n}{C}_m\},$$

woraus für $x = h = 1$ folgt

$$7. \qquad F^{(n)}(1) = (-1)^{m+n} m' m_m \overset{m}{C}_m, \quad n > m.$$

Nehmen wir jetzt

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots (m-1),\ m,\ (m+1),\ (m+2),\ \text{etc.}$$

so giebt das Taylor'sche Theorem unter Benutzung der unter (5), (6) und (7) gefundenen Werthe

$$[l(1+x)]^m =$$

$$\frac{m' m_m}{1.2..m} \overset{m}{C}_m x^m - \frac{m' m_m}{1.2..(m+1)} \overset{m+1}{C}_m x^{m+1}$$

$$+ \frac{m' m_m}{1.2..(m+2)} \overset{m+2}{C}_m x^{m+2} - \ldots\ldots,$$

oder, weil $m_m = 1$, $m' = 1.2..m$ ist,

$$8. \quad [l(1+x)]^m =$$

$$\overset{m}{C}_m x^m - \overset{m+1}{C}_m \frac{x^{m+1}}{m+1} + \overset{m+2}{C}_m \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \ldots\ldots$$

Die noch nöthige Untersuchung über die Gränzen der Gültigkeit dieses Resultats (Convergenzbetrachtung) reduzirt sich auf die einfache Bemerkung, dass die vorstehende Gleichung die $m$te Potenz der folgenden

Digitized by Google

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

sein muss, also nur so lange bestehen kann, aber auch bestehen muss, als die letztere gilt. Hieraus folgt sogleich, dass die Gültigkeit der Gleichung (8) an die Gränzen $x = +1$, $x = -1$ gebunden ist.

Für $m = 2$ hat man z. B.

$$\overset{2}{C}_2 = 1, \quad \overset{3}{C}_2 = 2+1 = 1.2.(1+\frac{1}{2}),$$

$$\overset{4}{C}_2 = 3.2+3.1+2.1 = 1.2.3.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}), \text{ u. s. w.}$$

woraus man leicht das schon bekannte Resultat findet:

$$[l(1+x)]^2 =$$

$$x^2 - \frac{2}{3}(1+\frac{1}{2})x^3 + \frac{2}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4 - \frac{2}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})x^5 + \dots$$

$$1 \geqq x \geqq -1.$$

Nimmt man in der Gleichung (8)

$$x = -\frac{z}{1+z},$$

wo nun x durch jedes beliebige positive z zum ächten Bruche wird, so ergiebt sich

$$[l(1+z)]^m =$$

$$\overset{m}{C}_m \left(\frac{z}{1+z}\right) + \frac{\overset{m+1}{C}_m}{m+1}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+1} + \frac{\overset{m+2}{C}_m}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{m+2} + \dots$$

$$+\infty \geqq z \geqq 0.$$

Die Gleichung (8) kann auch zur Transformation von Reihen dienen, welche nach Potenzen von $l(1+x)$ fortschreiten. Ein besonders elegantes Beispiel hierzu bietet die Reihe für den Integrallogarithmus dar. Man hat nämlich für jedes z:

$$li(z) = A + \frac{1}{2}l[(lz)^2] + \frac{1}{1}\cdot\frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \dots\dots,$$

worin A die von Soldner und Mascheroni auf 0,577215665 bestimmte Constante bedeutet.

Für $z = 1+x$ wird hier

Digitized by Google

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2} l[\overline{l(1+x)^2}] + \frac{1}{1} \cdot \frac{l(1+x)}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{l(1+x)^2}}{1.2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{l(1+x)^3}}{1.2.3} + \ldots$$

Unter der Bedingung, dass $1 \geqq x \geqq -1$ ist, lässt sich hier jedes einzelne Glied nach Formel (7) für $m = 1, 2, 3$, etc. in eine Reihe verwandeln. Vereinigt man hierauf diejenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, so gelangt man ohne alle Schwierigkeit zu der folgenden Formel:

$$li(1+x) = A + \frac{1}{2} l[\overline{l(1+x)^2}] + \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x^2}{1.2} + \frac{a_3 x^3}{1.2.3} - \ldots.$$

$$1 \geqq x \geqq -1,$$

worin irgend ein Koeffizient a_n mittelst der Gleichung

$$a_n = \frac{1}{1} \overset{n}{C}_1 - \frac{1}{2} \overset{n}{C}_2 + \frac{1}{3} \overset{n}{C}_3 - \ldots \pm \frac{1}{n} \overset{n}{C}_n$$

bestimmt wird.

XLII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Fast in allen Sammlungen trigonometrischer Aufgaben kommt das folgende Problem vor:

Aus drei gegebenen in einer horizontalen Ebene in gerader Linie liegenden Punkten werden die Neigungswinkel der von diesen drei Punkten nach einem vierten beliebigen Punkte im Raume gezogenen Linien gegen die horizontale Ebene, in welcher die drei gegebenen Punkte liegen, gemessen; man soll die Höhe dieses

vierten Punktes über der in Rede stehenden horizontalen Ebene bestimmen.

Unter dieser beschränkten Form hat die Aufgabe nur einen sehr geringen Werth für die Praxis. Dagegen scheint mir dieselbe unter verallgemeinerter Gestalt öfters eine vortheilhafte Anwendung bei geodätischen Messungen finden zu können, und ich will daher in dieser Abhandlung eine Auflösung des folgenden allgemeinen Problems zu geben versuchen:

Aufgabe.

In drei durch ihre Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem gegebenen Punkten M, M_1, M_2 werden die 180^0 nicht übersteigenden Winkel gemessen, welche die von den drei gegebenen Punkten M, M_1, M_2 nach einem beliebigen vierten Punkte N im Raume gezogenen Linien MN, M_1N, M_2N mit den positiven Theilen der dritten Axen dreier durch die Punkte M, M_1, M_2 gelegter dem primitiven Coordinatensysteme paralleler Coordinatensysteme einschliessen*); man soll die Lage des Punktes N im Raume, d. h. seine Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte Coordinatensystem, bestimmen.

§. 2.

Die gegebenen rechtwinkligen Coordinaten der Punkte M, M_1, M_2 seien respective

$$a,\ b,\ c;\quad a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;$$

und x, y, z seien die gesuchten Coordinaten des Punktes N in Bezug auf dasselbe System. Die von den Linien

$$MN = \varrho,\quad M_1N = \varrho_1,\quad M_2N = \varrho_2$$

mit den positiven Theilen dreier durch die Punkte M, M_1, M_2 gelegter, den primitiven Axen paralleler Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel seien respective

$$\varphi,\ \psi,\ i;\quad \varphi_1,\ \psi_1,\ i_1;\quad \varphi_2,\ \psi_2,\ i_2;$$

wo also nach den gemachten Voraussetzungen die drei Winkel i, i_1, i_2 als bekannt angenommen werden.

Dies vorausgesetzt, hat man nun offenbar die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x = a + \varrho\cos\varphi = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = b + \varrho\cos\psi = b_1 + \varrho_1\cos\psi_1 = b_2 + \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = c + \varrho\cos i = c_1 + \varrho_1\cos i_1 = c_2 + \varrho_2\cos i_2; \end{cases}$$

und nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

*) Also etwa die Zenithdistanzen des Punktes N in den Punkten M, M_1, M_2.

$$2)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos i^2 = 1, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 + \cos i_1{}^2 = 1, \\ \cos\varphi_2{}^2 + \cos\psi_2{}^2 + \cos i_2{}^2 = 1; \end{cases}$$

oder

$$3)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = \sin i^2, \\ \cos\varphi_1{}^2 + \cos\psi_1{}^2 = \sin i_1{}^2, \\ \cos\varphi_2{}^2 + \cos\psi_2{}^2 = \sin i_2{}^2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) erhält man:

$$4)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, \quad \cos\psi_1 = \dfrac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, \quad \cos\psi_2 = \dfrac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

und folglich wegen der Gleichungen 3):

$$5)\quad \begin{cases} (a-a_1+\varrho\cos\varphi)^2 + (b-b_1+\varrho\cos\psi)^2 = \varrho_1{}^2\sin i_1{}^2, \\ (a-a_2+\varrho\cos\varphi)^2 + (b-b_2+\varrho\cos\psi)^2 = \varrho_2{}^2\sin i_2{}^2; \end{cases}$$

also nach gehöriger Entwickelung dieser Gleichungen, mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen 3):

$$6)\quad \begin{cases} 2\{(a-a_1)\cos\varphi + (b-b_1)\cos\psi\}\varrho \\ = \varrho_1{}^2\sin i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi + (b-b_2)\cos\psi\}\varrho \\ = \varrho_2{}^2\sin i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen 1) ist

$$7)\quad \varrho_1 = \frac{c-c_1+\varrho\cos i}{\cos i_1}, \quad \varrho_2 = \frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2};$$

also

$$\begin{gathered} \varrho_1{}^2\sin i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2 \\ = (c-c_1+\varrho\cos i)^2\tang i_1{}^2 - \varrho^2\sin i^2, \\ \varrho_2{}^2\sin i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2 \\ = (c-c_2+\varrho\cos i)^2\tang i_2{}^2 - \varrho^2\sin i^2; \end{gathered}$$

und folglich, wie leicht erhellet, wenn der Kürze wegen

$$8)\quad \begin{cases} E_1 = \sqrt{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2}, \\ E_2 = \sqrt{(a-a_2)^2+(b-b_2)^2+(c-c_2)^2} \end{cases}$$

gesetzt wird:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
&\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2 \\
&\quad = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\
&\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\
&\qquad\qquad - \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2), \\
&\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2 \\
&\quad = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\
&\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\
&\qquad\qquad - \varrho^2 (\sin i^2 \cos i_2^2 - \cos i^2 \sin i_2^2);
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
&\{\varrho_1^2 \sin i_1^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_1)^2 - (b-b_1)^2\} \cos i_1^2 \\
&\quad = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\
&\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\
&\qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1), \\
&\{\varrho_2^2 \sin i_2^2 - \varrho^2 \sin i^2 - (a-a_2)^2 - (b-b_2)^2\} \cos i_2^2 \\
&\quad = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\
&\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\
&\qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2).
\end{aligned}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$9)\quad \begin{cases}
K_1 \cos i_1^2 = (c-c_1)^2 - E_1^2 \cos i_1^2 \\
\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_1) \cos i \sin i_1^2 \\
\qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_1) \sin (i-i_1), \\
K_2 \cos i_2^2 = (c-c_2)^2 - E_2^2 \cos i_2^2 \\
\qquad\qquad + 2\varrho\,(c-c_2) \cos i \sin i_2^2 \\
\qquad\qquad - \varrho^2 \sin (i+i_2) \sin (i-i_2);
\end{cases}$$

so ist nach 6):

$$10)\quad \begin{cases}
2\{(a-a_1) \cos\varphi + (b-b_1) \cos\psi\}\varrho = K_1, \\
2\{(a-a_2) \cos\varphi + (b-b_2) \cos\psi\}\varrho = K_2;
\end{cases}$$

folglich

$$11)\quad \begin{cases}
2\varrho \cos\varphi = \dfrac{(b-b_2)K_1 - (b-b_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}, \\
2\varrho \cos\psi = -\dfrac{(a-a_2)K_1 - (a-a_1)K_2}{(a-a_1)(b-b_2) - (b-b_1)(a-a_2)}.
\end{cases}$$

Nach der ersten der Gleichungen 3) ist aber

$$(2\varrho \cos\varphi)^2 + (2\varrho \cos\psi)^2 = 4\varrho^2 \sin i^2;$$

also ist nach 11):

$$12)\quad 4\varrho^2 \sin i^2 = \frac{\{(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2\}^2+\{(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2\}^2}{\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}^2},$$

welche Gleichung nun bloss noch die eine unbekannte Grösse ϱ enthält.

Setzt man der Kürze wegen:

$$13)\quad \begin{cases} A = (a-a_2)\{(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2\}\cos i_2{}^2 \\ \quad -(a-a_1)\{(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2\}\cos i_1{}^2, \\ B = (b-b_2)\{(c-c_1)^2-E_1{}^2\cos i_1{}^2\}\cos i_2{}^2 \\ \quad -(b-b_1)\{(c-c_2)^2-E_2{}^2\cos i_2{}^2\}\cos i_1{}^2; \\ A_1 = (a-a_2)(c-c_1)\cos i \sin i_1{}^2\cos i_2{}^2 \\ \quad -(a-a_1)(c-c_2)\cos i \sin i_2{}^2\cos i_1{}^2, \\ B_1 = (b-b_2)(c-c_1)\cos i \sin i_1{}^2\cos i_2{}^2 \\ \quad -(b-b_1)(c-c_2)\cos i \sin i_2{}^2\cos i_1{}^2; \\ A_2 = -(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 \\ \quad +(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2, \\ B_2 = -(b-b_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 \\ \quad +(b-b_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2; \end{cases}$$

oder, wenn

$$14)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = (c-c_1-E_1\cos i_1)(c-c_1+E_1\cos i_1)\cos i_2{}^2, \\ \varkappa_2 = (c-c_2-E_2\cos i_2)(c-c_2+E_2\cos i_2)\cos i_1{}^2; \\ \lambda_1 = (c-c_1)\cos i \sin i_1{}^2\cos i_2{}^2, \\ \lambda_2 = (c-c_2)\cos i \sin i_2{}^2\cos i_1{}^2; \\ \mu_1 = -\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2, \\ \mu_2 = -\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$15)\quad \begin{cases} A = \varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1), \\ A_1 = \lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1), \\ A_2 = \mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1); \end{cases}$$

und

$$16)\quad \begin{cases} B = \varkappa_1(b-b_2)-\varkappa_2(b-b_1), \\ B_1 = \lambda_1(b-b_2)-\lambda_2(b-b_1), \\ B_2 = \mu_1(b-b_2)-\mu_2(b-b_1); \end{cases}$$

so ist

$$17)\quad \begin{cases} (a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2=\dfrac{A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2}{\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2}, \\ (b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2=\dfrac{B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2}{\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2}; \end{cases}$$

also nach 12):

$$18)\quad 4\varrho^2=\frac{(A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2)^2+(B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2)^2}{\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}^2\sin i^2\cos i_1{}^4\cos i_2{}^4}.$$

oder, wenn der Kürze wegen noch

$$19)\quad C_1=\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}\sin i\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2$$

gesetzt wird:

$$20)\quad 4\varrho^2=\frac{(A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2)^2+(B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2)^2}{C_1{}^2}$$

oder

$$21)\quad 4C_1{}^2\varrho^2=(A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2)^2+(B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2)^2.$$

Durch gehörige Entwickelung dieser Gleichung wird man aber auf die folgende Gleichung des vierten Grades zur Bestimmung der Grösse ϱ geführt:

$$\begin{aligned} 22)\quad 0= &\ AA+BB \\ &+4(AA_1+BB_1)\varrho \\ &+2(AA_2+BB_2+2A_1A_1+2B_1B_1-2C_1C_1)\varrho^2 \\ &+4(A_1A_2+B_1B_2)\varrho^3 \\ &+(A_2A_2+B_2B_2)\varrho^4. \end{aligned}$$

Hat man mittelst dieser Gleichung des vierten Grades die Grösse ϱ bestimmt, so ergeben sich die Winkel φ, ψ mittelst der aus 11) fliessenden Formeln:

$$23)\quad \begin{cases} \cos\varphi= & \dfrac{(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2}{2\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}\varrho}, \\ \cos\psi=-\dfrac{(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2}{2\{(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)\}\varrho}; \end{cases}$$

welche aber wegen 17) und 19) auch auf folgende Art ausgedrückt werden können:

$$24)\quad \begin{cases} \cos\varphi= & \dfrac{B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2}{2C_1\varrho}\sin i, \\ \cos\psi=-\dfrac{A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2}{2C_1\varrho}\sin i. \end{cases}$$

Die Grössen ϱ_1, ϱ_2 erhält man mittelst der Gleichungen 7). nämlich mittelst der Gleichungen:

Digitized by Google

$$25)\quad \varrho_1 = \frac{c - c_1 + \varrho\cos i}{\cos i_1}, \qquad \varrho_2 = \frac{c - c_2 + \varrho\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$26)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a - a_1 + \varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, & \cos\psi_1 = \dfrac{b - b_1 + \varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a - a_2 + \varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, & \cos\psi_2 = \dfrac{b - b_2 + \varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

oder

$$27)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a - a_1 + \varrho\cos\varphi}{c - c_1 + \varrho\cos i}\cos i_1, & \cos\psi_1 = \dfrac{b - b_1 + \varrho\cos\psi}{c - c_1 + \varrho\cos i}\cos i_1; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a - a_2 + \varrho\cos\varphi}{c - c_2 + \varrho\cos i}\cos i_2, & \cos\psi_2 = \dfrac{b - b_2 + \varrho\cos\psi}{c - c_2 + \varrho\cos i}\cos i_2; \end{cases}$$

und die gesuchten Coordinaten x, y, z des Punktes N erhält man endlich mittelst der Formeln:

$$28)\quad \begin{cases} x = a + \varrho\cos\varphi = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = b + \varrho\cos\psi = b_1 + \varrho_1\cos\psi_1 = b_2 + \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = c + \varrho\cos i = c_1 + \varrho_1\cos i_1 = c_2 + \varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

§. 3.

Wenn $c = c_1 = c_2 = 0$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in der Ebene der xy liegen, so ist im vorhergehenden Paragraphen:

$$29)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = -E_1^{\,2}\cos i_1^{\,2}\cos i_2^{\,2}, \\ \varkappa_2 = -E_2^{\,2}\cos i_1^{\,2}\cos i_2^{\,2}; \\ \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0; \\ \mu_1 = -\sin(i + i_1)\sin(i - i_1)\cos i_2^{\,2}, \\ \mu_2 = -\sin(i + i_2)\sin(i - i_2)\cos i_1^{\,2} \end{cases}$$

und

$$30)\quad \begin{cases} A = \varkappa_1(a - a_2) - \varkappa_2(a - a_1). \\ A_1 = 0, \\ A_2 = \mu_1(a - a_2) - \mu_2(a - a_1) \end{cases}$$

und

$$31)\quad \begin{cases} B = \varkappa_1(b - b_2) - \varkappa_2(b - b_1), \\ B_1 = 0, \\ B_2 = \mu_1(b - b_2) - \mu_2(b - b_1). \end{cases}$$

Also wird in diesem Falle die Gleichung 22):

$$32)\quad 0=AA+BB+2(AA_2+BB_2-2C_1C_1)\varrho^2+(A_2A_2+B_2B_2)\varrho^4,$$

und kann folglich wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden.

Gehen wir in diesem Falle auf die ursprüngliche Gleichung 21) zurück, so wird dieselbe:

$$33)\quad 4C_1{}^2\varrho^2=(A+A_2\varrho^2)^2+(B+B_2\varrho^2)^2.$$

Setzen wir also

$$34)\quad X=A+A_2\varrho^2,\quad Y=B+B_2\varrho^2;$$

so ist

$$35)\quad \varrho^2=\frac{X-A}{A_2}=\frac{Y-B}{B_2},$$

und nach 33) haben wir also zur Bestimmung von X, Y die beiden folgenden Gleichungen:

$$36)\quad \frac{X-A}{A_2}=\frac{Y-B}{B_2}=\frac{X^2+Y^2}{4C_1{}^2}=\left(\frac{X}{2C_1}\right)^2+\left(\frac{Y}{2C_1}\right)^2.$$

Setzen wir jetzt

$$37)\quad U=\frac{Y}{X},$$

so werden diese Gleichungen

$$38)\quad \frac{X-A}{A_2}=\frac{XU-B}{B_2}=\left(\frac{X}{2C_1}\right)^2(1+U^2).$$

Aus der ersten Gleichung

$$\frac{X-A}{A_2}=\frac{XU-B}{B_2}$$

folgt:

$$39)\quad X=\frac{AB_2-BA_2}{B_2-A_2U}.$$

Also ist, wenn man dies in die Gleichung

$$\frac{X-A}{A_2}=\left(\frac{X}{2C_1}\right)^2(1+U^2)$$

einführt:

$$-(B-AU)(B_2-A_2U)=\left(\frac{AB_2-BA_2}{2C_1}\right)^2(1+U^2)$$

oder

Digitized by Google

$$40)\quad \left(\frac{AB_2-BA_2}{2C_1}\right)^2(1+U^2$$
$$=-BB_2+(AB_2-BA_2)\,U-AA_2U^2.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}AB_2-BA_2= &\ |\varkappa_1(a-a_2)-\varkappa_2(a-a_1)|\,|\mu_1(b-b_2)-\mu_2(b-b_1)|\\ &-|\varkappa_1(b-b_2)-\varkappa_2(b-b_1)|\,|\mu_1(a-a_2)-\mu_2(a-a_1)|\\ =&\,(\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2)\,|(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)|,\end{aligned}$$

d. i. nach 19):

$$41)\quad AB_2-BA_2=\frac{\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2}{\sin i\cos i_1{}^2\cos i_2{}^2}C_1\,,$$

und folglich, weil nach 29)

$$\begin{aligned}&\varkappa_1\mu_2-\mu_1\varkappa_2\\ =\ &E_1{}^2\cos i_1{}^4\cos i_2{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\\ &-E_2{}^2\cos i_1{}^2\cos i_2{}^4\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\end{aligned}$$

ist:

$$42)\quad AB_2-BA_2$$
$$=\frac{E_1{}^2\cos i_1{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)-E_2{}^2\cos i_2{}^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{\sin i}\,C_1.$$

Setzen wir also

$$43)\quad D_1=\frac{E_1{}^2\cos i_1{}^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)-E_2{}^2\cos i_2{}^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2\sin i},$$

so ist

$$44)\quad AB_2-BA_2=2C_1D_1\,,$$

und nach 40) haben wir also die Gleichung:

$$45)\quad D_1D_1(1+U^2)=-BB_2+2C_1D_1U-AA_2U^2,$$

oder

$$46)\quad (AA_2+D_1D_1)\,U^2-2C_1D_1U+BB_2+D_1D_1=0,$$

oder

$$47)\quad U^2-\frac{2C_1D_1}{AA_2+D_1D_1}\,U=-\frac{BB_2+D_1D_1}{AA_2+D_1D_1}.$$

Löst man nun diese Gleichung des zweiten Grades auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$48)\quad U=\frac{C_1D_1\pm\sqrt{C_1{}^2D_1{}^2-(AA_2+D_1D_1)(BB_2+D_1D_1)}}{AA_2+D_1D_1}.$$

Hat man U auf diese Weise gefunden, so ergiebt sich X mittelst der Gleichung 39), d. i. nach 44) mittelst der Gleichung:

$$49)\quad X=\frac{2C_1D_1}{B_2-A_2U},$$

und Y mittelst der Formel:

$$50)\quad Y=XU=\frac{2C_1D_1U}{B_2-A_2U}.$$

Die Grösse ϱ findet man endlich mittelst der Formeln:

$$51)\quad \varrho=\sqrt{\frac{X-A}{A_2}}=\sqrt{\frac{Y-B}{B_2}}.$$

Die Winkel φ und ψ erhält man mittelst der Formeln:

$$52)\quad \cos\varphi=\frac{Y}{2C_1\varrho}\sin i,\quad \cos\psi=-\frac{X}{2C_1\varrho}\sin i;$$

und für ϱ_1 und ϱ_2 hat man in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen die folgenden Formeln:

$$53)\quad \varrho_1=\varrho\frac{\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2=\varrho\frac{\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$54)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=\dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1},\ \cos\psi_1=\dfrac{b-b_1+\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2=\dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2},\ \cos\psi_2=\dfrac{b-b_2+\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

oder

$$55)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=(\cos\varphi+\dfrac{a-a_1}{\varrho})\dfrac{\cos i_1}{\cos i},\ \cos\psi_1=(\cos\psi+\dfrac{b-b_1}{\varrho})\dfrac{\cos i_1}{\cos i}; \\ \cos\varphi_2=(\cos\varphi+\dfrac{a-a_2}{\varrho})\dfrac{\cos i_2}{\cos i},\ \cos\psi_2=(\cos\psi+\dfrac{b-b_2}{\varrho})\dfrac{\cos i_2}{\cos i}. \end{cases}$$

Die Coordinaten x, y, z des Punktes N ergeben sich mittelst der Formeln:

$$56)\quad \begin{cases} x=a+\varrho\cos\varphi=a_1+\varrho_1\cos\varphi_1=a_2+\varrho_2\cos\varphi_2, \\ y=b+\varrho\cos\psi=b_1+\varrho_1\cos\psi_1=b_2+\varrho_2\cos\psi_2 \\ z=\varrho\cos i=\varrho_1\cos i_1=\varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

§ 4.

Wenn

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

ist, d. h., wie aus den bekannten Principien der analytischen Geometrie leicht folgt, wenn die Projectionen der drei gegebenen

Digitized by Google

Punkte M, M_1, M_2 auf der Ebene der xy in einer geraden Linie, oder, was dasselbe ist, die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in einer auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene liegen; so wird $C_1=0$, und die Formeln 24) und 52) versagen dann ihre Dienste. In diesem Falle muss man zu den beiden ursprünglichen Gleichungen 10), nämlich zu den beiden Gleichungen

$$2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho=K_1,$$
$$2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho=K_2$$

zurückgehen, aus denen sich wegen der zum Grunde gelegten Bedingung

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

sogleich die beiden Gleichungen

$$57)\quad \begin{cases}(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2=0,\\ (b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2=0\end{cases}$$

ergeben, von denen jede nur die eine unbekannte Grösse ϱ enthält. Weil aber nach 17)

$$(a-a_2)K_1-(a-a_1)K_2=\frac{A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2}{\cos i_1^{\,2}\cos i_2^{\,2}},$$
$$(b-b_2)K_1-(b-b_1)K_2=\frac{B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2}{\cos i_1^{\,2}\cos i_2^{\,2}}$$

ist, so erhalten wir im vorliegenden Falle zur Bestimmung von ϱ die beiden folgenden Gleichungen:

$$58)\quad \begin{cases}A+2A_1\varrho+A_2\varrho^2=0,\\ B+2B_1\varrho+B_2\varrho^2=0;\end{cases}$$

aus denen sich

$$59)\quad \begin{cases}\varrho=\dfrac{-A_1\pm\sqrt{A_1^{\,2}-AA_2}}{A_2},\\ \varrho=\dfrac{-B_1\pm\sqrt{B_1^{\,2}-BB_2}}{B_2}\end{cases}$$

ergiebt. Am besten bedient man sich aber bei der Auflösung der Gleichungen 58) der im ersten Theile des Archivs S. 12. gegebenen allgemeinen goniometrischen Methode der Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades. Um nämlich z. B. die erste dieser beiden Gleichungen aufzulösen, bestimmt man die Winkel Θ, Θ_1 mittelst der Formeln:

$$60)\quad \begin{cases}\cot(\Theta+\Theta_1)=\dfrac{A-A_2}{2A_1},\\ \cos(\Theta-\Theta_1)=-\dfrac{A+A_2}{2A_1}\sin(\Theta+\Theta_1);\end{cases}$$

und hat dann

$$61)\quad \varrho = \begin{cases} \text{tang } \Theta \\ \text{tang } \Theta_1 \end{cases}.$$

Führt man in die Gleichungen 60) für A, A_1, A_2 ihre Werthe aus 15) ein, so erhält man:

$$62)\quad \begin{cases} \cot(\Theta+\Theta_1) = \dfrac{(x_1-\mu_1)(a-a_2)-(x_2-\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}, \\ \cos(\Theta-\Theta_1) = -\dfrac{(x_1+\mu_1)(a-a_2)-(x_2+\mu_2)(a-a_1)}{2\{\lambda_1(a-a_2)-\lambda_2(a-a_1)\}}\sin(\Theta+\Theta_1). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Winkel φ und ψ hat man nun nach dem Obigen die drei Gleichungen:

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varphi^2+\cos\psi^2 = \sin i^2, \\ 2\{(a-a_1)\cos\varphi+(b-b_1)\cos\psi\}\varrho = K_1, \\ 2\{(a-a_2)\cos\varphi+(b-b_2)\cos\psi\}\varrho = K_2; \end{cases}$$

und kann φ, ψ sowohl aus der ersten und zweiten, als auch aus der ersten und dritten bestimmen, aber nicht aus der zweiten und dritten, weil

$$(a-a_1)(b-b_2)-(b-b_1)(a-a_2)=0$$

ist. Am besten wird man jedoch jederzeit die gerade Linie, in welcher die Projectionen der drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 auf der Ebene der xy liegen, als Axe der x annehmen. Dann ist $b=b_1=b_2=0$, und wir erhalten zur Bestimmung von φ die beiden einfachen Formeln:

$$64)\quad \cos\varphi = \frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho} = \frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho},$$

zur Bestimmung von ψ aber die Formel

$$\cos\psi = \pm\sqrt{\sin i^2-\cos\varphi^2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$65)\quad \cos\psi = \pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)}.$$

Die Grössen ϱ und ϱ_1 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$66)\quad \varrho_1 = \frac{c-c_1+\varrho\cos i}{\cos i_1}, \quad \varrho_2 = \frac{c-c_2+\varrho\cos i}{\cos i_2};$$

und die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 mittelst der Formeln

$$67)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1}, \ \cos\psi_1 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2}, \ \cos\psi_2 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

Digitized by Google

endlich die gesuchten Coordinaten x, y, z des Punktes N mittelst der Formeln

$$68)\quad \begin{cases} x = a + \varrho\cos\varphi = a_1 + \varrho_1\cos\varphi_1 = a_2 + \varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = c + \varrho\cos i = c_1 + \varrho_1\cos i_1 = c_2 + \varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

Ueber die Unbestimmtheit, welche in allem Vorhergehenden die doppelten Zeichen oder überhaupt die mehrfachen Wurzeln der Gleichungen lassen, muss aus der Natur jedes einzelnen vorliegenden Falls besonders entschieden werden, was bei praktischen Anwendungen selten eine Schwierigkeit haben wird.

§. 5.

Wenn in dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten Falle $c = c_1 = c_2 = 0$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 in der Ebene der xy in einer geraden Linie liegen, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, und folglich auch $A_1 = B_1 = 0$ Also hat man nach 58) zur Bestimmung von ϱ die beiden Gleichungen:

$$69)\quad A + A_2\varrho^2 = 0,\quad B + B_2\varrho^2 = 0;$$

aus deren erster sich z. B., weil ϱ seiner Natur nach eine positive Grösse ist,

$$70)\quad \varrho = \sqrt{-\frac{A}{A_2}}$$

ergiebt. Nach 15) ist also

$$71)\quad \varrho = \sqrt{-\frac{\varkappa_1(a-a_2) - \varkappa_2(a-a_1)}{\mu_1(a-a_2) - \mu_2(a-a_1)}},$$

und folglich nach 14)

$$72)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)\,E_2{}^2 - (a-a_2)\,E_1{}^2}{(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2 - (a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negatig ist. Nehmen wir die gerade Linie, in welcher die drei gegebenen Punkte M, M_1, M_2 liegen, als Axe der x an, so ist $b = b_1 = b_2 = 0$, und folglich nach 8)

$$E_1{}^2 = (a-a_1)^2, \quad E_2{}^2 = (a-a_2)^2;$$

also

$$73)\quad \varrho = \pm \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1{}^2 - (a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2{}^2}},$$

worin man auch noch $a = 0$ setzen könnte, wodurch aber die Formel eher an Eleganz verlieren als gewinnen würde.

Für K_1 und K_2 hat man im vorliegenden Falle nach 9) die Ausdrücke

$$74)\quad \begin{cases} K_1 \cos i_1{}^2 = -(a-a_1)^2 \cos i_1{}^2 - \varrho^2 \sin(i+i_1)\sin(i-i_1), \\ K_2 \cos i_2{}^2 = -(a-a_2)^2 \cos i_2{}^2 - \varrho^2 \sin(i+i_2)\sin(i-i_2); \end{cases}$$

also nach 73)

Digitized by Google

$$75)\quad K_1 = -(a-a_1)\frac{(a-a_1)^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1'^2-(a-a_2)^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2'^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1'^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2'^2},$$

$$K_2 = -(a-a_2)\frac{(a-a_1)^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1'^2-(a-a_2)^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2'^2}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1'^2-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2'^2}.$$

Den Winkel φ erhält man mittelst der Formeln:

$$76)\quad \cos\varphi = \frac{K_1}{2(a-a_1)\varrho} = \frac{K_2}{2(a-a_2)\varrho},$$

d. i. nach 74) mittelst der Formeln:

$$77)\quad \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{(a-a_1)^2\cos i_1^{\,2}+\varrho^2\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)\,\varrho\cos i_1^{\,2}}, \\ \cos\varphi = -\dfrac{(a-a_2)^2\cos i_2^{\,2}+\varrho^2\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)\,\varrho\cos i_2^{\,2}}; \end{cases}$$

oder mittelst der Formeln:

$$78)\quad \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{a-a_1}{2\varrho} - \dfrac{\varrho\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{2(a-a_1)\cos i_1^{\,2}}, \\ \cos\varphi = -\dfrac{a-a_2}{2\varrho} - \dfrac{\varrho\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)}{2(a-a_2)\cos i_2^{\,2}}. \end{cases}$$

Auch könnte man mittelst der Formeln 73), 75), 76) leicht einen ganz independenten Ausdruck für $\cos\varphi$ entwickeln, was wir dem Leser überlassen.

Den Winkel ψ erhält man nach 65) wieder mittelst der Formel

$$79)\quad \cos\psi = \pm\sqrt{-\cos(i-\varphi)\cos(i+\varphi)},$$

und ϱ_1, ϱ_2 mittelst der Formeln:

$$80)\quad \varrho_1 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_1},\quad \varrho_2 = \varrho\frac{\cos i}{\cos i_2}.$$

Die Winkel φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 ergeben sich mittelst der Formeln:

$$81)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a-a_1+\varrho\cos\varphi}{\varrho_1},\quad \cos\psi_1 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_1}; \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{a-a_2+\varrho\cos\varphi}{\varrho_2},\quad \cos\psi_2 = \dfrac{\varrho\cos\psi}{\varrho_2}; \end{cases}$$

und die Coordinaten x, y, z endlich mittelst der Formeln:

$$82)\quad \begin{cases} x = a+\varrho\cos\varphi = a_1+\varrho_1\cos\varphi_1 = a_2+\varrho_2\cos\varphi_2, \\ y = \varrho\cos\psi = \varrho_1\cos\psi_1 = \varrho_2\cos\psi_2, \\ z = \varrho\cos i = \varrho_1\cos i_1 = \varrho_2\cos i_2. \end{cases}$$

Durch die Coordinate z wird die mit ihrem gehörigen Zeichen genommene Entfernung des Punktes N von der Ebene der xy bestimmt. Nach 73) und 82) ist

Digitized by Google

$$83)\quad z = \pm \cos i \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^{\,2}-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^{\,2}}},$$

in welcher Formel das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man die Entfernungen der Projection des Punktes N auf der Ebene der xy von den drei gegebenen Punkten M, M_1, M_2 respective durch r, r_1, r_2, so ist offenbar

$$84)\quad r = \varrho \sin i,\ r_1 = \varrho_1 \sin i_1,\ r_2 = \varrho_2 \sin i_2;$$

folglich nach 80):

$$85)\quad r = \varrho \sin i,\ r_1 = \varrho \cos i \tang i_1,\ r_2 = \varrho \cos i \tang i_2;$$

also nach 73)

$$86)\quad r = \pm \sin i \cos i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^{\,2}-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^{\,2}}},$$

$$r_1 = \pm \cos i \sin i_1 \cos i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^{\,2}-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^{\,2}}},$$

$$r_2 = \pm \cos i \cos i_1 \sin i_2 \sqrt{\frac{(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a)}{(a-a_1)\sin(i+i_2)\sin(i-i_2)\cos i_1^{\,2}-(a-a_2)\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)\cos i_2^{\,2}}};$$

in welchen Formeln die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, jenachdem das Product $\cos i_1 \cos i_2$ positiv oder negativ ist.

Ich sollte, wie ich auch schon im Eingange angedeutet habe, meinen, dass sich von den in den vorhergehenden Paragraphen aufgelösten Aufgaben in der Praxis zuweilen eine recht vortheilhafte Anwendung machen lassen möchte; der bisher allein behandelte specielle Fall, wenn die drei gegebenen Punkte in einer der

drei angenommenen Coordinatenebenen, etwa in der Ebene der xy, in einer geraden Linie liegen, dürfte dazu aber gerade am wenigsten geeignet sein.

XLIII.
Miscellen.

Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Von Herrn R. Hoppe, Lehrer der Mathematik zu Keilhau bei Rudolstadt.

Unter den hundert und mehr Beweisen, welche bereits für den pythagoräischen Lehrsatz existiren sollen, möchte ich auf einen aufmerksam machen, der darin besteht, die Flächenräume, deren Gleichheit bewiesen werden soll, in fünf Paar congruente und parallel liegende Stücke zu zerlegen, was er mittelst einer einzigen Hülfslinie bewerkstelligt. Er steht demnach mit dem gewöhnlichen Beweise für die Gleichheit der Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen auf einer Linie, an welchem Anfängern die Anwendung des Beweises zur Sicherstellung der Richtigkeit gewöhnlich zuerst klar wird, weil er von der unmittelbaren Anschauung durch einen einfachen Schluss zu dem nicht unmittelbar angeschauten führt.

Man lege, wenn in Taf. V. Fig. 6. AE das rechtwinklige Dreieck ist, das Quadrat der grossen Kathete $CD'E'$ nach aussen, dagegen die Quadrate der Hypotenuse und der kleinen Kathete $ABCDE$ und AB' nach innen, wie es in der Figur geschehen ist, und fälle von der ausserhalb der Kathetenquadrate liegenden Ecke des Hypotenusenquadrats ein Perpendikel auf die Verlängerung der kleinen Kathete: so fehlt es nicht an Stücken, aus denen sich die Congruenz der mit gleichen Buchstaben bezeichneten Dreiecke folgern lässt. Nun braucht man bloss die Data folgendermassen zusammenzustellen:

$$\begin{aligned}\text{Quadrat der kl. Kathete} &= A + B',\\ \text{Quadrat der gr. Kathete} &= \quad C + D' + E',\\ \text{Quadrat der Hypotenuse} &= A + B + C + D + E,\end{aligned}$$

um die Gleichheit der Summe der ersten beiden mit dem letzten in die Augen fallen zu lassen.

Zur Abhandlung XLVII in Theil VII.

Von dem Herrn Dr. J. Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die dort angeführten Resultate können leicht auf folgende Weise noch verallgemeinert werden.

Die Formel (1) des §. 1. jener Abhandlung giebt nämlich

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^m K}{dx^m} - \frac{d^m K'}{dx^m} &= \sum_0^r [n.(n-1)\ldots(n-m+1) A_n x^{n-m},\\ \int^m K\,dx^m - \int^m K'\,dx^m &= \sum_0^r \left[\frac{A_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right]\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Digitized by Google

welche beide Formeln höchst allgemeine Summirungsformeln sind. Soll man also die Summe der Glieder des Ranges $0, 1, \ldots . r$ der Reihe finden, deren allgemeines Glied $n.(n-1)\ldots.(n-m+1)A_n x^{n-m}$ ist, so suche man die Summe $\sum_0^r A_n x^n$; heisst diese S, die erstere S', so hat man

$$S' = \frac{d^m S}{dx^m} \quad (2)$$

Soll man dagegen die Summe $\sum_0^r \frac{A_n x^{n+m}}{(n+1)(n+2)\ldots.(n+m)} = S_1$ finden, so ist dieselbe

$$S_1 = \int^m S dx^m \quad (2)$$

wenn S die nämliche Bedeutung, wie in (1) hat. Für $m=1$ folgt, wenn $S = \sum_0^r A_n x^n$, $S' = \sum_0^r n A_n x^{n-1}$, $S_1 = \sum_0^r \frac{A_n x^{n+1}}{n+1}$,

$$S' = \frac{dS}{dx}, \quad S_1 = \int S dx \quad (3)$$

Bei den Formeln (2) und der zweiten in (3) haben wir die jeweils beizufügenden Konstanten mit inbegriffen; dieselben sind übrigens immer leicht zu bestimmen, da für $x=0$ die Werthe von S' und S_1 bekannt sind.

So findet sich

$$\sum_0^r n x^{n-1} \cos nt = \frac{d.}{dx}\left(\frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2}\right),$$

$$\sum_0^r \frac{x^{n+1}\cos nt}{n+1} = \int_0^x \left(\frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2}\right) dx,$$

$$\sum_0^r n x^{n-1} \sin nt = \frac{d.}{dx}\left(\frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)t + x^{r+1}\sin rt)\, x}{1 - 2x\cos t + x^2}\right),$$

$$\sum_0^r \frac{x^{n+1}\sin nt}{n+1} = \int_0^x \frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)t + x^{r+1}\sin rt)\, x}{1 - 2x\cos t + x^2} dx;$$

aus welchen Formeln folgt:

$$\sum_0^r \frac{\cos nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos t - x^{r+1}\cos(r+1)t + x^{r+2}\cos rt}{1 - 2x\cos t + x^2} dx,$$

$$\sum_0^r \frac{\sin nt}{n+1} = \int_0^1 \frac{(\sin t - x^r \sin(r+1)\, t + x^{r+1}\sin rt)\, x}{1 - 2x\cos t + x^2} dx;$$

und hieraus wieder

$$\sum_0^r \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x - x^{r+1} + x^{r+2}}{1 - 2x + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{r+1}}{1 - x} dx.$$

Nun ist $\int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$,

$$\int \frac{x^{r+1}}{1-x} dx = -\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^r}{r} - \frac{x^{r-1}}{r-1} \ldots - l(1-x);$$

also $$\sum_0^r \frac{1}{n+1} = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \ldots + 1,$$

was identisch das Gleiche ist, so dass auf diese Art der Werth von $\sum_0^r \frac{1}{n+1}$ nicht gefunden wird. Dagegen aber hat man hierdurch ein Mittel, den Werth des bestimmten Integrals $\int_0^1 \frac{1-x^{r+1}}{1-x}\,dx$ zu finden, der übrigens ganz eben so auf anderm Wege zu finden ist. Die Beispiele lassen sich leicht vermehren.

Berichtigungen.

In meinem Einiges von den Kegelschnitten überschriebenen Aufsatze Nr. XLII. im ersten Theile des Archivs sind auf S. 322. einige Zeichen verschrieben worden. Man muss nämlich auf dieser Seite für $1-\cos(\Theta-\omega)$, $1-\cos(\Theta_1-\omega)$, $1-\cos(\Theta_2-\omega)$ überall $1+\cos(\Theta-\omega)$, $1+\cos(\Theta_1-\omega)$, $1+\cos(\Theta_2-\omega)$, ferner in der 5ten und 7ten Zeile von unten für $r-r_1$ und $r-r_2$ beziehungsweise $-(r-r_1)$ und $-(r-r_2)$ schreiben, endlich dem Bruche, durch welchen in der 2ten Zeile von unten $\sin\omega$ ausgedrückt wird, das Zeichen — vorschreiben, das Zeichen — vor dem Bruche in der ersten Zeile von unten, durch welchen $\cos\omega$ dargestellt wird, aber streichen. Ich bitte diese leicht vorzunehmenden Abänderungen gefälligst nicht unberücksichtigt zu lassen. Ferner muss es auch auf S. 324. oben

statt $\{1-\cos(\Theta-\Theta_1)^2\}$, $\{1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)^2\}$, $\{1-\cos(\Theta_2-\Theta)^2\}$
heissen: $\{1-\cos(\Theta-\Theta_1)\}^2$, $\{1-\cos(\Theta_1-\Theta_2)\}^2$, $\{1-\cos(\Theta_2-\Theta)\}^2$.

Thl. VII. S. 69. In dem gesperrt gedruckten Ausdrucke der aufzulösenden Aufgabe schalte man Z. 3. v. u. hinter dem Gedankenstriche die folgenden Worte ein: „und die Neigungswinkel der von dem ersten und zweiten gegebenen Punkte nach dem dritten Punkte gezogenen Linien gegen die durch die beiden gegebenen Punkte gelegten Horizontalebenen.“

Zugleich bitte ich in dem Ueber eine astronomische Aufgabe überschriebenen Aufsatze Thl. VIII. Nr. VIII. S. 101. oben Z. 4—6 statt der Worte: „nur eine Drehung des Fernrohrs um den unverrückt stehen gebliebenen Höhenkreis erfordert“ das Folgende zu setzen: „nur eine leicht zu bewirkende Drehung des Höhenkreises um 180° erfordert.“ Der Fehler hatte sich bei der Redaction des Aufsatzes durch eine vorgefallne Verwechselung mit etwas Anderem eingeschlichen und wurde erst später bemerkt. G.

In Thl. VIII. Heft 2. S. 147. Z. 5. ist $B_n < \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} B_1$ statt $B_n < \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} B_1$ zu setzen.

Digitized by Google

XXIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Lobatto, Lessen over de hoogere Algebra, opgesteld ten gebruike bij het onderwijs aan de Koninklijke academie ter opleiding van burgerlijke Ingenieurs, enz. te Delft. Amsterdam. 1845.

Lehmus, D. C. L.: algebraische Aufgaben aus dem Gebiete der reinen Mathematik, mit Angabe der Resultate. Berlin. 1846. 15 Sgr.

Royer: Solutions des problèmes d'arithmétique et de géométrie, à l'usage des demoiselles. Nanci. 1845.

Lettres à S. A. R. le Duc régnant de Saxe-Coburg et Gotha, sur la Théorie des Probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques; par A. Quetelet. Bruxelles. 1846. 8. 3 Rthlr.

In diesen an einen der edelsten Fürsten Deutschlands gerichteten Briefen hat Herr Quetelet eine ohne alle höhere mathematische Kenntnisse verständliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit ihrer Anwendung auf die moralischen und politischen Wissenschaften zu geben versucht, und wir glauben, dass ihm dies auf eine ausgezeichnete Weise gelungen ist. Mit Ausnahme der „Introduction" zu der „Théorie analytique des probabilités" von Laplace wüssten wir kein Werk, welches in Bezug auf den beabsichtigten Zweck diesen Briefen würdig an die Seite gestellt zu werden verdiente. Aber auch vor dieser trefflichen „Introduction" gebührt Herrn Quetelets Werke nach unserer Ueberzeugung insofern ein Vorzug, weil in demselben in einer besonderen Abtheilung die vielen Beziehungen,

Digitized by Google

in denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den moralischen und politischen Wissenschaften, insbesondere zur Statistik, steht, auf eine überaus deutliche, anziehende und belehrende Weise hervorgehoben worden sind, weshalb kein Statistiker, welcher die beste Art und Weise, wie sich aus statistischen Daten möglichst sichere Resultate ziehen lassen, dieses auch äusserlich mit fast verschwenderischer Eleganz ausgestattete schöne Werk ungelesen lassen sollte. Aber auch Naturforscher, und zwar nicht bloss Astronomen und Physiker, sondern insbesondere auch Botaniker, überhaupt aber Jeder, der die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaften in einer höchst anziehenden völlig populären Darstellung kennen lernen will, wird nach unserer vollkommensten Ueberzeugung keinen besseren Wegweiser als dieses Werk wählen können. Es sind 46 in 4 Abtheilungen getheilte Briefe, deren Hauptinhalt wir im Folgenden angeben wollen, da die Beschränktheit des Raums uns leider verbietet, noch mehr in's Einzelne einzugehen.

Première Partie. Sur la théorie des probabilités. 1. Nos connaissances et nos jugements ne sont fondés, en général, que sur des probabilités plus ou moins grandes qu'il faut savoir apprécier. 2. De la probabilité mathématique d'un événement simple. Difficulté de rendre les chances égales. 3. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite se reproduira encore. 4. De la probabilité qu'un événement observé plusieurs fois de suite dépend d'une cause qui facilite sa reproduction. 5. De la probabilité qu'un événement observé un certain nombre de fois, dans un nombre donné d'épreuves, se reproduira encore. 6. De la probabilité mathématique d'un événement composé. 7. De l'espérance mathématique. Loteries, sociétés d'assurances. 8. De l'espérance morale; remarques de Buffon à ce sujet. 9. Comment il faut envisager le calcul des probabilités. De l'accord entre la théorie et l'expérience. — *Deuxième partie.* Des moyennes et des limites. 10. Des moyennes et des limites en général. 11. Des moyennes proprement dites et des moyennes arithmétiques. 12. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans les sciences politiques. 13. Exemple de l'emploi des moyennes arithmétiques dans la météorologie. 14. Loi de sortie de deux espèces d'événements simples dont les chances sont égales et les combinaisons peu nombreuses. Accord de la théorie et de l'expérience. 15. Loi de deux espèces d'événements simples, dont les chances sont égales, et qui se combinent d'un nombre considérable de manières; échelle de possibilité; sa construction. 16. L'échelle de possibilité est d'un usage général. 17. Théorie des moyennes. 18. Des moyennes proprement dites. Échelle de précision. Erreur probable. Module de précision. 19. Exemple de l'emploi de la théorie des moyennes emprunté à l'astronomie. 20. Reconnaitre si une moyenne arithmétique est veritablement moyenne. Type de la taille humaine. 21. Chaque race d'hommes a son type particulier. Explication de cette théorie. 22. Événements ordinaires, extraordinaires. Monstruosités. — *Troisième partie.* De l'étude des causes. 23. Des causes et de leur appréciation. Causes constantes, causes variables, causes accidentelles. 24. Des causes en général, et en particulier des causes accidentelles quand les chances sont égales. 25. Des causes accidentelles, quand les

Digitized by Google

chances sont inégales. 26. Loi de sortie de deux événements dont les chances sont inégales. 27. Des causes constantes. 28. Des causes variables. 29. Des causes variables périodiques. 30. Sur les causes constantes qu'on peut regarder comme variables. Loi des grands nombres. 31. De l'étude des causes et de la marche à suivre dans l'observation. 32. De l'étude des causes. Floraison. 33. Suite de l'étude des causes. Floraison. — *Quatrième partie.* De la Statistique. 34. Des sciences d'observation et de la statistique en particulier. 35. La statistique est-elle un art ou une science? 36. Objets dont s'occupe la statistique. 37. Des différentes formes qu'affectent les statistiques. 38. De la manière de réunir les documents statistiques. 39. Sur la manière de contrôler les documents statistiques. 40. Manière de mettre en usage les documents statistiques. 41. Il faut faire de la statistique sans idées préconçues et ne négliger aucun chiffre. 42. Peut-on tirer avantage de documents statistiques incomplets? 43. Il ne faut comparer que les éléments comparables. 44. De l'emploi de la statistique dans les sciences médicales. 45. De l'utilité de la statistique pour l'administration. 46. Des progrès ultérieures de la statistique.

Auf diese Briefe, welche nicht eine einzige Formel enthalten, folgt nun eine Reihe von 30 Noten, welche zu den verschiedenen Briefen mathematische Zusätze in der Sprache der Analysis enthalten, und für alle diejenigen, welche die nöthigen mathematischen Kenntnisse besitzen, natürlich das Interesse an der Wissenschaft und an dem vorliegenden Werke erhöhen.

Möge dieses schöne Werk in recht viele Hände kommen, und zu der so sehr zu wünschenden immer grösseren Verbreitung und häufigeren Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den verschiedenartigsten Wissenschaften recht Vieles beitragen.

Unmittelbar folgen werden diesem Werke:

Lettres à Son Altesse Royale Le Prince Albert sur la Physique sociale; par A. Quetelet

deren baldigem Erscheinen wir mit Verlangen entgegen sehen.

Antistrauch.

(Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.)

Goethe sagte einmal, man solle einem Kritiker nicht antworten, auch wenn er behaupte, man habe einen silbernen Löffel gestohlen, und diese Aeusserung war bei ihm natürlich, weil er hoch genug stand, um das Gebell hämischer Rezensenten ignoriren zu können und weil er sich durch ein kurzes und bezeichnendes Epitheton, womit er solche Gegner zu beehren pflegte, über dieselben erhob. Ich bedaure sehr, hier nicht so kurz wegkommen zu können, einmal weil ich nicht Goethe bin, und dann, weil jenes Epitheton delikaten Ohren wie eine Injurie klingen möchte. Es hat sich nämlich im 6ten Doppelhefte der Heidelberger Jahrbücher für 1845 Herr Dr. Strauch zu Muri (Kanton Aargau) mit meinem

Handbuche der algebraischen Analysis so wacker herumgezaust, dass mir das Pflichtgefühl gebietet, meinem armen Kinde beizuspringen, damit es nicht unter den derben Händen des Sohnes kuhreicher Alpen jämmerlich verende. Ich weiss zwar nicht, was eigentlich den entsetzlichen Grimm des Herrn Strauch verursacht hat, glaube aber in der Rezension selbst bemerkt zu haben, dass die erhitzte Phantasie des verehrten Herrn Doctors wie weiland die des sinnreichen Junkers Don Quixote da Gespenster und Unholde hingezaubert hat, wo doch Alles einfach und natürlich zusammenhängt. Ich wage daher in nüchterner Rede die obschwebenden Missverständnisse zu beseitigen.

Nro. 1. *) Der erste unter den kleinen Irrthümern, in die Herr Strauch verfallen ist, besteht darin, dass er mein Buch als ein vollständiges Organon der Wissenschaft beurtheilt, wobei er natürlich die Entdeckung macht, dass eine Menge Lehren darin fehlen; es heisst in dieser Beziehung: „Gewiss hat Jedermann erwartet, dass das Buch mit dem Material, welches sich auch anderwärts vorfindet, ausgestattet werde (Nro. 4.)". Nun will aber der gelehrte Rezensent mein Buch „vom Anfange bis zum Ende mit aller Aufmerksamkeit durchgelesen" haben; sind ihm denn da die ersten Worte der Vorrede nicht Fingerzeig genug gewesen, um den Zweck des Buches zu begreifen? Ich habe da nämlich gesagt: „das Werk hat einen doppelten Zweck: einerseits soll es als *Leitfaden* für akademische Vorlesungen dienen, ausserdem aber auch zum Selbststudium benutzt werden können." Nun weiss aber Jeder, dass man in einem vier- oder fünfstündigen Collegio nicht im Stande ist, Alles vorzutragen, „was sich anderwärts vorfindet", und dass man demnach sich zu einer Auswahl gewisser Hauptpartieen entschliessen muss, und daher darf man an einen Leitfaden zu den Vorlesungen selbst noch weniger Ansprüche auf absolute Vollständigkeit machen. Es ist freilich eine sehr wohlfeile Kunst, ein Buch hart zu tadeln, wenn man vorher das Publikum über den Zweck desselben geradezu getäuscht hat; ist diese Täuschung eine unabsichtliche gewesen, so kann ich Herrn Strauch nur den Rath ertheilen, das Rezensirhandwerk so lange aufzugeben, bis er Bücher mit Verstand lesen gelernt hat, war aber jene Täuschung eine absichtliche, so verdient Herr Strauch nur Verachtung. — Sonderbar genug ist es indessen, dass sich Herr Strauch mit seiner Klage über Unvollständigkeit im Widerspruche mit den anderen Beurtheilern meines Buches befindet, die es alle für reichhaltig (natürlich in seiner Art) erklären.

---

*) Damit Herr Strauch nicht sagt, dass ich einer von den harthörigen Schriftstellern sei, die ihr Ohr der Stimme der Kritik ganz verschliessen, habe ich hier die unerhört neue und geniale Manier desselben adoptirt, wonach die ganze Rezension mit vielem Aufwande von Scharfsinn höchst systematisch in Nummern, diese in Abschnitte mit römischen Zahlen, letztere wieder in Rubriken mit a, b, c etc. zerfällt wird †).

†) Kommt auch hebräisches Alphabet vor?

Anmerkung des Setzers.

Digitized by Google

Nro. 2. Herr Strauch tadelt ferner meine Darstellung des binomischen Satzes und dabei heisst es u. A. (S. 895.): „Gehen wir nun zur Entwickelung des Binomialtheorems selbst, so gewahren wir, dass volle dreizehn Seiten verwendet sind, um nur die Entwickelung von $(x+k)^m$ für den Fall herzustellen, dass m eine positive ganze Zahl ist.“ Herr Strauch muss, hiernach zu urtheilen, wahrscheinlich nicht zählen können, denn die fragliche Entwickelung nimmt nur acht und zweidrittel Seiten ein, auf denen ausserdem auch noch die wichtigsten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten positiver und ganzer Exponenten stehen, was Herr Strauch, wie es scheint, absichtlich verschweigt. Ich setze zum Beweise den Inhalt her:

Cap. V. Das Binomialtheorem.

§. 27. Bestimmung der hieher gehörenden Aufgabe und erste Schritte zur Lösung derselben. (S. 130. Zeile 12. v. o.)

Hier zeige ich die Entstehungsweise der Binomialkoeffizienten bei succesiver Multiplikation von $1+x$ mit sich selbst, gebe die Consruktion der Koeffiziententafel und beweise die Eigenschaften

$$m_p = m_{m-p},\ m_{p-1} + m_p = (m+1)_p,$$
$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

§. 28. Weitere Betrachtung der Binomialreihe. (S. 135.)

Ich leite hier aus der Binomialkoeffiziententafel induktorisch die Formel

$$m_p = \frac{m-\overline{p-1}}{p}\, m_{p-1}$$

ab, welche zur independenten Bestimmung der Koeffizienten dient, und bemerke, dass die vorhin bewiesenen Eigenschaften von m_p auf die Form $\frac{m(m-1)\ldots(m-\overline{p-1})}{1.2\ldots p}$ passen. Um aber eine strenge Controle für die Richtigkeit des noch hypothetischen Resultats

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^m$$

zu erhalten, schlage ich vor, die Reihe rechts für sich zu summiren; käme dabei $(1+x)^m$ als Summe heraus, so hätte man darin die Probe. Hinzugesetzt wird aber gleich, dass sich dieser Gedanke allgemeiner ausführen lässt, wenn man statt m eine beliebige Grösse μ setzt. Jetzt folgt

§. 29. Summirung der Binomialreihe. (S. 138. Z. 9. v. u.)

worin gar nicht mehr von positiven ganzen Exponenten die Rede ist. Das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten steht also auf dem Raume von S. 130. Z. 12. v. o. bis S. 138. Z. 9. v. u. und das macht circa $8\frac{1}{3}$ Seiten, aber nicht 13! Herr Strauch verlangt, dass ich hätte Combinationslehre aufnehmen und mittelst dieser den binomischen Satz beweisen sollen. Da ich aber im ganzen Buche Combinationslehre nur an dieser einzigen Stelle hätte

brauchen können, so wäre sie doch nur ein integrirender Theil vom Capitel Binomialtheorem gewesen und dasselbe hierdurch jedenfalls grösser geworden, als bei der obigen Darstellung. Uebrigens lag mir daran, den Schüler frühzeitig mit dem ächt analytischen Verfahren bekannt zu machen, wonach man in eine Zahlenreihe, welche sich aus dem Calcül ergiebt, erst induktorisch ein Gesetz zu bringen und dieses nachher zu beweisen sucht. Euler hat diese Methode unzählige Male angewandt und mit einigem Geschick ist sie bei vielen Untersuchungen (z. B. über höhere Differentialquotienten) eine wahre Fundgrube neuer Resultate.

Nro. 3. In Bezug auf Gränzbetrachtungen hatte ich in der Vorrede bemerkt, dass es gar nicht einerlei sei, ob man in einer Funktion von x die Veränderliche gleich einem speziellen Werthe a setze, oder sie in diesen übergehen lasse, weil dieser Uebergang auf zweierlei Weise durch continuirliche Zunahme oder Abnahme möglich ist und diess an einem Beispiele erläutert. Lässt man nämlich in

$$f(x) = \text{Arctan}\frac{1}{a-x} - \text{Arctan}\frac{1}{x-a}$$

x durch Zunahme in a übergehen, indem man $x = a-\delta$ setzt, wo δ bis zur Gränze Null abnimmt, so wird

$$f(a) = \text{Lim}\left(\text{Arctan}\frac{1}{\delta} - \text{Arctan}\frac{1}{-\delta}\right)$$

$$= \text{Arctan}\,\infty - \text{Arctan}\,(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Nimmt man dagegen in $f(x)$ $x = a+\delta$, so entsteht der Werth $x = a$ durch Abnahme von x und es wird

$$f(a) = \text{Lim}\left(\text{Arctan}\frac{1}{-\delta} - \text{Arctan}\frac{1}{\delta}\right)$$

$$= \text{Arctan}\,(-\infty) - \text{Arctan}\,\infty = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Hinzugefügt habe ich noch, dass man diess leicht aus einer geometrischen Construktion ersehen könne. Herr Strauch möchte nun zuerst diese Construktion kennen lernen, die ihm nicht so nahe zu liegen scheint. Der gelehrte Kritikus sieht hier den Wald vor lauter Bäumen nicht, denn über jene Construktion kann jeder, der S. 45. 4 gelesen und Fig. 18. angesehen hat, nicht einen Augenblick in Zweifel sein. Die graphische Darstellung von der genannten Funktion $f(x)$ ist der von $\text{Arctan}\frac{1}{z}$ völlig analog, nur dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein anderer ist und die Ordinaten doppelt so gross wie die in Fig. 18. sind. Diess als Probe vom Scharfsinne meines Herrn Gegners. — Aber er geht noch weiter und beweist uns, dass $f(a)$ unendlich viel verschiedene Werthe hat. Das gehört nun gerade in das Gebiet des Unsinns.

Digitized by Google

Die Funktion Arctan $\frac{1}{z}$ hat nämlich wie $\frac{1}{z}$ selbst immer nur einen Werth, ausgenommen für $z=0$; denn für $z=0$ wird die Funktion $\frac{1}{z}$ unstetig, indem sie aus $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt, oder richtiger, ihre graphische Darstellung als Curve (gleichseitige Hyperbel) besteht aus zwei ganz getrennten Zügen, die ein Perpendikel im Anfangspunkte der Coordinaten zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Daher hat Arctan $\frac{1}{z}$ für $z=0$ zwei Werthe Arctan$(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ und Arctan$(+\infty)=+\frac{\pi}{2}$, und daraus folgt ganz unmittelbar, dass jene Funktion $f(x)$ für $x=a$ oder $a-x=0$ zwei Werthe annimmt, von denen $+\pi$ der Endwerth der bei $x=0$ anfangenden Reihe von Werthen ist und $-\pi$ den ersten der darauf folgenden Werthe darstellt. Es wäre wirklich zu wünschen, dass uns Herr Strauch eine Zeichnung von $f(x)$ mittheilte, einer Funktion, die nach seiner gelehrten Deduktion immer nur einen Werth hat, aber für $x=a$ urplötzlich, man weiss gar nicht woher, unendlich viele Werthe annimmt.

Nro. 4. Herr Strauch redet u. A. auch den divergenten Reihen das Wort, und hierauf brauchte ich eigentlich am wenigsten zu entgegnen, da dieser Punkt bereits unter den Männern, welche die Analysis in neuerer Zeit erweitert haben, völlig entschieden ist. Man muss es nur einmal versucht haben, in dieser Beziehung etwas zu leisten und man macht gar bald die Erfahrung, auf welchem schwankenden Boden man sich befindet, sobald man nicht mehr im Stande ist, die Convergenz oder Divergenz der in Rechnung gezogenen Reihen zu beurtheilen. Im Gegensatze zu dieser Erfahrung meint Herr Strauch, man könne mit divergenten Reihen in Gottes Namen rechnen, wenn man vorher überlegt habe, zu welchem Zwecke man die Reihen benutzen wolle. Da diese Meinung eine bei denjenigen sehr gewöhnliche ist, welche einer Kritik der Methode nicht recht trauen und keine Erfahrung obiger Art haben und die gewissermassen ein juste milieu bilden möchten, was in einer exakten Wissenschaft zwischen diametral entgegengesetzten Ansichten ein wahres Unding ist, so will ich dieselbe hier etwas näher beleuchten.

Wenn über Anwendungen von Reihen diskutirt werden soll, so werden wir zuerst genöthigt sein, die unnöthigen und überflüssigen Anwendungen von den durchaus nothwendigen und nicht zu vermeidenden sondern zu müssen. Unter die ersteren gehört aber sehr Vieles, z. B. die Gründung der Differenzialrechnung auf die Taylor'sche Reihe, womit der Zweck dieser Rechnung, nämlich das Gesetz der Stetigkeit in seinem ganzen Umfange in die Gewalt des Calcüls zu bringen, völlig aus den Augen gerückt wird; ferner der Beweis für die Regel zur Aufsuchung der Maxima und Minima, der viel besser mit Hülfe der Relation $f(a+h)=f(a)+\frac{h^n}{1.2..n}f^{(n)}(a+\lambda h)$ geführt wird; die Ableitung der Gleichung der Tangente an einer Curve, die Quadratur der Curven und m. A. Der wirklich nothwendigen Anwendungen bleiben dann nur zwei;

Digitized by Google

entweder will man die Werthe einer Funktion näherungsweis berechnen, oder man verwandelt einen Ausdruck auf doppelte Weise in Reihen, welche nach Potenzen einer Hauptgrösse fortgehen, um beiderseits eine Coeffizientenvergleichung vornehmen zu können. Dass für den ersten Zweck nur convergente Reihen brauchbar sind, versteht sich ganz von selbst; aber auch für den zweiten erkennt man a posteriori leicht die Nothwendigkeit, sich erst von der Convergenz der fraglichen Reihen zu überzeugen, wenn man nicht mit der Coeffizientenvergleichung auf die verkehrtesten Resultate kommen will. Z. B. es giebt folgende Formel, die zuerst von Laplace entwickelt wurde:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}\,\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-u}. \qquad (1)$$

und sie gilt für alle möglichen positiven u. Setzt man für $\cos ux$ und e^{-u} die wirklich gleichgeltenden und convergirenden Reihen, die nach Potenzen von ux und u fortgehen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} - \frac{u^2}{1.2}\int_0^\infty \frac{x^2\partial x}{1+x^2} + \frac{u^4}{1.2.3.4}\int_0^\infty \frac{x^4\partial x}{1+x^2} - \ldots \\ = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}-\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und nun sollte man denken, es müssten die Coeffizienten gleicher Potenzen von u einander gleich sein, aber quod non, denn es kommt heraus

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{x^2\partial x}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{x^4\partial x}{1+x^2} = +\frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4.5} = \ldots = 0,$$

und von diesen Gleichungen ist nur die erste richtig (weil die Formel (1) für $u=0$ gilt), alles Andere dagegen weist sich als falsch aus, denn die Werthe der übrigen Integrale sind unendlich gross. Hier kann der Fehler nur darin liegen, dass man die Coeffizienten zweier Reihen verglichen hat, ohne die Convergenz der letzteren zu kennen, denn die Formel (1) ist unbestritten richtig und ebenso sind es die Substitutionen für $\cos ux$ und e^{-u}. Wollte man also auf diesem Wege die Werthe bestimmter Integrale suchen, so müsste man sich vorher überzeugen, dass die Reihe, in der sie vorkommen, convergirt, was aber oft sehr schwer ist. Ich könnte dergleichen Beispiele aus eigener Praxis in Menge anführen, wenn ich es überhaupt der Mühe werth hielte, literarische Nachzügler zu belehren.

Herr Strauch mocquirt sich bei seinem Räsonniren über meine Behandlungsweise der Reihen auch über die Kritik der Methode, auf welcher er mich „herumreiten“ *) lässt; statt aber

*) Ich kann dieses edle Ross Herrn Strauch bestens empfehlen; wer es zu führen versteht, kommt damit eben so rasch als sicher vom

zu zeigen, worin ihre Prinzipien falsch sein sollen, was dem grossen Scharfsinne des Rezensenten gewiss sehr leicht geworden wäre, stellt er mit selbstgefälliger Apodiktizität, aber ohne Beweis, eine Ansicht hin, die mit dem Argumente anfängt, dass der Begriff der unendlichen Reihe der allgemeinere und der der endlichen der speziellere sei, woraus er dann ableiten will, dass man erst die unendlichen und dann die endlichen Reihen behandeln müsse. Hierauf ist zu antworten, dass bloss logische Distinktionen uns für die Mathematik sehr wenig helfen können, denn die letztere ist keine Wissenschaft aus blossen Begriffen wie die Philosophie, sondern aus Begriffen und Anschauungen, die gerade ihr Fundament ausmachen, was ein gewisser Kant in seiner Kritik der Vernunft zuerst nachgewiesen hat. Die Scheu, welche manche Mathematiker vor der Einmischung philosophischer Betrachtungen in ihre Wissenschaft haben (und in gewisser Hinsicht mit vollem Rechte) ist nichts als das dunkle Gefühl dieser Wahrheit und der daraus entspringenden Nichtigkeit des Schliessens aus blossen Begriffen. Man combinire z. B. die Begriffe „zwei", „Punkt" und „Gerade" so viel man wolle, und man wird niemals den Satz, dass die Gerade zwischen zwei Punkten der kürzeste Weg ist, herausbringen; ganz ebenso geht es in der Arithmetik, nur dass hier die Anschaulichkeit eine schematische und nicht constructive ist. Ginge die Sache bloss logisch zu, so müsste man zuerst die Theorie des Vielecks in der Euklideischen Geometrie entwickeln, da Vieleck der allgemeine, Viereck, Dreieck etc. der besondere Begriff ist; aber dergleichen wird sich kein vernünftiger Mensch einfallen lassen. Und so ist der Grund des Herrn Strauch völlig nichtssagend für die Theorie der Reihen. So wie man aber immer vom Einfacheren zum Complicirteren fortschreitet, so ist es auch natürlich, erst endliche und dann unendliche Reihen zu betrachten. Diess wird aber sogar nothwendig, wenn wir den Charakter des Mathematisch-Unendlichen näher besehen. Es ist diess kein Fertiges, Abgeschlossenes oder Absolutes, sondern ein Unvollendbares, und wir stossen darauf, sobald wir bemerken, dass irgend eine Operation sich soweit fortsetzen lässt, als es nur verlangt wird. So entsteht uns die unendliche Zahlenreihe aus der successiven Addition der Einheit und ebenso die unendliche Reihe aus der endlichen.

Nro. 5. Auch Inkonsequenz wirft mir mein weiser Rezensent vor, indem er bemerkt, dass ich einerseits gegen die Methode der unbestimmten Coeffizienten aufgetreten sei, aber selbst von ihr beim Binomialtheorem für ganze positive Exponenten Gebrauch gemacht habe. Nun ist aber doch wohl einiger Unterschied darin, ob man vorher bewiesen hat, es sei eine Funktion $f(x)$ von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Mx^m$, oder ob man das so ins Blaue hinein annimmt. Ueberall, wo man das Erste thun kann, habe ich gar nichts gegen jene Methode und wende sie selbst sehr gern an, wie z. B. Bd. IV. des Archivs. Nro. XL.; aber ein solches Verfahren nennt man gewöhnlich gar nicht die Methode der unbestimmten Coeffizienten und nur Herr Strauch braucht diesen

---

Flecke und das ist heut zu Tage, wo Alles geschwind gehen soll, jedenfalls unendlich viel besser, als auf einem störrigen Esel hinterher zu humpeln oder wohl gar, wenn das Beest trotz aller Hiebe nicht weiter will, völlig sitzen zu bleiben.

Digitized by Google

Namen, um auch hier nach seiner hämischen Weise einen Grund zum Tadeln finden zu können. Will man aber Funktionen, von denen man gleich anfangs beweisen kann, dass sie keine algebraischen, rationalen und ganzen sind *), nach dieser Methode in Reihen verwandeln, so ist 1) der Anfang der Rechnung eine Hypothese und 2) weiss man im Voraus, dass die Reihe unendlich werden muss; nun sind aber nur convergente Reihen einer bestimmten Grösse gleich, man setzt aber doch die Funktion der Reihe gleich und folglich hat man ausser der ersten Hypothese noch die zweite der Convergenz gemacht. Was dabei herauskommen kann, will ich wieder an einem Beispiele zeigen. Setzt man

$$\sec z = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + A_6 z^6 + \ldots,$$

so findet man leicht durch Multiplikation mit $\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots$, dass

$$\sec z = 1 + \frac{B_2}{1.2} z^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4} z^4 + \ldots$$

ist, wobei B_2, B_4, B_6 etc. gewisse Coeffizienten bedeuten, deren Bildungsgesetz nicht abzusehen ist. Ebendesswegen kann man auch die Bedingungen der Convergenz nicht angeben. Nun könnte man folgenden Weg zur Bestimmung von B_2, B_4 etc. einschlagen. Man setze ux für z und multiplizire beiderseits mit $\cos ux$, so wird

$$1 = \cos ux + \frac{B_2 u^2}{1.2} x^2 \cos ux + \frac{B_4 u^4}{1.2.3.4} x^4 \cos ux + \ldots,$$

und durch Multiplikation mit $\frac{\partial x}{1+x^2}$ und Integration zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+x^2}\,\partial x + \frac{B_2 u^2}{1.2} \int_0^\infty \frac{x^2 \cos ux}{1+x^2}\,\partial x + \ldots$$

Die Werthe sämmtlicher Integrale finden sich nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n} \cos ux}{1+x^2}\,\partial x = (-1)^n \frac{\pi}{2} e^{-u},$$

---

*) Als Probe solcher Beweise sehe man den Folgenden. Wäre $\sin x$ eine ganze rationale und algebraische Funktion des $m$ten Grades, so müsste wegen der Gleichung $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ auch $\cos 2x$ und ebenso $\cos x$ eine solche sein aber des $(2m)$ten Grades. Andererseits ist $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, wo nach dem Vorigen die rechte Seite eine Funktion des $(3m)$ten Grades sein muss, während die linke Seite wie $\sin x$ selbst bloss vom $m$ten Grade ist. Da nun für alle mögliche x keine Gleichung zwischen ganzen rationalen und algebraischen Funktionen verschiedener Grade bestehen kann, so folgt daraus die Unrichtigkeit der Voraussetzung. Wenn sich also $\sin x$ wirklich in eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ verwandeln lassen sollte, so kann diese Reihe keinenfalls eine endliche sein.

Digitized by Google

die sich aus Formel (1) durch $2n$malige Differenziation nach u ergiebt, und so wird

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} e^{-u} - \frac{B_2 u^2}{1.2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-u} + \frac{B_4 u^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-u} - \ldots,$$

oder durch Hebung von $\frac{\pi}{2}$ und Multiplikation mit e^u:

$$e^u = 1 - \frac{B_2}{1.2} u^2 + \frac{B_4}{1.2.3.4} u^4 - \ldots,$$

woraus lauter Absurditäten folgen, wenn man für e^u die gleichgeltende Reihe setzt.

Nro. 6. Ich habe in mein Buch Manches von Cauchy aufgenommen, was ich nicht anders machen konnte oder wollte, wenn mir die Darstellung dieses Meisters allen Ansprüchen zu genügen schien. Herr Strauch schämt sich nicht, diess Abschreiberei zu nennen! Da ist wohl auch der ein Abschreiber, der in sein Lehrbuch der Geometrie Euklids Beweis vom Magister Matheseos aufnimmt, weil er ihn für den besten hält? Das sonderbarste an der Sache ist aber, dass Manches, wie z. B. die Auflösung der Gleichungen $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $f(x)f(y)=f(x+y)$ u. m. A., sich schlechterdings nur auf eine einzige Art bewerkstelligen lässt, wenn man die Aufgabe nicht auf die Integration einer Differenzialgleichung bringen will. Uebrigens wird man in der Darstellungsweise immer noch nicht unbedeutende Differenzen zwischen Cauchy's Buche und dem meinigen bemerken.

Nro. 7. In der Vorrede hatte ich gesagt, dass ich analytischen Betrachtungen gern die entsprechenden geometrischen an die Seite stelle und dass mich schon eine kurze Erfahrung von der Zweckmässigkeit dieser Weise belehrt habe. Herr Strauch bemerkt hierauf, diess hätte ich mir nicht erst von der Erfahrung sagen zu lassen nöthig gehabt, ich hätte es auch aus guten Büchern lernen können. Allerdings gelehrter Mann; aber ich habe gar nicht gethan, als sei jene Methode meine Erfindung und es ist Jedermann erlaubt seine eigene Erfahrung anzuführen. Herr Strauch mäkelt weiter, diess rechtfertige die Aufnahme geometrischer Betrachtungen in ein System der Analysis nicht; sehr wahr weiser Daniel, aber ich habe gar kein sogenanntes System, sondern einen Leitfaden für akademische Vorlesungen schreiben wollen.

Nro. 8. Ich komme nun an diejenige Partie der fraglichen Rezension, in welcher die grobe Unwissenheit ihres Verfassers am auffallendsten hervortritt. Ich hatte nämlich gelegentlich daran erinnert, dass man sich hüten müsse, $\frac{1}{2} l(z^2)$ und lz für identische Funktionen für z anzusehen und dazu bemerkt, dass diess auch für die Integralrechnung von einiger Wichtigkeit sei; da hat nun der eminente Scharfsinn des Herrn Strauch sogleich errathen, dass meine Bemerkung auf die im 6ten Theile des Archivs S. 326. diskutirte Frage geht, obgleich der genannte Aufsatz später geschrieben und gedruckt worden ist, als die fragliche Stelle meines Buches.

Digitized by Google

Ich will mit meinem Herrn Rezensenten nicht darüber rechten, dass er die Berichtigung, die er über einen Journalartikel geben zu können glaubt, an einer Stelle giebt, wo sie gar nicht hingehört, während ihm das Archiv eben so gut offen stand wie mir, ich will mich hier bloss an der Sache halten. Der Herr Herausgeber des Archivs hat bekanntlich schon 1838 erinnert, dass es falsch sei $\int \frac{\partial x}{x} = lx + \text{Const}$ zu setzen und dass es heissen muss $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l(x^2)$; ich habe wiederholt auf die Richtigkeit dieser Bemerkung aufmerksam gemacht, wobei ich den Urheber derselben nicht verschwiegen habe (z. B. Archiv. Thl. V. S. 388.), am allerwenigsten habe ich dieselbe als eine „neue Entdeckung" von mir „ausposaunt", wie Herr Strauch frech genug ist, mir nachzusagen. Unter der Anwendung der zweiten Formel erhält man z. B.

$$\int_{-2}^{+3} \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2} l(9) - \tfrac{1}{2} l(4) = l(\tfrac{3}{2}).$$

Herr Strauch traut seinen Augen kaum, wenn er sieht, dass die Integrale

$$\int_{-2}^{+3} \frac{\partial x}{x} \text{ und } \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x}$$

gleiche Werthe haben sollen trotz der verschiedenen Integrationsgränzen. Durch diese höchst komische Verwunderung kündigt sich der grundgelehrte Herr Kritikus gleich als Neuling im Felde bestimmter Integrale an; wenn ihn Erscheinungen der Art so verwundern, so wird er wohl in dieser Branche aus der Verwunderung gar nicht herauskommen; z. B. ist

$$\int_0^{\pi} \sin x \, \partial x = \int_0^{3\pi} \sin x \, \partial x = \int_0^{5\pi} \sin x \, \partial x \ldots$$

gewiss noch viel paradoxer als das Obige. Das einzig Richtige, was Herr Strauch vorbringt, ist die Consequenz: wenn die obige Gleichung bestehen soll, so muss auch sein

$$\int_{-2}^{+2} \frac{\partial x}{x} + \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x} = \int_{+2}^{+3} \frac{\partial x}{x}, \text{ also } \int_{-2}^{+2} \frac{\partial x}{x} = 0.$$

Dass nun wirklich ganz allgemein

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial x}{x} = 0$$

ist, will ich Herrn Strauch hier auf doppelte Art beweisen.

A. Geometrischer Beweis. Vielleicht hat Herr Strauch irgendwo einmal etwas davon gehört, dass wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve bedeutet, das bestimmte Integral

$$\int_a^{\beta} f(x) \, \partial x$$

Digitized by Google

nicht Anderes als die Fläche ist, welche von der Curve, den zu $x=\alpha$, $x=\beta$ gehörenden Ordinaten $f(\alpha)$, $f(\beta)$ und dem Stücke $\beta-\alpha$ der Abscissenachse begränzt wird. In unserem Falle ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind und die Fläche, welche zwischen den zu $x=-a$ und $x=+a$ gehörenden Ordinaten enthalten ist, besteht aus zwei congruenten Theilen, von denen der eine über, der andere unter der Abscissenachse liegt, und mithin dem Zeichen nach einander entgegengesetzt sind. Daraus folgt, dass jene Fläche $=0$ ist, während nach Herrn Strauch ihr Werth $=l(a)-l(-a)=l(-1)$ sein müsste, so dass die Fläche einer reellen Curve imaginär ausfiele! Es ist wirklich gut, dass die Polizei nicht Integralrechnung versteht; es wäre sonst mindestens zweifelhaft, ob sie Herrn Strauch noch frei herumlaufen liesse.

B. Analytischer Beweis. Es ist

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{x}=\int_{-a}^{0}\frac{\partial x}{x}+\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{x}.$$

Man setze im ersten Integrale $x=-z$, so wird $z=0$ und $z=+a$, wenn $x=0$ und $x=-a$ geworden ist, und man hat folglich wegen $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial z}{z}$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{x}=\int_{a}^{0}\frac{\partial z}{z}+\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{x}=-\int_{0}^{a}\frac{\partial z}{z}+\int_{0}^{a}\frac{\partial z}{z},$$

und der Hauptwerth dieser Differenz ist Null, aber keinenfalls imaginär. — Herr Strauch sagt, es käme Alles auf die Werthe der durch die Integration hereingekommenen willkürlichen Constanten an; armer Herr Strauch, wissen Sie denn nicht, dass in bestimmten Integralen (wie die obigen sämmtlich sind) auf die Integrationskonstanten gar nichts ankommt, weil sie durch Einführung der Gränzen weggeschafft werden? Das ist ja ebendter Grund der Benennung „bestimmtes" Integral. Am Ende verwundert sich Herr Strauch noch einmal und zwar darüber, dass ich Dinge wie die oben bewiesenen behaupte, trotz dem, dass ich ein Buch über bestimmte Integrale geschrieben habe. Aber eben desswegen, weil ich mich mit diesem interessanten Gegenstande viel beschäftigt habe, weiss ich mich vor Fehlern zu hüten, in die man bei einer Unwissenheit wie die meines Gegners nothwendig verfallen muss.

Schlusswort *).

Hiermit glaube ich hinreichend nachgewiesen zu haben, dass die Vorwürfe, welche mir Herr Strauch macht, entweder auf einer gänzlichen Entstellung von Thatsachen oder auf unbegreiflicher Ignoranz beruhen; einem solchen Verfahren, dessen richtige Bezeichnung ich dem Leser überlasse, gegenüber, halte ich es nicht für der Mühe werth, etwaigen neuen Anfeindungen auf diesem

*) Habe ich auch von Herrn Strauch gelernt.

Digitized by Google

Wege entgegen zu treten. Es bestimmt mich hierzu auch noch die fruchtlose Mühe, welche es kostet, sich durch den ganz undeutschen und holprigen Jargon des Herrn Rezensenten durchzuarbeiten *). Wenn der geistreiche Franzose mit seinem „le style c'est l'homme" Recht hat, welche Vorstellung muss man sich dann von Herrn Strauch machen!

Jena, am 15. Februar 1846.

Schlömilch.

Geometrie.

Mann: Grundzüge eines Systems planimetrischer Aufgaben. Nürnberg. 1846. 7½ Ggr.

Ueber die Rectification der Peripherie des Kreises. Von Nicolai Nawrotzki, Doctor der Philosophie der Universität zu Leipzig, der Kaiserlich Russischen Akademie der Wissenschaften und mehrerer russischen und ausländischen gelehrten Gesellschaften Mitglied. Hamburg.

Diese mit einer sehr pomphaften Vorrede versehene im Ganzen nur 11 Seiten umfassende Schrift enthält weiter nichts als eine annähernde Bestimmung der Peripherie eines Kreises aus seinem Halbmesser und eine annähernde Bestimmung des Durchmessers aus der Peripherie durch Construction. Wenn auch bekanntlich in neuerer Zeit mehrere dergleichen annähernde Auflösungen wenigstens des ersten der beiden in Rede stehenden Probleme gegeben worden sind, so wollen wir doch die von dem Verfasser für dieses erste Problem gegebene Auflösung hier in der Kürze mittheilen, ersuchen aber den Leser, sich die Figur selbst zu construiren, was keine Schwierigkeit haben wird.

Um die Peripherie eines aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO beschriebenen Kreises zu finden, ziehe man die beiden auf einander senkrechten Durchmesser AB und CD. Hierauf schneide man auf dem Quadranten AC von A aus auf bekannte Weise den sechsten Theil AE der Peripherie ab, ziehe durch O und E den Halbmesser OE, errichte in C auf den Durchmesser CD ein Perpendikel, welches sich mit dem verlängerten Halbmesser OE in F schneidet, schneide auf diesem Perpendikel von dem

---

*) Ein paar Stylproben: in Nro. 2. findet sich bei der Inhaltsangabe meines Buches der Passus: „es kommt" oder „dann kommt" nicht weniger als zehnmal hintereinander; nach der Ueberschrift „Schlusswort" heisst es: „Hiermit soll nun geschlossen werden" — ich möchte wissen, ob Herr Strauch vielleich eine seiner geistreichen Rezensionen mit einem Schlusswort angefangen hat.

Digitized by Google

Punkte F aus nach der Seite von C hin eine dem dreifachen Halbmesser des gegebenen Kreises gleiche Linie FG ab, und ziehe dann die Linie DG, so ist diese Linie die gesuchte halbe Peripherie des gegebenen Kreises.

Es ist nämlich CF offenbar die halbe Seite eines um den Kreis beschriebenen regulären Sechsecks, also, wenn wir den Halbmesser des gegebenen Kreises als Einheit annehmen, $CF = \frac{1}{\sqrt{3}}$, folglich $CG = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, und daher

$$DG^2 = CD^2 + CG^2 = 4 + (3 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2$$

$$= 4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3},$$

also

$$DG = \sqrt{\{4 + (3 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2\}} = \sqrt{(\frac{40}{3} - 2\sqrt{3})},$$

woraus sich nach der in der Schrift angestellten Rechnung, die wir auch, jedoch nur oberflächlich mit Hülfe der Logarithmen, geprüft und richtig befunden haben, $DG = 3{,}14152$, also eine Uebereinstimmung bis zur 5ten Decimalstelle mit der Ludolphischen Zahl ergiebt.

Diese Construction der Peripherie des Kreises, wenn man auch bekanntlich noch genauere hat, scheint sich uns durch ihre Leichtigkeit in der Ausführung zu empfehlen, und für den praktischen Gebrauch genau genug zu sein, weshalb wir sie hier in der Kürze mitgetheilt haben. Die in der Schrift gegebene Auflösung des umgekehrten Problems lässt sich ohne eine Figur nicht gut verständlich machen, und muss in ihr selbst nachgesehen werden.

Ob übrigens diese Schrift wirklich neu oder nur von Neuem in den Buchhandel gebracht worden ist, was wir zu vermuthen Grund zu haben glauben, lassen wir dahin gestellt sein. Eben so lassen wir es unentschieden, ob dieselbe nicht vielleicht eine, von einem der Mathematik ziemlich Unkundigen angefertigte blosse Uebersetzung aus der Nordischen Biene ist. Verschiedene falsch geschriebene Formeln, und Namen wie „Zeilon“! „Mecius“! u. dgl. lassen das letztere wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen. Als ein von den Braminen gefundenes Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie von einem höheren Alter wie das Archimedische Verhältniss wird S. 8. das bis zur vierten Decimalstelle richtig sein sollende Verhältniss 1250:3927 angegeben.

Bloss um die obige annähernde Construction der Peripherie, die sich, wie schon erinnert, uns namentlich durch ihre Leichtigkeit in der Ausführung für den praktischen Gebrauch zu empfehlen scheint, gelegentlich mitzutheilen, haben wir uns bei dieser sonst ganz unbedeutenden Schrift hier so lange verweilt, und bitten deshalb die Leser des Literarischen Berichts um Verzeihung.

Mechanik.

Lehrbuch der Elementar-Mechanik für technische und militärische Lehranstalten, höhere Bürgerschulen und zum Selbststudium. Von Dr. G. W. v. Langsdorff, Professor an der Grossherzogl. höheren Bürgerschule zu Mannheim. Mit 8 Figurentafeln. Stuttgart. 1845. 8. 21 ggr.

Diese schon vorläufig im Literarischen Bericht Nro. XXIV. S. 362. angezeigte Schrift ist zufällig erst jetzt in unsere Hände gelangt, verdient aber wegen ihrer allerdings in mehreren Beziehungen eigenthümlichen Fassung eine etwas ausführlichere Anzeige. Der Herr Verfasser sagt in der Vorrede, dass ihn bei der Ausarbeitung dieses Lehrbuches, welches hauptsächlich zur Vorbereitung auf die Maschinenlehre bestimmt sei, die Absicht geleitet habe, zur allgemeineren Verbreitung der in Deutschland noch viel zu wenig bekannten, für die Maschinenlehre so wichtigen, Principien der virtuellen Geschwindigkeiten und der lebendigen Kräfte das Seinige beizutragen. Die Behauptung, dass bei der Anwendung der allgemeinen Principien die Resultate nicht begriffen würden, weil ihre Entstehung und ihr Zusammenhang nicht zur Anschauung gelangten, könne er nicht als begründet anerkennen. Denn was den Zusammenhang der Resultate betreffe, so könne dieser im Gegentheil nur dadurch hervortreten, dass sie sich aus einem einzigen Princip ableiten lassen. Was aber die Anschaulichkeit ihrer Entstehung anbelange, so komme es nur darauf an, zum Princip selbst auf möglichst direktem und anschaulichem Wege zu führen. Diesen Zweck glaube er hinsichtlich des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten durch unmittelbare Ableitung des Parallelogramms der Drucke aus dem der Beschleunigungen und durch Anwendung des einfachen Hebels, und in Bezug auf das Princip der lebendigen Kräfte durch die Anwendung der relativen Drucke erreicht zu haben, deren man sich zwar schon vor langen Jahren (wenn auch in anderer Form und nicht unter besonderer Benennung) in einzelnen Fällen bedient habe, die aber später durch das D'Alembert'sche Princip gänzlich verdrängt, und auch in keinem Lehrbuche als Basis der Dynamik aufgestellt und consequent benutzt worden seien. Bei solcher Behandlungsweise erscheinen die Statik und Dynamik in einer natürlichen und deshalb der Fasslichkeit so günstigen Verbindung, dass alles Dunkele und Mehrdeutige verschwinde.

Die Ueberschriften der vier Hauptabschnitte sind folgende: Bewegung, Beschleunigende Kraft, Druck, Stoss, wozu noch zwei Anhänge über die Reibung und Steifigkeit der Seile und die Festigkeit kommen, wobei nicht unerwähnt bleiben darf, dass die Schrift durchaus nicht bloss auf die festen Körper eingeschränkt ist, sondern auch die tropfbaren und ausdehnsamen umfasst.

Digitized by Google

Wegen der allerdings eigenthümlichen Darstellung der Hauptlehren der Mechanik und der einfachen und deutlichen Behandlungsweise ist diese Schrift jedenfalls zu allgemeinerer Beachtung zu empfehlen, und zwar um so mehr, weil es wünschenswerth ist, dass die so höchst fruchtbare Anwendung der beiden mehrerwähnten allgemeinen mechanischen Principe, die, wie der Herr Verfasser ganz richtig bemerkt, unter der ziemlich grossen Anzahl solcher allgemeinen Principe, welche es in der Mechanik bekanntlich giebt, für die Maschinenlehre bei Weitem die wichtigsten sind, immer mehr Eingang und Aufnahme in den Unterricht finde.

Astronomie.

Neue Theorie der Mechanik des Himmels und Beweis der Unhaltbarkeit einer allgemeinen Gravitation. Von Fr. Buchholz. Berlin. 1845. 8. 15 Sgr.

Soll bei Schriften wie die vorliegende die Kritik etwas nutzen, so muss dieselbe nothwendig in einer Ausdehnung gegeben werden, für welche der Raum unserer Literarischen Berichte zu gering ist. Das Schriftchen umfasst nur 56 Seiten und von Mathematik ist begreiflicherweise darin nicht viel die Rede. Wir begnügen uns daher mit der blossen Anzeige seiner Existenz.

Jahn: über den neuen Planeten Asträa und den Biela'schen Kometen. Leipzig. 1846. 6½ gGr.

Uranus oder tägliche für Jedermann fassliche Uebersicht aller Himmelserscheinungen im Jahre 1846; Für die Zwecke der beobachtenden Astronomie, besonders aber auch für die Bedürfnisse aller Freunde des gestirnten Himmels bearbeitet und zusammengestellt von Ernst Schubert und Hugo von Rothkirch, und herausgegeben von Dr. P. H. L. von Boguslawski. Glogau. 1845. 8. 1 Rthlr. 15 Sgr.

Der Zweck dieses Astronomischen Jahrbuchs in einer noch nie dagewesenen Form, sagt der Herr Herausgeber in der Vorrede, ist:

1) Es soll Jédermann auf eine möglichst vollständige Weise in den Stand setzen, dem Gange derjenigen Hauptbegebenheiten am Himmel folgen zu können, welche entweder entschieden in das bürgerliche Leben eingreifen, ja selbst den Verkehr regeln, oder sonst die allgemeine Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen.

2) Es soll allen denen, welchen es um eine etwas genauere Bestimmung der Zeit zu thun ist, ohne dazu mit geeigneten

Digitized by Google

Instrumenten versehen zu sein, möglichst viele Gelegenheit bieten und mancherlei Mittel zeigen, sich zum öftern der Uhrzeit wenigstens bis auf eine Minute versichern zu können.

3) Es soll die nicht unbeträchtliche Anzahl mit Fernröhren versehener Liebhaber der Sternkunde zu jeder Zeit auf diejenigen Erscheinungen am Himmel aufmerksam machen, welche geeignet sind, ihr Interesse in Anspruch zu nehmen.

Wir halten dieses Unternehmen besonders für die vielen Liebhaber der Astronomie, welche es jetzt giebt, recht nützlich und wünschen demselben einen ungestörten Fortgang, fügen aber zugleich auch die Bitte an den Herrn Herausgeber hinzu, dafür Sorge zu tragen, dass jeder Jahrgang immer schon möglichst zeitig, wenigstens immer vor Anfang des betreffenden Jahres in die Hände des Publikums komme.

Born: Gnomonique graphique et analytique, ou l'Art de tracer les cadrans solaires. Paris. 1845. 3 Fr. 50 Cent.

Physik.

Leclercq: Note sur la formation de la glace dans les eaux courantes. Brux. 1845.

Quetelet: Sur le climat de la Belgique. 1. partie. Rayonnement solaire et températures de l'air et du sol. Brux. 1845.

Houzeau: Sur les étoiles filantes périodiques du mois d'août et en particulier sur leur apparition de 1842. Brux. 1845.

Vermischte Schriften.

Memorie di matematica e di fisica della societa italiana delle scienze residente in Modena. Modena. 1845.

Das treffliche Cambridge mathematical Journal, dessen Inhalt in den früheren Literarischen Berichten immer angezeigt worden ist, scheint von jetzt an unter dem folgenden etwas veränderten Titel erscheinen zu sollen:

Digitized by Google

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College. Cambridge.

Nro. I. und Nro. II, die zusammen in einem Hefte ausgegeben worden sind (Double Number, Price 5 s.), und Nro. III. liegen uns vor und haben folgenden Inhalt:

General Theorems on Multiple Integrals. By R. L. Ellis. — On the Equation of Laplace's Functions. By G. Boole. — On Formulae relative to Spherical Coordinates. By W. Thomson. — On the Variation of Elements in the Planetary Theory. By H. Blackburn. — On Symbolical Geometry. By Sir W. R. Hamilton. — On the Quadrature of Surfaces of the Second Order. By J. H. Jellet. — On the Polar Equation of a Chord to a Conic Section. By P. Frost. — On the Reduction of $\frac{du}{\sqrt{U}}$, when U is a Function of the Fourth Order. By A. Cayley. — Note on the Maxima and Minima of Functions of Three Variables. By A. Cayley. — On the Mathematical Theory of Electricity. Part I. On the Elementary Laws of Statical Electricity. By W. Thomson (Uebersetzung aus Liouville's Journal. Thl. X. S. 209.). — Mathematical Notes. (Nro. III. will published on the 1st of March.)

Nro. III. On Homogeneous Functions of the Third Order with Three Variables. By A. Cayley. — On Linear Transformations. By A. Cayley. — Investigation of Properties of Hyperbola. By E. R. Turner. — Note on the Rings and Brushes in the Spectra produced by Biaxal Crystals. By W. Thomson. — On the Principal Axes of a Rigid Body. By W. Thomson. — On Circular Sections of the Locus of the General Equation of the Second Order. By P. Frost. — On Symbolical Geometry. By Sir W. R. Hamilton. (Nro. IV. will be published on the 1st of May.)

Wir wünschen sehr, dass diese Zeitschrift auch in Deutschland immer bekannter werde und allgemeinere Verbreitung gewinne, und werden uns noch mehr als früher bemühen, dazu durch recht genaue und möglichst zeitige Anzeige des Inhalts der einzelnen erscheinenden Hefte das Unsrige nach Kräften beizutragen.

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles, par A. Quetelet, Directeur de cet établissement etc. 1846. 13e annee. Bruxelles. 1845. 12. 22 Sgr. 6 Pf.

Dieses „Annuaire" enthält ausser einer kleinen astronomischen Ephemeride eine so grosse Menge für die praktische Mathematik und namentlich auch für die Physik nützlicher Tafeln, dass kaum irgend etwas von Wichtigkeit vermisst werden dürfte, weshalb wir glauben, dass dasselbe bei seinem überaus geringen Preise nicht genug empfohlen werden kann, indem es für jeden Mathematiker und Physiker ein höchst nützliches Taschenbuch bildet. Auf die astronomische Ephemeride, welche alles für das gemeine Leben Wichtige und Nothwendige enthält, und zugleich mehr als vollständig die Zwecke eines gewöhnlichen Kalenders erfüllt, folgen Tafeln zur Vergleichung der Maasse, Münzen und

Gewichte verschiedener Länder unter, und deren Reduction auf einander; dann Dichtigkeiten der Gase und Dämpfe, der tropfbaren und festen Körper; Ausdehnung der festen Körper durch die Wärme; Expansivkraft der Wasserdämpfe; Wärmekraft verschiedener brennbarer Stoffe; Schmelzungspunkte; Kochpunkte; Wärmestrahlung; Tafeln zur Reduction der Barometerstände; Vergleichung der Thermometerscalen; Psychrometertafeln; Tafeln zur Bestimmung der Höhenunterschiede mittelst des Barometers (es sind die Tafeln von Oltmanns); Tafeln zur Bestimmung des Gewichts des Hornviehs aus blossen Messungen desselben ohne Abwägung (die englische und die französische Methode und eine neue von Herrn Quetelet angegebene Methode, die aus einer Reihe neuer in Gegenwart einer dazu ernannten Kommission angestellter Versuche abgeleitet worden ist). Nun folgt eine grosse Anzahl statistischer Tafeln, die zwar sich zunächst auf Belgien beziehen, und gewiss eine höchst vortheilhafte Meinung von diesem jungen Königreiche einzuflössen geeignet sind, aber doch auch viel allgemein Interessantes und Anwendbares enthalten; und den Beschluss machen die Meteorologie und die Physik der Erde, mit Einschluss der magnetischen Declination, Inclination und Intensität.

Sollte diese, weil die Beschränktheit des Raums eine andere uns hier nicht gestattet, freilich nur sehr oberflächliche Angabe des reichen Inhalts dieses trefflichen „Annuaire“ nicht unser obiges Urtheil und unsere Empfehlung zu allgemeinerem Gebrauch nicht vollständig zu rechtfertigen hinreichend sein?

Digitized by Google

XXX.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bessel's Tod.

(Aus den Astronomischen Nachrichten. Nro. 556. entlehnt.)

Am 17. März Abends zwischen 6 und 7 Uhr starb Friedrich Wilhelm Bessel. Seine langen und schweren Leiden schloss ein ruhiger schmerzloser Tod. Er schlief von Liebe bewacht sanft ein, um hier nicht wieder zu erwachen.

Die letzten Tage seines Lebens wurden noch durch eine Freude erheitert, welche die Gnade Seiner Majestät des Königs von Preussen ihm bereitet hatte. Der Erhabene Monarch liess sich für Bessel in ganzer Figur, im einfachen Ueberrocke an Seinen Schreibtisch, wie von der Arbeit aufstehend, gelehnt, durch Professor Krüger malen. Dies Bild, das ein mehr als gnädiges Handschreiben ankündigte, kam am 2. März auf der Sternwarte an, und war von der Zeit bis zu seinem Tode Bessel's einzige Freude. Er dictirte am 7. März seiner Tochter folgenden hier wörtlich abgedruckten Brief an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten:

„Das Bild ist ein Meisterwerk, prachtvoll, ein wahrhaft Königliches Geschenk! Der Gedanke, der ihm seine Entstehung gegeben hat, macht es zu einem geschichtlichen Denkmale, welches dem Herzen jedes Preussen unendlich theuer sein muss. Vermöchte etwas diesen zwiefachen Werth desselben noch zu steigern und das Glück, welches ich in seinem Besitze finde zu erhöhen, so könnte dies nur das Allerhöchste Handschreiben sein, durch welches der Monarch, mein Gnädigster Herr, mir zehn Tage vor der Ankunft des Bildes seine baldige Absendung ankündigte. Ich würde, selbst in den gesundesten Tagen, vergebens versuchen,

Digitized by Google

Ihnen die Tiefe des Eindrucks zu schildern, welchen mein jetziger Besitz auf mich gemacht hat. Wir sind aber alte Freunde, die sich gegenseitig durch und durch kennen, und deren Einer, auch ohne besondere Schilderung, wohl weiss wie der Andere denkt."

Ein Brief seiner Tochter, des Fräuleins Johanna Bessel, an den Herausgeber vom 18. März zeigt, dass die letzten Blicke des Sterbenden noch auf diesem Bilde ruheten.

„Schon seit mehreren Tagen, besonders seit Sonntag, hatte mein Vater sich sehr verändert. Der Pulsschlag war kaum noch bemerkbar, und er lag fast fortwährend in einem Schlummer, in dem er endlich entschlief. Mutter und ich sassen allein an seinem Bette und freuten uns seines ruhigen und freien Athmens während des Schlafes. Dies Athmen wurde allmählich immer leiser, bis ich es zuletzt nur angestrengt lauschend noch vernehmen konnte. Einmal hob er dann noch den Kopf — und der letzte Hauch war entflohen. Es war ein schöner sanfter Tod, wie er ihn sich immer gewünscht hatte. Wir sassen noch lange vor seinem Bette, ohne es zu wagen, die heilige Stille durch Laut oder Bewegung zu unterbrechen.

Er behielt bis zu seinem Ende sein volles Bewusstsein. Nachmittags sprach er noch den Dr. Motherby, der ihn besuchte, und meinen Schwager, der ihm das Bild des Königs wieder vor das Bett stellte, was ihn innig erquickte und erfreuete. Er hatte sich in den letzten Tagen davon getrennt, damit Jedermann es sehen könne, und es machte ihm grosse Freude, wenn wir ihm erzählten, wie es Alle entzückte. Wäre für ihn Hülfe möglich gewesen, die Freude über das Geschenk des Königs hätte ihm geholfen, das, wie er zu sagen pflegte, den Menschen noch an das Leben zu fesseln im Stande sei. Er hoffte immer noch dem Könige selbst für das liebe Bild danken zu können, aber er war schon zu schwach. Der Brief an Sie, den er mir am 7. März dictirte, war sein letzter. Er wird Ihnen ein theures Andenken sein."

Der Herausgeber, der auf das Glück der vielen Jahre, die er mit Bessel in der engsten freundschaftlichen Verbindung durchlebte, wehmüthig zurücksieht, bewahrt diesen Brief und den letzten noch von Bessels eigener Hand am 22. Februar, schon auf dem Sterbelager geschriebenen Brief unter seinen theuersten Besitzthümern. S.

Der obigen Anzeige des verehrten Herrn Herausgebers der Astronomischen Nachrichten freue ich mich noch hinzufügeu zu können, dass nach einer mir gemachten freundschaftlichen Mittheilung Herr Professor Dr. Anger in Danzig, welcher mit Bessel in einer langjährigen unmittelbaren Verbindung gestanden hat, mit der Abfassung einer Gedächtnissrede auf diesen grossen Astronomen für die naturforschende Gesellschaft in Danzig beschäftigt ist, die er demnächst bekannt machen und sich dadurch gewiss den lebhaftesten Dank eines jeden Mathematikers erwerben wird. Denn wer auch nicht Astronom von Fach ist, muss doch an den Lebensschicksalen und dem Bildungsgange eines so hervorragenden, in

Digitized by Google

der Geschichte der Wissenschaft einzig dastehenden Geistes, wie Bessel war, das grösste Interesse nehmen, und sich an einem Bilde wahrhaft erwärmen, durch dessen Anschauung ihm klar werden wird, dass mit glänzenden Eigenschaften des Geistes und ausgebreiteter Gelehrsamkeit auch sehr wohl grosse Tugenden des Herzens verbunden sein können, und dass bei unausgesetzen tiefen wissenschaftlichen Studien doch auch das rein Menschliche im Menschen stets erhalten werden kann. Gr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Compendium der elementaren Mathematik, enthaltend die Geometrie, Arithmetik und ebene Trigonometrie. Zum Gebrauche beim Unterrichte von Dr. A. Kramer, Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Nordhausen. Mit eingedruckten Figuren. Nordhausen. 1846. 8. 25 Sgr.

Dieses Schulbuch enthält die Lehren der Planimetrie, Stereometrie, Arithmetik und ebenen Trigonometrie nach der so eben angegebenen Ordnung in dem Umfange, in welchem sie gegenwärtig auf den preussischen Gymnasien vorgetragen zu werden pflegen. Zu der von dem gewöhnlichen Gebrauche abweichenden Anordnung des Stoffs wird dem Herrn Verfasser wahrscheinlich die Art und Weise, wie er von dem Buche bei seinem Unterrichte Gebrauch macht, Veranlassung gegeben haben. Ob indess er nicht vielleicht besser gethan und dem Buche einen allgemeineren Eingang verschafft haben würde, wenn er dasselbe in mehrere kleinere, einzeln verkäufliche Abtheilungen getheilt und dadurch einem jeden Lehrer die Freiheit gelassen hätte, von demselben nach Belieben Gebrauch zu machen, wollen wir dahingestellt sein lassen. Viele Eigenthümlichkeiten irgend einer Art, die eine besondere Hervorhebung verdienten, sind uns in demselben nicht entgegengetreten; es ist aber einfach, klar und deutlich abgefasst, und entspricht in diesen Beziehungen den an ein Schulbuch zu machenden Anforderungen recht wohl. Dass der Theorie der Parallellinien ein besonderer dieser Lehre eigenthümlicher Grundsatz, ohne den man nun einmal in derselben nicht wird auskommen können, zum Grunde gelegt und deutlich hervorgehoben, nicht versteckt in die Beweise der Lehrsätze, wie dies nicht selten geschieht, eingewebt worden ist, verdient Anerkennung. Nur ist nicht recht abzusehen, warum der Herr Verfasser seinen Grundsatz 75. S. 10.:

> „Zwei einander schneidende Gerade können nicht einer und derselben dritten Geraden parallel sein."

nicht lieber directer auf folgende Weise:

> Zwei einer und derselben dritten Geraden parallele Gerade sind einander selbst parallel

ausgedrückt hat; denn beides kommt doch im Wesentlichen auf dasselbe hinaus, und der zweite directe Satz scheint uns nament-

Digitized by Google

lich für den ersten geometrischen Unterricht zweckmässiger als der erste mehr indirecte Satz zu sein. Der gute Druck und die sehr saubern in den Text eingedruckten Holzschnitte gereichen dem Buche gleichfalls zur Empfehlung.

Arithmetik.

Egen, P. N. C.: die allgemeine Arithmetik. I. Thl. 3te verb. Aufl. 1846. 2 Rthlr.

Algebraische Aufgaben aus dem ganzen Gebiet der reinen Mathematik mit Angabe der Resultate. Als Ergänzung zu Meier Hirsch Sammlung von Beispielen etc., so wie auch zum selbstständigen Gebrauch bearbeitet von Dr. D. C. L. Lehmus, Professor der Mathematik an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem Haupt-Bergwerks-Eleveninstitut in Berlin. Berlin. 1846. 8. 18 Sgr.

Bekanntlich enthalten die geometrischen Aufgaben von Meier Hirsch nicht bloss die Resultate, sondern die vollständigen Auflösungen. Dieser Umstand, meint der Herr Verfasser in der Vorrede, sei der Grund, dass die geometrischen Aufgaben von Meier Hirsch weit weniger Beifall als die algebraischen gefunden hätten. Dadurch sei er zur Herausgabe dieser bloss die Resultate ohne die Lösungen enthaltenden Sammlung algebraischer und geometrischer Aufgaben veranlasst worden, deren Inhalt folgender ist. *Erste Abtheilung.* Aufgaben aus der Arithmetik. I. Aufgaben aus der Arithmetik ohne Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nro. 1—100. II. Aufgaben aus der Arithmetik mit Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nro. 1.—127. *Zweite Abtheilung.* Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten führen. III. Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten zu ordnen. Nro. 1—12. IV. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen vom ersten Grade führen. Nro. 1—120. V. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen vom zweiten Grade führen. Nro. 1—50. VI. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen von höheren Graden führen. Nro. 1—22. *Dritte Abtheilung.* Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen mit mehr Unbekannten führen. VII. Vermischte ohne Anordnung nach der Anzahl der Unbekannten und dem Grade der entstehenden Endgleichung. Nro. 1—49. VIII. Anwendungen des Satzes von den unbestimmten Coefficienten. Nro. 1—18. IX. Unbestimmte Aufgaben. Nro. 1—27. *Vierte Abtheilung.* Algebraische Aufgaben aus den geometrischen Wissenschaften. X. Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Nro. 1—47. XI. Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Nro. 1—68. XII. Aufgaben aus der Körperlehre und sphärischen Trigonometrie. Nro. 1—46. XIII. Aufgaben aus der Coordinaten-Theorie und den Kegelschnitten. Nro. 1—32. *Anhang.* Aufgaben, welche auf transcendente Gleichungen führen. Nro. 1—14.

Digitized by Google

Eine Seite lässt diese Sammlung geometrischer Aufgaben, indem sie bloss die Resultate in Formeln angiebt, so gut wie ganz unberücksichtigt, nämlich die Herleitung geometrischer Constructionen aus den gefundenen algebraischen Ausdrücken, wozu Meier Hirsch allerdings Anleitung giebt, und die also hier ganz dem mündlichen Unterrichte anheim gestellt bleibt.

Neun mathematische Abhandlungen von Dr. Fr. Arndt, Gymnasiallehrer zu Stralsund. (Besonders abgedruckt aus Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band XXXI.). Berlin. 1846. 4.

Die Titel dieser Abhandlungen, die alle von dem Scharfsinne des Herrn Verfassers ein neues sehr erfreuliches Zeugniss ablegen, sind folgende: Ueber die Summirung der beiden Reihen

$$\gamma_0 - n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 - \ldots + (-1)^n\gamma_n,$$
$$\gamma_0 + n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \ldots + \gamma_n,$$

in welchen die Grössen γ willkührlich und die Coefficienten Binomialcoefficienten des ganzen Exponenten n sind, mittels höherer Differenzen und Summen. — Nova solutio problematis determinandi multitudinem numerorum, qui ad numerum aliquem sint primi eoque minores. — Entwickelung der Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes. — Ueber die Bernoullische Methode summirbare Reihen zu finden. — Nova methodus determinandi multitudinem radicum congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{M}$ aliaque ad hanc materiem spectantia. — Demonstratio duorum theorematum Gaussianis his generaliorum: I. Productum ex omnibus radicibus primitivis moduli imparis p unitati sec p. congruum est, excepto casu, in quo $p=3$. II. Summa omnium radicum primitivarum moduli primi imparis p est $\equiv 0$, quando $p-1$ per quadratum aliquod divisibilis est; quando vero per nullum quadratum divisibilis, summa est $\equiv \pm 1$, prout multitudo factorum ipsius $p-1$ primorum est par aut impar. — Demonstratio nova theorematis Wilsoniani a summo Gauss hoc modo generalius enunciati: Productum omnium numerorum ad numerum quemcunque M primorum eoque inferiorum unitati negativae aut positivae sec. M congruum est; et quidem negative sumenda est unitas, quando M potestas numeri primi imparis vel ejus duplum, vel denique 4, positive autem in omnibus casibus reliquis. — Disquisitiones de residuis cujusvis ordinis. — Bemerkungen über die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch. — Man sieht aus dieser Angabe des Inhalts, mit der wir uns der Beschränktheit des Raums wegen hier leider begnügen müssen, dass diese Abhandlungen des Interessanten nicht wenig darbieten.

Geometrie.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterrich von Dr. W. A. Wilde, Professor am Gymnasium zu Stargard. Dritter Band. Auch unter dem Titel:

Lehrbuch der Geometrie für den Schul- und Selbstunterricht. Erster Band. Die ebene Geometrie mit Einschluss der Trigonometrie. (Mit acht Figurentafeln.) Leipzig. 1846. 8. 25 Sgr.

Der erste Band dieses Lehrbuchs ist in Nro. XXIV. S. 357. des Literarischen Berichts angezeigt worden. Der Inhalt des vorliegenden ersten geometrischen Theils ist im Allgemeinen folgendender. Einleitung. *Longimetrie.* Erster Abschnitt. Lage gerader Linien in der Ebene. Zweiter Abschnitt. Zusammenhang unter den Linien und Winkeln der Figuren. Dritter Abschnitt. Constructionelle Aufgaben. Vierter Abschnitt. Zusammenhang unter den Linienverhältnissen und Winkeln der Figuren. Aehnlichkeit. Anhang zum vierten Abschnitt. (Transversalen. Harmonische Punkte. Anwendungen des Pythagorischen Satzes beim Dreieck und Viereck. Linien in und am Kreise. Verjüngter Maassstab. Vernier oder Nonius.). Fünfter Abschnitt. Aufgaben zum vierten Abschnitt. (Constructionen. Geometrisch-algebraische Aufgaben. Construction algebraischer Ausdrücke). *Planimetrie.* Sechster Abschnitt. Flächenlehre oder Planimetrie im engern Sinne. Siebenter Abschnitt. Aufgaben zum sechsten Abschnitt. *Trigonometrie.* Achter Abschnitt. Von den trigonometrischen Functionen (Goniometrie). Neunter Abschnitt. Trigonometrische Rechnungen.

So wie in dem ersten Bande ist auch in diesem zweiten ein sehr löbliches Streben nach systematischer Anordnung unverkennbar. Daneben enthält das Buch aber auch Anleitung und Stoff zu eignen Uebungen der Schüler genug, lässt die praktische Seite nicht ganz unberücksichtigt, und sucht auch, wie z. B. der Anhang zum vierten Abschnitte zeigt, die Erweiterungen, mit welchen die Geometrie in neuerer Zeit bereichert worden ist, für den Schulunterricht zu benutzen, ohne darin jedoch, wie es recht ist, zu weit zu gehen. Zugleich enthält der fünfte Abschnitt eine Anleitung zur analytischen Geometrie, so weit dieselbe in den Kreis des Schulunterrichts gehört, oder vielmehr eine Anleitung zur algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben, und zur Herleitung geometrischer Constructionen aus gefundenen algebraischen Ausdrücken, Alles in sehr einfacher, fasslicher, dabei aber den gerechten Anforderungen geometrischer Strenge genügender Weise, und in einer für den Schulunterricht jedenfalls vollkommen ausreichenden Vollständigkeit. Am wenigsten hat uns nach den Ansichten, die wir nun einmal über diesen vielbesprochenen Gegenstand haben und als hinreichend bekannt voraussetzen dürfen, die Behandlung der Lehre von den Parallelen angesprochen. Bei allen solchen Darstellungen wie die hier gegebene wird, wie es uns scheint, zu häufig an die blosse Anschauung apellirt. Stellt man aber einen dieser Lehre eigenthümlichen Grundsatz kurz, klar und bestimmt auf, und weiset die Schüler darauf hin, dass erstlich überhaupt gewisse nothwendige Axiome das eigentliche Fundament der gesammten Mathematik bilden, dass ferner die Lehre von den Parallelen, in welcher es auf Vergleichungen von Linien mit einander rücksichtlich der Gleichheit ihrer gegenseitigen Lage ankomme, mindestens ein ihr eigenthümliches Axiom nothwendig fordere, und leitet dann alles Uebrige aus diesem einen Axiome

Digitized by Google

durch folgerechte Schlüsse kurz, klar und bestimmt ab, so hat man, glauben wir, sein wissenshaftliches Gewissen gerettet, und alle Gelegenheit zu Einwürfen von Seiten der Schüler abgeschnitten. Mehr als das Vorhergehende wird sich in dieser Lehre wohl auch schwerlich jemals erreichen lassen, und es kommt nur darauf an, denjenigen Satz ausfindig zu machen, welcher am meisten auf den Namen eines Axioms Anspruch zu machen berechtigt ist. Keineswegs wollen wir aber dem Herrn Verfasser dieses Lehrbuchs hierdurch einen Vorwurf machen, dass er wenigstens nicht ganz denselben Ansichten gefolgt ist, da wir recht gut wissen, dass gerade bei diesem Gegenstande schwerlich jemals eine Uebereinstimmung der Ansichten zu erreichen sein, und der Herr Verfasser gewiss auch seiner Darstellung bei den Schülern den gehörigen Eingang zu verschaffen verstehen wird.

Joanet: annotation à la géométrie élémentaire de Legendre. 2. edit. Paris.

Fünf berühmte Fragen aus der Bildlehre. Vom Professor Dr. G. Paucker. Mitau. 1845. 8.

Die in dieser kleinen Schrift enthaltenen, mehr angedeuteten als ausgeführten Betrachtungen sind, wie der Herr Verfasser auf S. 13. sagt, einem Werke über die neuere Bildlehre (Geometrie) entnommen, zu dessen Herausgabe derselbe nur günstige Umstände erwartet. Der Inhalt dieses kleinen Vorläufers des grösseren Werkes ist in den von den gewöhnlichen häufig abweichenden Ausdrücken des Herrn Verfassers folgender: 1. Die Bildgleichung und Doppelbildung. 2. Der Doppelschnitt. 3. Der Verhältnissschnitt und Flächenschnitt. 4. Eine Fügung (Figur) in und um gegebene Fügungen zu beschreiben. 5. Eine Fügung um eine andere Fügung und in einen Abkreis (Kegelschnitt) zu beschreiben. — Die neuen durch Einfachheit sich auszeichnenden Behandlungen einiger der wichtigsten Sätze und Aufgaben der Geometrie, welche der Herr Verfasser in dieser Schrift andeutet, machen allerdings auf das angekündigte grössere Werk begierig. Ueber Nro. 5. sagt derselbe, dass er die hier gegebene ungemein einfache Auflösung im Winter 1844/45 gefunden habe, und bemerkt auf S. 14., um Missverständnissen vorzubeugen, „dass Herr Oberlehrer Seydewitz zu Heiligenstadt sich gleichzeitig mit derselben beschäftigt habe und durch seine scharfsinnigen Betrachtungen (Grunert Archiv für Mathematik. Thl. IV. S. 421. 1844.) zu ähnlichen Ergebnissen geführt worden sei.“ — Wir wünschen im Interesse der Wissenschaft, dass der Herr Verfasser durch die von ihm erwarteten günstigen Umstände recht bald zur Herausgabe seines grösseren Werks in den Stand gesetzt werden möge.

Das Malfattische Problem, neu gelöst von C. Adams, Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule in Winterthur. Mit einer lithographirten Tafel. Winterthur. 1846. 4.

Das Malfattische Problem ist bekanntlich die Aufgabe:

In ein gegebenes Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, dass jeder derselben die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berühre,

Digitized by Google

und zuerst aufgelöst von dem Italiener Malfatti in dem ersten Theile des zehnten Bandes der Mem. d. Soc. Ital. 1803.

Die obige Schrift zerfällt in die drei folgenden Abschnitte: *Erster Abschnitt.* Die älteren Auflösungen. *Zweiter Abschnitt.* Die Steiner'sche Construction. *Dritter Abschnitt.* Neue Auflösung.

In dem ersten Abschnitte charakterisirt der Herr Verfasser die älteren von Malfatti selbst, Gergonne und Lavernède, Tédenat, Crelle, Lehmus und dem Herausgeber des Archivs in den Supplementen zu dem mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 29. gegebenen Auflösungen näher und bereichert die von Gergonne und Lavernède gegebene Auflösung mit einigen schätzbaren eignen Bemerkungen. Da alle diese älteren Behandlungen des Problems mehr eine möglichst elegante analytische Auflösung als eine geometrische Construction bezweckten, so wird ganz zweckmässig in dem zweiten besonderen Abschnitte die von Steiner ohne Beweis gegebene Construction mitgetheilt, und der von Zornow gegebene Beweis derselben vereinfacht, überhaupt wieder mit verschiedenen beachtenswerthen eigenen Bemerkungen bereichert. Im dritten Abschnitte theilt der Herr Verfasser endlich seine eigne durch Einfachheit sich empfehlende Construction nebst der vollständigen Analysis derselben mit, welche letztere, was man nicht unbemerkt zu lassen hat, auch unmittelbar sowohl zu den von Malfatti, als auch zu den von Tédenat gegebenen, durch besondere Eleganz sich auszeichnenden Ausdrücken führt. Jedenfalls ist diese Schrift allen denen, welche die Aufgabe, mit der sich dieselbe in ziemlicher Ausführlichkeit beschäftigt, näher kennen lernen wollen, sehr zu empfehlen, so wie das immer häufigere Erscheinen solcher Monographien uns überhaupt wünschenswerth und oft verdienstlicher als die Ausarbeitung eines gewöhnlichen Lehrbuchs oder die Anfertigung von Uebersetzungen aus dem Französischen oder Englischen zu sein scheint, da namentlich letztere sehr häufig fast gar nichts weiter als das Abschreiben von Formeln erfordern.

Die Stereotomie (Lehre vom Körperschnitte), enthaltend die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen, mit einem Atlas von 74 Tafeln in Folio, von E. F. A. Leroy. Aus dem Französischen von E. F. Kauffmann. Stuttgart. 1846. Erste Lieferung. Bogen 1 bis 6. Mit Atlas. 1 Rthlr.

Praktische Geometrie.

Williams, J. B.: practical geodesy. 8. 12 S. 6 d.

Breton, P. (Dechamp): description des courbes à plusieurs centres, d'après le procédé Perronet: tableaux numeriques etc. Paris.

Digitized by Google

Bräuhäuser, J.: Tafeln zur approximativen Bestimmung der Grössen eines jeden Winkels in Graden und Minuten vermittelst des gewöhnlichen Taschenmaassstabes. Augsburg. 1846. $\frac{1}{3}$ Rthlr.

Praktische Mechanik.

Poppe, A.: Grundlehren der Mechanik und des Maschinenweseus mit Beispielen der Anwendung auf 4 Tafeln. Frankfurt. 1846. $\frac{11}{12}$ Rthlr.

Einfache und leichtverständliche Anleitung zur Berechnung der Kraft der Dampfmaschinen. Vom Grafen G. de Pambour. Deutsch von Dr. E. H. Schnuse. Braunschweig. 1846. 8. 7 Sgr. 6 Pf.

Astronomie.

Elementare Darstellung der Analyse der Fixstern-Bedeckungen des Herrn Geheimen Raths Bessel. Von C. Rümker. Hamburg. 1846. 4.

Durch diese kleine Schrift, deren Zweck durch ihren Titel mit hinreichender Deutlichkeit bezeichnet wird, hat sich der Herr Verfasser um alle diejenigen ein Verdienst erworben, denen eine sich unmittelbar an eine Figur anschliessende, und dadurch jedenfalls an Anschaulichkeit gewinnende Darstellung mehr als eine die allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie in Anspruch nehmende Behandlungsweise zusagt. Dass aber gerade unter denen, welche sich namentlich praktischer Zwecke wegen mit Astronomie beschäftigen, wie z. B. unter den wissenschaftlich gebildeten Seefahrern, viele sind, welche das Bedürfniss einer solchen mehr elementaren und anschaulichen Darstellung fühlen, ist schon in Nro. XXII. des Literarischen Berichts. S. 340. bei Gelegenheit der Anzeige der von Herrn C. Rümker besorgten vortrefflichen vierten Auflage des Hamburger Lehrbuchs der Schifffahrtskunde von uns hervorgehoben worden. Da nun ausserdem Bessel's Methode zur Berechnung der Länge aus beobachteten Sternbedeckungen (denn hierauf bezieht sich die obige Schrift, nicht auf Bessels Methode zur Vorausberechnung der Sternbedeckungen, was wir, um jedem möglichen Missverständnisse vorzubeugen, besonders bemerken) allerdings sehr verdient, immer noch häufiger in Anwendung gebracht zu werden, so glauben wir auf die obige kleine Schrift die Leser des Archivs nicht bloss im Allgemeinen, sondern iusbesondere auch die Lehrer an Schifffahrtsschulen aufmerksam machen zu müssen, und dieselbe ihrer Beachtung zu empfehlen. Die Anwendung der Methode ist in derselben von dem Herrn Verfasser auch durch ein vollständig ausgerechnetes Beispiel erläutert worden.

Digitized by Google

Tuxen, S. L.: Laerebog i Styrmandskunsten eller Styrmandskunsten praktisk og theoretisk forklaret. 2 opl. 2 Dele Imp. 8. 6 Rbd. 64 Sk.

Bewegliche Himmelskarte mit Horizont, nebst Erklärung ihrer Construction von O. Möllinger, Professor an der höheren Lehranstalt in Solothurn. Schaffhausen. 1. Rthlr. 6 Sgr.

Physik.

Katzfey, J.: Naturlehre für höhere Lehranstalten. I. Experimentalphysik. Verb. Ausg. Cöln. 1846. 12 Sgr.

Die Elemente der Physik nach mathematischen Principien zum Gebrauche für höhere Schulen und Gymnasien von Dr. J. Götz, Professor der Mathematik und Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften. Nebst 343 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. 1846. 8. 2 Rthlr. 18 Sgr.

Die mathematische Darstellung in diesem Lehrbuche beschränkt sich nur auf den mechanischen Theil der Physik, und auf das Allergewöhnlichste in der Lehre vom Lichte. In der Lehre von der Electricität, dem Galvanismus, Magnetismus und dem Electromagnetismus ist von Mathematik keine Rede weiter, so wie denn auch die physikalische Theorie des Lichts, selbst auch die Lehre vom Achromatismus, nur eine sehr oberflächliche Berücksichtigung in demselben gefunden hat. Ueberhaupt enthält die Lehre von den sogenannten Imponderabilien nichts weiter, als was man in den gewöhnlichsten Compendien findet, ohne alle Eigenthümlichkeit der Darstellung und Behandlungsweise. Da also in diesem Theile die Kritik nichts zu thun findet, so wenden wir uns zu den mechanischen Abschnitten, und namentlich zu der denselben zu Theil gewordenen auf dem Titel des Buchs besonders hervorgehobenen mathematischen Darstellung. Diese letztere müssen wir aber leider als sehr schwach bezeichnen, und haben in derselben nichts weiter gefunden, als was in derselben Weise schon in den deutschen physikalischen Lehrbüchern etwa aus den Zeiten Gren's zu finden ist. Denn bei Schlüssen, wie z. B. dem in der Lehre vom Fall auf S. 18. sich findenden: „weil $m = \infty$ sich zeigt und also m für $m + 1$ gesetzt werden kann," ist dem Herrn Verfasser wohl noch nie ein Bedenken aufgestossen, und derselbe scheint nach einer solchen Probe noch nicht hinter das, was an dergleichen Dingen das allein Wahre und Richtige ist, gekommen zu sein. Das kann aber nicht auffallen, wenn man aus vielen Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur leider immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnen muss, dass die grossen lediglich der neuesten Zeit angehörenden Leistungen für eine bessere Begründung aller Theile der Mathematik sich im Ganzen nur noch einer höchst geringen Verbreitung erfreuen, und

Digitized by Google

an vielen Schriftstellern spurlos vorübergegangen sind. Mit uns möge man machen, was man will, wir werden es nie zugeben, dass in irgend einem Falle m für $m+1$ gesetzt werden könne, auch wenn m noch so gross geworden sein mag. Bei dem Unterrichte auf Schulen sind aber dergleichen Absurditäten um so gefährlicher, weil die Schüler den eigentlichen Sinn solcher Betrachtungen noch gar nicht kennen, sondern eben erst in denselben eingeführt werden sollen, und wir möchten doch den Lehrer sehen, der sich nicht in grosser Verlegenheit befinden sollte, wenn er einen ihm gegenüber die Behauptung, dass $m+1>m$ sei, aufstellenden Schüler zu der Ueberzeugung bringen wollte, dass $m+1=m$ sei. Wenn aber ein Lehrer der Mathematik nur den Widerspruchsgeist seiner Schüler zu wecken versteht und zu wecken den redlichen Willen hat, so kann er uns auf's Wort glauben, dass es an solchen Einwürfen wie der vorhergehende, insofern der Lehrer selbst durch seine ungenügende Darstellung zu denselben mehr als zu viel Gelegenheit giebt, nicht fehlen wird. Wir haben, da der Raum mehr in's Einzelne zu gehen uns nicht verstattet, absichtlich den obigen ganz trivialen Fall hervorgehoben, weil derselbe nach unserer Meinung ganz geeignet ist, einem jeden der Sache gehörig Kundigen den Geist der ganzen in diesem Buche gegebenen mathematischen Darstellung der Lehren des mechanischen Theils der Physik mit einem Male vollständig zur Anschauung zu bringen, und zur Bildung eines eigenen Urtheils die nöthige Richtschnur abzugeben. Dabei müssen wir aber auch noch bemerken, dass für Vieles, was unbedingt eine mathematische Theorie fordert, gar keine solche gegeben worden ist. So muss z. B. die Bestimmung des Feuchtigkeitszustandes der Luft aus Beobachtungen des Psychrometers durchaus auf bestimmte mathematische Formeln zurückgeführt werden, und ohne eine strenge mathematische Theorie ist das Psychrometer überhaupt ein ganz unnützes Instrument. Diesen ganzen so wichtigen Apparat thut aber ausser einer kurzen Beschreibung desselben der Herr Verfasser auf S. 241. mit den Worten ab: „Der Unterschied der durch beide Thermometer angegebenen Temperaturen, d. h. die Psychrometer-Differenz, bestimmt die Feuchtigkeit der Luft"; freilich aber konnte von einer Theorie des Psychrometers nicht die Rede sein, weil die so wichtigen mathematischen Untersuchungen über die Expansivkraft der Dämpfe ganz ausserhalb des Planes, den der Herr Verfasser sich bei Abfassung dieses Buches machte, gelegen zu haben scheinen. Endlich genügt dasselbe auch einer Anforderung nicht im Mindesten, welche man an eine mathematische Darstellung der Physik durchaus zu machen berechtigt ist, indem es nämlich nirgends die vielfachen Correctionen, welche fast alle physikalischen Versuche erfordern, wenn sie nur irgend auf wissenschaftliche Genauigkeit sollen Anspruch machen können, gehörig berücksichtigt, und überhaupt diese so höchst wichtige und interessante Seite der Physik ganz bei Seite liegen lässt. Man sieht daher hieraus, dass dieses neue Lehrbuch der Physik bloss die bekanntesten Dinge enthält, und dass die auf dem Titel hervorgehobene mathematische Behandlung wohl, wenn man die Sache aus einem mehr wissenschaftlichen Standpunkte betrachtet, gerade seine schwächste Seite ist. Die Holzschnitte können zwar genügen, sind aber nicht sehr sauber ausgeführt; und sollen dieselben, wie es fast scheint, Abbil-

dungen der Theile eines wirklich vorhandenen physikalischen Apparats sein, so gehört derselbe wenigstens nicht zu den vorzüglich eleganten, und erinnert, wie das ganze Buch, vielfach an eine ältere Zeit.

Sollten einige der oben zuletzt erwähnten Unvollständigkeiten vielleicht darin ihre Entschuldigung suchen, dass das Buch zunächst nur für den Schulunterricht bestimmt sei, so müsste das vorherrschend sein sollende mathematische Element nicht auf dem Titel und in der Vorrede als ein besonderes Gewicht in die Wagschale legend hervorgehoben worden sein.

Wir haben die obigen Bemerkungen nicht unterdrücken wollen, weil wir sehr wünschen, dass auch der mathematischen Physik immer mehr und mehr eine der geometrischen Strenge sich möglichst nähernde Darstellung zu Theil werden möge, wofür uns in Deutschland u. A. der verdiente Bohnenberger in dem dritten Theile seiner Astronomie ein vortreffliches Muster aufgestellt hat, welches, wie wir hören, noch jetzt von einem der grössten lebenden Mathematiker angehenden Astronomen vorzüglich zum Studium empfohlen zu werden pflegt. Ausserdem sind wir der Meinung, dass die mathematische Physik, aus einem richtigen Gesichtspunkte dargestellt, d. h. *immer auf die strenge, hier fast nirgends zu umgehende Betrachtung der Gränzen zurückgeführt*, ein ganz vorzügliches Bildungsmittel des mathematischen Geistes überhaupt, und eine vortreffliche Vorbereitung zum Studium der höhern Mathematik, insbesondere der höheren Mechanik ist. Wer diesen Gesichtspunkt nicht festhält, und ohne vorzügliche Rücksicht auf die Strenge der Methode bloss eine Kenntniss der hauptsächlichsten physikalischen Gesetze und der gewöhnlichsten Formeln, in denen dieselben sich darstellen lassen, sucht, und eben bloss in diesen Formeln an sich das mathematische Wesen der Physik findet, mag sich das vorliegende Buch immerhin zum Führer wählen und wird sich vielleicht selbst dem Herrn Verfasser hin und wieder zu Dank verpflichtet fühlen, indem das Buch vor manchen andern öfters gerühmten physikalischen Lehrbüchern, die aber häufig ihre Aufgabe nur durch eine möglichste Anhäufung von Material ohne scharfe Begründung zu lösen suchen, u. A. die gute Seite hat, dass es die, eigentliche wissenschaftliche Bedeutung habenden, Resultate überall mit möglichster Klarheit und Bestimmtheit hervorzuheben sucht. Möge daher dasselbe immerhin auch seinen Nutzen stiften, den wir demselben keineswegs ganz absprechen wollen.

Nigris: la géologie liée à l'astronomie, ou nouv. système solaire.

L. Schrön: Stöchiometrische Hülfstafeln. gr. 8. Hannover. 1846. $1\frac{1}{4}$ Rthlr.

Digitized by Google

XXXI.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. Erster Theil. Gemeine Arithmetik. Dritte verbesserte Ausgabe. Auch unter dem Titel: Lehrbuch der gemeinen Arithmetik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten von Joh. Aug. Grunert. Dritte verbesserte Ausgabe. Brandenburg. 1845. 8.

Vermehrungen dieser dritten Auflage meines Lehrbuchs der gemeinen Arithmetik für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten habe ich nicht für nöthig und zweckmässig erachten können. Dagegen glaube ich dieselbe mit Recht eine verbesserte nennen zu dürfen; auch ist die angehängte kleine Factorentafel, in welche sich früher einige Fehler eingeschlichen hatten, von einem der besten meiner jetzigen Schüler, Herrn Lohse, ganz neu berechnet worden, die Einrichtung derselben aber im Ganzen völlig ungeändert geblieben, was schon deshalb nöthig war, weil jede wesentliche Veränderung bei dem Gebrauche der dritten Auflage neben den früheren Auflagen dieses, eben so wie die übrigen Theile meines ganzen aus sechs Theilen bestehenden mathematischen Lehrbuchs für Schulen, in vielen Tausend Exemplaren verbreiteten Lehrbuchs dem Gedeihen des Unterrichts nach demselben hinderlich entgegen getreten sein würde. — Von der die Kegelschnitte enthaltenden vierten Abtheilung des Lehrbuchs für die obern Klassen wird auch noch in diesem Jahre eine dritte Auflage erscheinen und damit die dritte Auflage aller sechs Theile beendigt sein. G.

Digitized by Google

von Carl Koppe u. s. w. Zweiter Theil. Planimetrie und Stereometrie. Zweite Auflage.) Essen 1846. 8. 27 Sgr.

Euclidis femte och sjette Böcker med förändringar af E. G. Björling, Phil. Mag. Mathes. Doc. vid Ups. Akad. Andra Upplagan af „Allmän Proportionslära" af samma författare. Upsala. 1845. 8.

Da es gegenwärtig zu einem Lieblingsthema einer gewissen Klasse von Schriftstellern in Deutschland gehört, die Euklidische Methode rücksichtlich ihres Gebrauchs beim geometrischen Unterrichte herabzusetzen, und statt derselben einer andern Methode, die schon an mehreren Stellen dès Archivs *) etwas näher bezeichnet worden ist, Geltung zu verschaffen zu suchen, so scheint es zweckmässig, wenn auch durch die blosse Nennung des Titels von Schriften wie die obige nachzuweisen, dass dies in vielen andern Ländern keineswegs eben so wie bei uns der Fall ist, sondern dass vielmehr, wie u. A. auch schon im Literarischen Berichte Nro. XXVIII. S. 416. bemerkt worden ist, namentlich in England, Holland, Schweden, u. s. w., wo es immer viele besonders durch ihre Gründlichkeit ausgezeichnete Mathematiker gegeben hat und jetzt mehr als sonst giebt, der geometrische Unterricht, besonders auf Schulen — und zwar nach unserer Ueberzeugung mit vollem Rechte und wesentlichem Vortheile für das Gedeihen dieses so wichtigen Unterrichtszweiges überhaupt, und dessen Wirkung auf die tüchtige Ausbildung des jugendlichen Geistes — immer vorzugsweise, man kann wohl sagen, allein in Euklidischer Weise ertheilt wird. Für wie wichtig dies auch für das Studium der sogenannten höheren Mathematik nach den jetzt sich immer mehr und mehr Geltung verschaffenden, im Verhältniss zu der älteren Darstellungsweise durch eine viel grössere Strenge und wahre mathematische Evidenz sich auf das Vortheilhafteste auszeichnenden Ansichten erkannt werden muss, ist nur erst in dem vorliegenden Hefte des Archivs S. 303. besonders hervorgehoben worden.

Ueber die Schrift selbst genügt es zu bemerken, dass dieselbe ganz mit Euklidischer Strenge verfasst ist.

Erstes Buch der Stereometrie. Nicht allseitig begränzte Raumformen. Vom Oberlehrer Dr. Hincke. (Programm des Domgymnasiums zu Halberstadt von Ostern 1846.) 4.

In dem Vorworte sagt der Herr Verfasser: es sei eine auffallende Erscheinung, dass fast alle Mathematiker nicht nach einem Lehrbuche, wenn es nicht von ihnen selbst verfasst sei, unterrichten wollten und dass dieselben an jedem Lehrbuche Etwas zu tadeln fänden; findet mit Herrn Schulrath Dr. Uhde zu Braunschweig die Ursache dieses Umstandes darin, dass die mathematischen Lehrbücher noch nicht von der Art seien, dass alle Mathematiker nach einem derselben mit Erfolg unterrichten könnten,

*) Z. B. Literarischer Bericht. Nro. II. S. 29. und Nro. XXVIII. S. 416.

Digitized by Google

und will nun durch die vorliegende Bearbeitung eines Abschnitts der Stereometrie als an einem Beispiele zeigen, wie ein mathematisches Lehrbuch beschaffen sein müsste, um neben der strengen Begründung der einzelnen Sätze ein organisches Ganze zu geben, so dass jeder Satz an seiner Stelle stehen muss und nirgend ein Satz fehlt.

Wir finden die Ursache des erwähnten Umstandes, mit dem es allerdings bis zu einem gewissen Grade seine Richtigkeit hat, keineswegs mit den genannten Herren in der Beschaffenheit unserer Lehrbücher, sondern in der Wissenschaft selbst, namentlich in der ungemeinen Bildungsfähigkeit derselben, und darin, dass eigentlich ein Jeder die ganze Wissenschaft ohne alle Hülfe eines Lehrbuchs aus sich selbst zu entwickeln im Stande ist, wobei wir ja nur z. B. an Pascal zu erinnern brauchen, von welchem erzählt wird, dass er in einem Alter von eilf Jahren, nachdem er aus Gesprächen, die bei seinem Vater gehalten wurden, nur erst eine Ahnung von der Geometrie bekommen hatte, keine Ruhe mehr fand, bevor er weiter in diese Wissenschaft eingedrungen war. Während seiner Erholungsstunden schloss er sich allein in eine abgelegene Kammer ein. Dort zeichnete er mit einer Kohle auf dem Fussboden Dreiecke, Parallelogramme, Kreise u. s. w., ohne die Namen dieser Figuren zu wissen; hernach untersuchte er die Lagen der Linien gegen einander, wenn sie zusammenstossen; er verglich die Ausdehnungen der Figuren u. s. w. Seine Schlüsse gründeten sich auf Definitionen und Axiome, die er sich selbst gemacht hatte. Nach und nach kam er dahin zu entdecken, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks durch einen Halbkreis gemessen werden, d. h. der Summe zweier rechten Winkel gleich sein muss, welches der 32ste Satz des 1sten Buchs des Euklides ist. Bei diesem Theorem war er, als er von seinem Vater überrascht ward, der, nachdem er den Gegenstand, den Fortgang und das Resultat seiner Forschungen erfahren hatte, einige Zeit vor Bewunderung und Rührung stumm und unbeweglich blieb; alsdann ganz ausser sich zu seinem vertrauten Freunde, le Pailleur, eilte, um ihm, was er gesehen, zu erzählen. Nun erst, nämlich in seinem zwölften Jahre, gab man ihm Euklids Elemente zu lesen, die er ganz allein verstand, ohne jemals einer Erläuterung zu bedürfen. — Mehr aber als der eilfjahrige Pascal wird doch wohl ein Lehrer der Geometrie an einer höheren Unterrichtsanstalt einen inneren Trieb in sich spüren, die Wissenschaft aus sich selbst zu entwickeln, und gleichzeitig seine Schüler an dem darin liegenden unaussprechlich hohen Genuss Theil nehmen zu lassen; und eben diese Eigenthümlichkeit unserer Wissenschaft ist es auch, welche dieselbe als Bildungsmittel des jugendlichen Geistes über alle anderen Wissenschaften so sehr erhebt. Also — wir sagen es noch einmal — nicht in den Lehrbüchern, sondern in der Vortrefflichkeit der Wissenschaft an sich liegt einzig und allein der Grund der oben namhaft gemachten Erscheinung; und eben deshalb sind wir auch fest überzeugt, dass, so wie bisher von den Elementen des Euklides herab bis auf unsere Zeit keines unserer Lehrbücher, unter denen gewiss manche sehr gute sind, allgemeine Anerkennung gefunden hat, gewiss auch künftighin nie eines allgemeine Anerkennung finden, und dass niemals ein mathematisches System so allgemeinen Eingang gewinnen wird, wie

denselben z. B. in der Botanik das Linnésche System lange Zeit gefunden hat und zum Theil noch findet. Dieses Schicksal aller mathematischen Lehrbücher und Systeme wird aber aus den angegebenen Gründen gewiss auch die in dem vorliegenden Programme von dem Herrn Verfasser gelieferte Probe eines Normal-Lehrbuchs, der wir übrigens ein recht löbliches Streben nach Vollständigkeit und systematischer Anordnung keineswegs absprechen wollen, treffen, und die Fluth der mathematischen Lehrbücher wird unfehlbar immer mehr und mehr wachsen, weil es eben die Anregung, welche unsere Wissenschaft nothwendig auf den Geist ausübt, ist, welche wenigstens die besseren derselben hervorruft, und der Geist sich nun einmal nicht in Fesseln legen lässt.

Saint-Venant: tableau de formules de la théorie des courbes dans l'éspace. 4. Paris.

Astronomie.

Ueber das Verhältniss der Astronomie zu den anderu Wisssenschaften Eine Vorlesung in dem wissenschaftlichen Vereine zu Berlin am 28. Februar 1846 gehalten von J. F. Encke, Director der königl. Sternwarte. Berlin. 1846. 8. 7 Sgr. 6 Pf.

Ein Jeder wird diese ihrem Zwecke vollkommen entsprechende Schrift mit Vergnügen und Belehrung lesen.

Pontécoulant: théorie analytique du systéme du monde. Tome IV. 8. Paris.

Grundriss der mathematischen Geographie. Für höhere Lehranstalten entworfen und mit einer Anleitung, die Sternbilder des nördlichen Himmels aufzufinden versehen von Aug. Wiegand, Doctor der Philosophie und Oberlehrer an der Realschule in den Franckeschen Stiftungen zu Halle. Mit eingedruckten Holzschnitten. Halle. 1846. 8. 10 Sgr.

Es ist allerdings sehr zu wünschen, dass der mathematischen Geographie in Verbindung mit den Hauptlehren der Astronomie auf höheren Unterrichtsanstalten besondere Lehrstunden gewidmet und dieselbe wirklich in deren Lehrplan aufgenommen werde. Denn lächerlich ist es in der That, was für verdrehte Begriffe über diese jeden nur einigermassen Gebildeten so nahe liegenden Dinge man sich oft selbst bei Männern der Wissenschaft kund geben sieht, so wie uns z. B. ein Fall noch sehr wohl erinnerlich ist, wo ein der Natur überhaupt gar nicht so fern stehender und sonst gebildeter und strebsamer Mann ganz ernstlich sein Befremden darüber äusserte, dass das Wasser, obgleich die Erde notorisch nahe die Gestalt einer Kugel habe, nicht von derselben herunterlaufe. Der Grund solcher groben Unwissenheit liegt aber nur in dem schlechten Schulunterrichte, welcher allein die Schuld

Digitized by Google

davon zu tragen hat, und die Schulen möchten doch ja immer mehr und mehr darauf hinarbeiten, die ihnen anvertrauten Schüler zuerst und vorzüglich über das gehörig aufzuklären, was sie überall, wo sie sich hinwenden, zunächst umgiebt und ihnen zuerst entgegen tritt; denn Jeder sollte sich doch wohl mehr schämen, wenn er nicht klar überschaut, wie und nach welchen Gesetzen die Sonne seine Tage erhellt und der Mond seine Nächte erleuchtet, als wenn er nicht immer die griechischen Accente richtig zu setzen versteht! Auch zweifeln wir keinen Augenblick, dass die Zeit gar nicht mehr so fern ist, wo man die Richtigkeit hiervon immer noch mehr als dies schon jetzt der Fall ist erkennen, wo die Zahl unserer Gymnasien und sogenannten Real- oder Bürgerschulen in das umgekehrte Verhältniss getreten sein wird, und wo auch die letzteren ihre Zöglinge mit dem Zeugniss der Reife zur Universität entlassen werden. Nun, wie dem auch sein möge, wir sind in Bezug auf das vorliegende Büchlein der Meinung, dass in demselben dem Unterrichte in der mathematischen Geographie ein zwar kurzer, im Ganzen aber zweckmässiger, die Hülfe der Lehren der sogenannten reinen Mathematik zwar sehr mässig in Anspruch nehmender, aber doch auch nicht ganz verachtender und selbst etwas mehr als in manchen anderen Büchern ähnlicher Art hervorhebender, überhaupt der Ausdehnung, welche man bei den jetzt noch obwaltenden Verhältnissen diesem Unterrichte zu geben sich erlauben dürfen möchte, entsprechender Leitfaden geboten wird. Druckfehler finden sich leider mehrere, was bei einem Schulbuche immer übel ist, so wie z. B. auf einer und derselben Seite (24): Elipsen, Radienrectoren, Kundstrop *); auf Seite 53. Guiseppe Piazzi statt Giuseppe Piazzi, u. s. w. Wenn das sehr graue Papier etwas besser wäre, so würden sich auch die zweckmässig in den Text eingedruckten sonst nicht ganz üblen Holzschnitte besser ausnehmen. Die angehängte, übrigens nur ganz kurze Anleitung zur Kenntniss der nördlichen Sternbilder hätte nach unserer Meinung ganz füglich wegbleiben können, da wir dergleichen astrognostische Beschäftigungen für den Schulunterricht nicht zweckmässig finden können, und deshalb eine allgemeine Andeutung, wie in der beobachtenden Astronomie und auf den Sternkarten die Sterne bezeichnet und von einander unterschieden werden, an diesem Orte für völlig genügend gehalten haben würden. Denn

---

*) Man findet den Namen des Geburtsorts Tycho's in verschiedenen Schriften auf sehr verschiedene Arten geschrieben. So schreiben z. B. Lalande (Astronomie. Seconde édition. T. I. p. 192.) und Bailly (Historie de l'Astronomie moderne. T. I. p. 378.) „Knudsturp", woraus Herr Professor Götz in seinen Elementen der Physik nach mathematischen Principien zum Gebrauche für höhere Schulen und Gymnasien. Leipzig. 1846. S. 549. gar „Kund-Strup" gemacht hat, und Herr Dr. Wiegand schreibt „Kundstrop". Ich bemerke daher bei dieser Gelegenheit, dass nach einer auf meine Anfrage von meinem aus Schweden gebürtigen Collegen, Herrn Professor Dr. Tillberg hierselbst, mir gemachten Mittheilung die allein richtige Schreibart des Namens „Knutstorp" ist, so wie ich mich denselben auch sonst wohl erinnere geschrieben gefunden zu haben, ohne jedoch in diesem Augenblicke mit Bestimmtheit den Ort angeben zu können.

G.

Digitized by Google

Schüler sollen keine Himmelsbeobachter werden, sondern nur richtige und klare Begriffe von dem bekommen, was täglich um sie herum vorgeht.

Anleitung zur Berechnung und graphischen Bestimmung der Sonnenfinsternisse und Mondfinsternisse für angehende Astronomen und Mathematiker. Mit zwei Figurentafeln und Tabellen zur angenäherten Berechnung der Zeit der in die drei Jahrhunderte 1700 bis 2000 fallenden Vollmonde, Neumonde und Finsternisse. Vom K. S. Artillerie-Oberst Leonhardi a. D., R. d. C. V. O. Leipzig. 1846. 4. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Diese Schrift ist zwar ganz deutlich geschrieben, enthält aber lauter ganz bekannte Dinge in der aus den älteren astronomischen Lehrbüchern hinreichend bekannten Weise, ohne im Geringsten die grossen Bereicherungen, welche die Theorie der Finsternisse in neuerer Zeit durch Bessel, Hansen, Lehmann u. A. erhalten hat, zu berücksichtigen. Für blosse Liebhaber der Astronomie, welche, mit ganz elementaren mathematischen Kenntnissen ausgerüstet, zu ihrem Vergnügen oder auch zu ihrer Belehrung Finsternisse berechnen wollen und eine etwas ausführlichere Darstellung der Theorie wünschen, als ihnen die älteren Lehrbücher darbieten, mag daher diese Schrift ihren Nutzen haben; an angehende Astronomen und Mathematiker macht man aber doch gegenwärtig ganz andere Ansprüche als der Herr Verfasser zu glauben scheint, und diesen können wir nur rathen, gleich von vorn herein sich mit der Theorie der Finsternisse vom Standpunkte der analytischen Geometrie aus bekannt zu machen, wozu wir ihnen natürlich keinen besseren Leitstern als Bessels Analyse der Finsternisse in dessen Astronomischen Untersuchungen. Zweiter Band. Königsberg 1842. Nro. X. empfehlen können. Wenn der wahre Mathematiker solche auf einem ganz veralteten Standpunkte stehende, lauter ganz bekannte Dinge enthaltende und die neueren Forschungen völlig ignorirende Schriften wie die vorliegende betrachtet, so beschleicht denselben ein gewisses wehmüthiges Gefühl, weil er dadurch immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnt, dass die wichtigsten neueren Eroberungen in den verschiedenen Theilen seiner Wissenschaft selbst unter Leuten seines Fachs sich immer noch einer verhältnissmässig nur sehr geringen Verbreitung erfreuen.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte prima. 1792—1802. Tomo primo. 1792—1795. Vienna. 1845. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien. Nach dem Befehle Sr. k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. v. Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w., und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 34ster Theil. Neuer Folge 4r Band Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1792—1795. Wien 1845. 4.

In der Zeitschrift für Astronomie. Thl. IV. S. 477. u. 478. sagt J. J. v. Littrow in einem Schreiben an die Herausgeber:

„Vor einiger Zeit versuchte ich einige Sterne, die nördlich vom Zenith durch den Meridian gehen, aber erstens sind ihrer

Digitized by Google

nicht viele, dann scheint mir die Vergleichung mit Piazzi's neuem Cataloge nicht sicher genug für Sterne, die dem Pole nahe stehen und für die, wie mich dünkt, der sogenannte Motus proprius im Allgemeinen grösser ist, als für die anderen Gegenden des Himmels. Auch sind die Bestimmungen der eigenen Bewegungen dieser Sterne, die wir in den letzten Zeiten von den genauesten und geübtesten Astronomen erhalten haben, so verschieden, dass bei sehr vielen die Reduction auch nur für 20 Jahre schon auf zwei volle Secunden unsicher wird. So ist z. B.

Eigene Bewegung in Declination nach

	Pond.	Piazzi.	Differenz für 100 Jahr.
Capella	0″,358	0″,44	8″,2
Deneb	−0″,091	0″,00	9″,1
α gr. Bär	0″,084	0″,00	8″,4
γ Drache	0″,002	0″,07	6″,8

Schon aus diesem Grunde, und es vereinigen sich damit noch mehrere andere, wäre es wünschenswerth, dass die Astronomen, die uns vorzüglich gute Sternpositionen mitzutheilen im Stande sind, dieselben für die Tage der wirklichen Beobachtungen mittheilten, ohne Reduction auf eine oft viele Jahre entfernte Epoche. Wenn z. B. der Catalog Piazzi's nach diesem Vorschlage entworfen worden wäre, so würde sein Gebrauch zwar etwas weniger bequem, aber in einem viel grösseren Verhältniss sicher sein. Auch scheint es mir, dass die grössere Verlässlichkeit des neuen Catalogs über den alten sich nicht sowohl auf die besseren Beobachtungen, sondern auf die genaueren Reductionen gründet. Immer aber wäre es bei der gegenwärtigen Einrichtung dieses Catalogs äusserst wünschenswerth, die Originalbeobachtungen des vortrefflichen Palermer Astronomen zu besitzen, zu deren Abdrucke man uns von Mailand aus Hoffnung gemacht hat."

Diese Originalbeobachtungen des grossen Palermer Astronomen erhalten wir nun durch den Sohn und würdigen Nachfolger des trefflichen J. J. v. Littrow in dem obigen auf Kosten der k. k. österreichischen Regierung gedruckten Werke, dessen erster die Beobachtungen am Meridiankreise und am Passageninstrumente in den Jahren 1792—1795 enthaltender Theil uns jetzt vorliegt. In der so wie das ganze Werk italienisch geschriebenen Einleitung, die ausser einigen interessanten zwischen Piazzi und Oriani gewechselten Briefen auch ein Facsimile der Handschrift Piazzi's enthält, hat Herr Director C. L. v. Littrow sich weiter über sein jedenfalls höchst verdienstliches Unternehmen ausgesprochen, wie dies schon früher vorläufig in den Astronomischen Nachrichten. Nro. 532. geschehen war, und eine Reihe von Bemerkungen des Herrn Herausgebers und ein Register aller beobachteten Sterne sind beigefügt.

Da die Piazzischen Beobachtungen ihrer Vortrefflichkeit wegen bekanntlich so häufig bei der Vergleichung älterer und neuerer Beobachtungen der Fixsterne mit einander, z. B. bei Untersuchungen über deren eigene Bewegung, gebraucht werden, so kann der Herr Herausgeber gewiss auf den Dank aller Astronomen für seine verdienstliche und — wenn, wie hier geschehen ist, mit aller

Digitized by Google

Umsicht und Kritik verfahren wird — höchst mühsame Arbeit rechnen, da dieselben nun in den Stand gesetzt werden, auf die unmittelbaren Piazzischen Beobachtungen die durch die grossen neueren Fortschritte der Astronomie möglich gemachten scharfen Reductionen in Anwendung bringen zu können, und erst dadurch die Vergleichung derselben mit neueren Beobachtungen recht fruchtbar zu machen, und diesen Vergleichungen den Grad der Schärfe und Genauigkeit, welchen die neuere Astronomie mit Recht in Anspruch nimmt, vollkommen zu sichern, was, wenn man wie bisher nur auf die nach ungenaueren Elementen reducirten Beobachtungen zurückzugehen im Stande ist, natürlich bei Weitem nicht in demselben Maasse der Fall sein kann, und dass ein solcher Gebrauch von diesem Werke recht vielfach gemacht werden möge, ist sehr zu wünschen, kann aber auch bei dem alle Astronomen beseelenden Eifer für ihre Wissenschaft nicht bezweifelt werden. Die äussere Ausstattung des Werkes ist seinem Gehalte vollkommen entsprechend.

Kaiser, F.: Sterrekundig Jaarbock. gr. 8. Amsterdam 1846. 1 Fl.

Klint, B. G.: Lärobok i Navigations-Vetenskapen med tillhörande Nautiska och Logarithmetiska Tabeller och Trigonometrie. Andra uppl. 8. Stockholm.

Physik.

Grundriss der Physik und Meteorologie. Für Lyceen, Gymnasien, Gewerbe- und Realschulen, so wie zum Selbstunterrichte. Von Dr. Joh. Müller, Prof. der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau. Mit 541 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1846. 8. 2 Rthlr.

Dieser Grundriss der Physik ist ein bei dem physikalischen Unterrichte auf den auf dem Titel genannten Lehranstalten als Lehrbuch zu gebrauchender grösstentheils ganz wörtlicher Auszug aus desselben Herrn Verfassers in zwei Bänden erschienenen (2te Aufl. Braunschweig. 1844.) bekannten grösseren Werke, und auch die Holzschnitte sind mit geringen Abänderungen ganz aus diesem letzteren Werke entlehnt. Da nun die Darstellungsart des Herrn Verfassers aus dem grösseren Werke den Lesern des Archivs schon hinreichend bekannt sein wird, so brauchen wir über den vorliegenden Auszug hier nichts weiter zu sagen, als dass derselbe seinem Zwecke im Ganzen wohl entsprechen dürfte und nach unserer Meinung, namentlich in Bezug auf das Technische, was doch streng genommen nicht in die Physik als solche gehört, eher etwas zu viel als zu wenig giebt. Auf der anderen Seite könnte die Darstellung hin und wieder etwas mathematischer gehalten sein, wenigstens für solche Lehranstalten, wo der Lehrer der Physik auf eine gute mathematische Vorbildung seiner Schüler fussen kann, deren es doch gegenwärtig schon eine ziemlich grosse Anzahl giebt.

Digitized by Google

Eisenlohr: Elementar-Physik für Gymnasien. Carlsruhe. 1846. 1 Rthlr. 6 Sgr.

(Ist uns noch nicht zu Gesicht gekommen, wird aber später ausführlicher angezeigt werden.)

Drei Abhandluugen aus dem Gebiete der Wellen-Lehre nebst Anwendungen auf Akustik, Optik und Astronomie. Von Christian Doppler, o. ö. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie, und ordentlichem Mitgliede der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. (Aus den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. V. Folge Band 4. besonders abgedruckt.) Prag. 1846. 4. 20 Sgr.

Die Titel dieser drei Abhandlungen sind folgende: 1. Methode, die Geschwindigkeit, mit der die Luftmolekel beim Schall schwingen, zu bestimmen. 2. Ueber eine vom Zerstreuungsvermögen des Fortpflanzungsmittels völlig unabhängige rotatorische Dispersion des Lichtes, nebst gelegentlichen Bemerkungen zur rotatorischen Bewegung. 3. Ueber eine Vorrichtung, mittels deren sich jede noch so geringe Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bahn wahrnehmen und messen lässt, nebst Hinweisung auf solche Fälle, wo eine derartige Ablenkung vielleicht Statt haben dürfte.

Es ist leider nicht möglich, an diesem Orte näher auf den Inhalt dieser von dem schon durch mehrere frühere Arbeiten bekannten Scharfsinne des Herrn Verfassers ein neues Zeugniss ablegenden Abhandlungen einzugehen; wir können aber die Leser des Archivs versichern, dass ihnen dieselben eine interessante und anregende Lectüre gewähren werden, und bemerken nur noch, dass in der ersten Abhandlung von dem Herrn Verfasser eine sinnreiche Anwendung von der durch die Locomotiven auf Eisenbahnen dargebotenen schnellen Bewegung zur Bestimmung der auf dem Titel angegebenen Geschwindigkeit gemacht worden ist.

Beaumont Brivazar: élémens de l'éctro-magnetisme animal. 8. Grenoble.

Brown, W.: a treatise on the oscillations of the Barometer. 1842. 2 s.

Guillemeau: météorologie élémentaire. 8.

Nouveaux appareils contre les dangers de la foudre par M. C. R. 8. Paris.

Vermischte Schriften.

The Cambrige and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College. Cambridge. (S. Nro. XXIX. S. 443.)

Nro. IV. On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. — On the Integration of Certain Differential Equations. By Rev. Brice Bronwin. — On the Theory of Magic Squares, Cubes,

Digitized by Google

etc. By R. Moon. — On the Geometrical Representation of the Motion of a Solid Body. By Arthur Cayley. — On the Rotation of a Solid Body round a Fixed Point. By Arthur Cayley. — On the Laws of Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies. By Samuel Haughton. — On a Formula for Determining the Optical Constants of Doubly Refracting Crystals. By G. G. Stockes. — Sur la représentation géometrique des fonctions elliptiques de première espèce. Par J. Alfred Serret. — On the Principal Axes of a Solid Body. By W. Thomson. — Note on a Geometrical Theorem contained in the preceding Paper. By Arthur Cayley. — (Nro. V. will be published on the 1st of November.)

Göttinger Studien. 1845. Göttingen. 8. 4 Rthlr.

Die erste Abtheilung dieses Werks enthält mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen, unter denen wir die Leser des Archivs nur auf die folgenden aufmerksam machen.

I. Combinatorische Bemerkungen von M. A. Stern. Es giebt bekanntlich eine grössere Anzahl der Combinationslehre angehörender Sätze, welche nicht auf rein combinatorischem Wege, sondern durch Vergleichung der zu einerlei Potenz von x gehörenden Coefficienten zweier nach den Potenzen der Grösse x fortschreitender, der Form nach verschiedener, dem Werthe nach identischer Reihen mit einander bewiesen zu werden pflegen, in welcher Beziehung wir z. B. bloss an das Kapitel de partitione numerorum in der Introductio in Analysin infinitorum zu erinnern brauchen. Da nun ein solches Verfahren, wenn auch allerdings zuweilen oft sehr elegant, doch gewiss dem eigentlichen Wesen der Wissenschaft in keiner Weise entspricht, so hat der Herr Verfasser des vorliegenden sehr lesenswerthen Aufsatzes in demselben dergleichen Sätze aus rein combinatorischen Begriffen abzuleiten und unmittelbar aus dem Wesen der Combinationen abzuleiten gesucht, was jedenfalls von den Liebhabern der combinatorischen Analysis beachtet zu werden verdient.

Eben so beachtenswerth in anderer Rücksicht sind die folgenden physikalischen Abhandlungen:

II. Untersuchungen über die magnetische Declination in Göttingen; von Professor Dr. B. Goldschmidt.

III. Beitrag zur physiologischen Optik; von Professor Dr. J. B. Listing.

IV. Das Ophthalmotrop, dessen Bau und Gebrauch; von Professor Dr. C. G. Th. Ruete.

Ophthalmotrop nennt der Herr Verfasser ein Instrument, welches bestimmt ist, die Functionen der verschiedenen Muskeln des Auges und auch viele optische Erscheinungen zu demonstriren, und um der Phantasie und dem Gedächtnisse bei der Auffassung dieser schwer zu durchschauenden Verhältnisse zu Hülfe zu kommen.

V. Ueber das Gesetz, nach welchem die Mischung von Flüssigkeiten und ihr Eindringen in permeable Substanzen erfolgt, mit besonderer Rücksicht auf die Vorgänge im menschlichen und thierischen Organismus; von Professor Dr. J. Vogel.

Digitized by Google

XXXII.

Literarischer Bericht.

(Wegen der grösseren Anzahl ausführlicher anzuzeigender Werke hat die ausländische Literatur diesmal grösstentheils wegbleiben müssen, wird aber im nächsten Literarischen Berichte nachgeholt werden.)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Erinnerung an Bessel's Leben und Wirken. Von Dr. Anger, Professor in Danzig. Danzig. 8. 6 Sgr.

Der Herr Vf. hat uns in dieser Skizze ein sehr lebensvolles Bild des grossen Astronomen, welchen der Titel nennt, geliefert, an dem sich ein Jeder erfreuen und erwärmen wird, wozu wohl auch kaum Jemand besser als Herr Professor Anger, welcher mit Bessel viele Jahre in der engsten amtlichen Verbindung gestanden hat, befähigt war. Möge daher die ansprechende kleine Schrift, in der übrigens, wie sich von selbst versteht, keineswegs eine erschöpfende Darstellung der wissenschaftlichen Verdienste Bessels beabsichtigt wurde, recht viele Leser finden.

Friedrich Wilhelm Bessel wurde am 22sten Juli 1784 in Preussisch-Minden, woselbst sein Vater Regierungs-Secretair mit dem Titel eines Justizraths war, geboren. In seinem 15ten Jahre kam er nach Bremen, um daselbst bei A. G. Kulenkamp und Söhne die Handlung zu erlernen, widmete sich aber bald aus Neigung ganz der Astronomie und kam im Jahre 1805 an Hardings Stelle zu Schröter nach Lilienthal. Im Jahre 1810 wurde er als ordentlicher Professor nach Königsberg berufen, wo er bis an seinen am 17ten März 1846 Abends um $6\frac{1}{2}$ Uhr erfolgten Tod so Grosses für die Wissenschaft wirkte. Ein schwammartiges Gewächs im Innern des Unterleibes hatte durch seinen mechanischen Druck auf die innern Theile alle Functionen des Körpers gestört, so dass ein ferneres Leben unmöglich war. Er hinterlässt eine

Digitized by Google

trauernde Gattin, Tochter des Medicinalraths und Professors Hagen in Königsberg, und zwei Töchter, von denen die ältere an den Professor Herrn Adolph Erman in Berlin, die jüngere an den Consul Herrn Lorck in Königsberg verheirathet ist. Ein hoffnungsvoller Sohn, der sich in Berlin dem Baufach widmete, war ihm dort schon im Jahre 1840 vorangegangen, welcher Schlag ihn vorzüglich hart getroffen und seine Lebenskraft gelähmt hatte.

Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibnitio conscripta. Zur zweiten Säcularfeier des Leibnizischen Geburtstags aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C. J. Gerhardt. Hannover. 1846. 8. 10 Sgr.

Durch die Herausgabe dieser bis jetzt noch ungedruckten Abhandlung Leibnizens aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover hat sich Herr Doctor Gerhardt jedenfalls ein sehr anerkennungswerthes wesentliches Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben. Leibniz schrieb dieselbe, da er zu der Herausgabe seines versprochenen Commercium epistolicum nicht mehr die nöthige Musse zu finden hoffen konnte, kurz vor seinem am 14ten November 1716 erfolgten Tode lediglich um seine Rechte auf die Erfindung der Differentialrechnung wahrzunehmen, so dass dieselbe also natürlich als ein sehr wichtiges Actenstück für die Geschichte dieser Wissenschaft zu betrachten ist, welches von keinem Geschichtsschreiber der Mathematik fernerhin wird unberücksichtigt gelassen werden dürfen. Es sind zwei Entwürfe dieser Abhandlung vorhanden, von denen der Herr Herausgeber dem durch den grösseren Umfang und die sorgfältigere Ueberarbeitung sich sogleich als den späteren zu erkennen gebenden gefolgt ist. Die von dem Herrn Herausgeber in ziemlich grosser Anzahl beigefügten historischen Anmerkungen werden für diejenigen, welche die Geschichte der Mathematik weniger genau kennen, das Verständniss der Abhandlung wesentlich erleichtern.

Ausserdem sind noch zwei bisher ungedruckte Abhandlungen Leibnizens beigefügt. Die erste ist ein früherer Entwurf zur Bekanntmachung der Differentialrechnung, worin sich der grosse Mann deutlicher über das Princip seiner neuen Rechnung ausspricht, als es in der von ihm später zum Druck beförderten geschah, und zugleich zeigt, wie tief er schon damals in das Gebiet der höheren Analysis eingedrungen war. Die zweite macht insofern auf Beachtung Anspruch, als Leibniz darin einen Versuch gemacht hat, von den Rechnungsregeln der Differentialrechnung Beweise zu geben, indem er bekanntlich sowohl von seinen Zeitgenossen, als von der Nachwelt, öfters getadelt worden ist, dass er die Beweise schuldig geblieben sei.

Auch die Mittheilung dieser beiden Abhandlungen ist sehr dankenswerth.

Leibniz-Album aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C. L. Grotefend. Hannover. 1846. Fol. 2 Rthlr.

Dieser Schrift wird hier deshalb Erwähnung gethan, weil sie

Digitized by Google

manche in mathematischer und physikalischer Hinsicht interessante Notizen enthält. Es ist in derselben ein Bruchstück aus Leibnizens Tagebuche mitgetheilt, in welchem der grosse Mann auch von seinen mathematischen Ideen und Bestrebungen manche Nachricht ertheilt. Vorzüglich interessant ist aber auch ein Schreiben Leibnizens an den Herzog Johann Friedrich von Hannover, in welchem er demselben von seinen verschiedenen Entdeckungen und Erfindungen Nachricht giebt, und in dem u. A. folgende Stelle vorkommt: „In Opticis habe ich entdecket erstlich 1) ein gewisses Genus Tuborum oder Lentium, so ich Pandochas nenne, dieweil sie das ganze objectum uniformiter fassen, und nicht weniger die Strahlen extra axem opticum als in axe optico distincte colligiren, wodurch dasjenige, was man bis hehr vergebens gesucht, zu wege gebracht wird, wie nehmlich den vitris objectivis eine so grosse apertura gegeben werde, als wir wollen, umb der strahlen desto mehr damit zu fassen. 2) Tubos Cata-dioptricos, da in einem tubo Spiegel und Perspectiv mit einander conjungirt, und dadurch viel sonst unvermeidlich drauff gehende Strahlen, zum wenigsten noch einst so viel als iezo möglich, erhalten werden*). 3) Ein Mittel, so bisher vergeblich gesucht worden, mit Perspectiven aus einem Stand zu messen, ich höhre das dergleichen auch andere tentirt, welcher gestalt aber, habe noch von keinem Menschen verstanden, und dahehr per artem Combinatoriam gefunden**).

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern Nr. 54, 55, 56 hat Herr R. Wolf mehrfaches Interesse darbietende Notizen zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz, z. B. auch über den bekannten Herausgeber und Commentator Euklids Conrad Dasypodius, geb. 1531, gest. den 26. April 1600, gegeben; und in Nr. 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67 seine verdienstlichen Auszüge aus Briefen an Albrecht von Haller, mit literarisch-historischen Notizen (m. vergl. Literar. Ber. Nr. XXVIII. S. 411.) fortgesetzt. Auch giebt derselbe in Nr. 59. und 60. S. 31. einige Bemerkungen zur Geschichte der Quadratur des Kreises.

Arithmetik.

Kurze Anleitung zur Algebra für Gymnasien und zum Privatgebrauche, von Fr. Jos. Herrmann. Mit einer Kupfertafel. Darmstadt und Leipzig. 1846. 8. 1 Rthlr.

Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeu-

---

*) Dies wäre also das Spiegelteleskop.

**) Dies wäre also ein Distanzmesser, s. Archiv. Thl. VIII. Heft 3. S. 250 und 254.

Digitized by Google

tung der imaginären Zahlen, von H. Scheffler. Mit 80 in den Text gedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1846. 8. 2 Rthlr. 10 Sgr.

Der eigentliche Zweck dieses 428 Seiten starken Buchs ist durch den zweiten Theil seines Titels hinreichend bezeichnet. Es beschäftigt sich vorzugsweise mit der weiteren Aufklärung der auch in diesem Archive schon mehrfach besprochenen neueren Ansichten über das Imaginäre in der Mathematik, wobei es nur auffallen muss, dass der Herr Verfasser durchaus alles, was bisher über diesen Gegenstand bekannt gemacht worden ist, völlig ignorirt, selbst nicht einmal die von Gauss gegebenen Andeutungen genau zu kennen scheint, weshalb wir uns ihn in dieser letzteren Beziehung auf Archiv. Thl. VI. S. 236., und mehrere andere in dieser Zeitschrift abgedruckte Aufsätze, namentlich auf die verdienstlichen Arbeiten des Herrn Dr. Wittstein in Hannover zu verweisen erlauben, die, so wie ein Aufsatz des Majors Dr. G. W. Müller ebendaselbst, sämmtlich im Archive leicht aufzufinden sind, hier aber nicht einzeln namhaft gemacht werden können. Uebrigens enthält das Buch sehr viel Ueberflüssiges, lauter bekannte Dinge, fast eine ganze Darstellung der Arithmetik, die Exponentialreihe, die logarithmischen und trigonometrischen Reihen, den binomischen Lehrsatz u. s. w., ohne alle strenge Berücksichtigung der Convergenz und Divergenz. Dass auf diese Weise der Sache nicht eben genützt wird, ist klar, weil es bei einer neuen Lehre, die namentlich wie die hier besprochene vielen noch völlig ungewohnt ist, wenn dieselbe allgemeineren Eingang finden soll, hauptsächlich darauf ankommt, dieselbe unter möglichst einfacher Form, selbstständig und unabhängig von vielen anderen Lehren darzustellen. Soll man sich aber das eigentlich Neue unter vielen andern bekannten Dingen mühsam heraussuchen, so wird man den Geschmack an demselben immer eher verlieren als gewinnen. Aus diesem Grunde scheinen uns auch die oben namhaft gemachten kurzen Aufsätze zur weiteren Aufklärung dieses Gegenstandes vorzüglich geeignet zu sein.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, zum Theil in neuer Anordnung, durch Zusätze erweitert und mit ausführlichen Erläuterungen versehen von Dr. E. F. August, Professor und Director des Cölnischen Real-Gymnasiums in Berlin u. s. w. Berlin. 1846. Klein Octav. 15 Sgr.

Wir wollen zuerst den Inhalt dieser neuen Tafeln vollständig angeben: I. Logarithmentafel, enthaltend *a*) die gemeinen (Briggschen) Logarithmen von 1 bis 1000 vollständig mit Charakteristik und fünfstelliger Mantisse; *b*) die fünfziffrigen Mantissen für alle vierziffrige Zahlen von 1000 bis 9999; *c*) Modulus, Grundzahl, Formeln und mehrere zwölfstellige Logarithmen des natürlichen Systems. — II. Abgekürzte siebenziffrige Logarithmentafel, durch welche alle Rechnungen mittelst einer kleinen Nebenrechnung ausgeführt werden können, zu denen die grösseren siebenstelligen Logarithmentafeln erforderlich sind. Multiplicationstafeln, um die natürlichen Logarithmen in gemeine zu verwanden und umgekehrt. — III. Die Gauss'schen Tafeln zur Auffindung des Logarithmus einer Summe oder Differenz in einer neuen, den

Digitized by Google

Gebrauch erleichternden Anordnung. Regel für die Anwendung dieser Tafeln. — IV. Tafel der vierstelligen Quadrate aller Zahlen zwischen 0,000 und 2,1000. Tafeln zur Verwandlung der Kreisbogen in Theile des Halbmessers und umgekehrt. — V. Trigonometrische Tafel: 1) Siebenziffrige Werthe der trigonometrischen Functionen für ganze Grade. 2) Hülfstafel für Berechnung der Logarithmen zu den trigonometrischen Functionen kleiner Winkel. 3) Fünfstellige Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute. Siebenstellige Sinus und Cosinus für Minuten des ersten Grades. VI. Tafeln zur Auffindung der Factoren für die ganzen Zahlen 0 bis 10000. Formeln zur logarithmisch-trigonometrischen Lösung quadratischer und cubischer Gleichungen. — Kurze Erläuterungen zu den vorstehenden Tafeln.

Nach dieser vollständigen Angabe des Inhalts heben wir nun einige Eigenthümlichkeiten hervor, durch welche sich diese Tafeln von andern, namentlich von den in Schulen meistens noch gebrauchten Vega'schen Tafeln unterscheiden. Die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen sind fünfstellig, was bei Weitem für die meisten Rechnungen vollständig ausreicht, wie in neuerer Zeit schon so oft hervorgehoben worden ist, dass darüber hier nichts weiter gesagt zu werden braucht. Insbesondere aber scheint uns diese Einrichtung für Schulen besser und bequemer als die ältere, weil es ja bei dem Unterrichte in denselben hauptsächlich und zunächst bloss auf eine Uebung in dem Gebrauche der Tafeln ankommt, weshalb es gewiss sehr wünschenswerth ist, dass der Gebrauch bloss fünfstelliger Logarithmen in den Schulen immer mehr Eingang finde als dies bis jetzt der Fall ist. Durch Hinzufügung der Hülfstafel zur Auffindung siebenziffriger Logarithmen mittelst einer kleinen Nebenrechnung ist in der vorliegenden Sammlung übrigens auch für diejenigen wenigen Rechnungen auf sehr zweckmässige Weise gesorgt, welche eine solche Genauigkeit in der Anwendung der Logarithmen erfordern. — Die Anordnung der Tafeln der trigonometrischen Functionen ist insofern von der gewöhnlichen verschieden, dass auf die Sinus deren Differenzen, dann die Tangenten, hierauf die gemeinschaftlichen Differenzen der Tangenten und Cotangenten, nun die Cotangenten, hierauf die Differenzen der Cosinus und endlich die Cosinus selbst folgen, so dass also die Differenzen der Sinus und Tangenten rechts von denselben, die Differenzen der Cosinus und Cotangenten links von diesen Functionen stehen. Diese nach unserer Meinung zweckmässige und empfehlenswerthe Einrichtung hat ihren Grund darin, dass jetzt bei dem Fortschreiten von oben nach unten alle additiv zu nehmenden Differenzen rechts, alle subtractiv zu nehmenden links stehen*), was jedenfalls ein sehr zweckmässiges Erinnerungsmittel für den Schüler ist. Dieselbe Einrichtung findet sich auch in den kleinen Lalande'schen Tafeln und wird von Littrow in dem Artikel Tabellen in der neuen Ausgabe des Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs. Thl. IX. Abthl. 1. S. 7. als eine unnöthige Neuerung getadelt, indem Littrow hin-

*) Bei dem Fortschreiten von unten nach oben ist es natürlich entgegengesetzt.

Digitized by Google

zufügt: „Mit welchem Grunde hat man sie“ (nämlich die Sinus und Cosinus) „doch getrennt und dadurch allein schon zu einer Menge von Missgriffen Veranlassung gegeben.“ Aus dem vorher angegebenen Grunde kann ich diese Meinung in dem vorliegenden Falle nicht theilen, und kann auch hinzufügen, dass in den trefflichen und sehr seltenen Tafeln von Sherwin (Sherwin's Mathematical Tables etc. The third edition. Carefully revised and corrected by William Gardiner. London. 1742., welches die correcteste und seltenste Ausgabe dieser trefflichen Tafeln ist, da im Gegentheil z. B. die fünfte Ausgabe vom Jahre 1770 sehr fehlerhaft gedruckt sein soll) die von August angewandte Einrichtung auch schon gebraucht ist. Eben so findet sich diese Einrichtung in neueren Tafeln, z. B. wenigstens bei den natürlichen Linien in den, wie es mir scheint mit Unrecht, weniger bekannt gewordenen Tafeln von J. Hantschl (Wien. 1833.) und ganz wie in den vorliegenden Tafeln in den der trefflichen von Rümker besorgten vierten Ausgabe des Hamburger Lehrbuchs der Schiffahrtskunde (Hamburg. 1844.) angehängten Tafeln. In den prächtigen, im eigentlichen Sinne unverwüstlichen, von Littrow als Beispiel angeführten Tafeln von Gardiner (Tables of Logarithms for all Numbers from 1 to 102100 and for the Sines and Tangents to every ten seconds of each degree in the Quadrant; as also, for the Sines of the first 72 minutes to every single second. By William Gardiner. Lond. 1742. Klein Folio*), welche ich, so wie die obigen Sherwin'schen Tafeln, in der ziemlich reichen Sammlung von Tafeln, die ich mir aus einer gewissen Liebhaberei für diese Dinge nach und nach angeschafft habe, auch besitze, findet sich die besprochene Einrichtung freilich nicht, sondern die z. B. in den Vega'schen und andern Tafeln gebrauchte, was aber noch kein Beweis für die Unzweckmässigkeit der ersteren sein kann. — Der Gauss'schen Tafel, welche bekanntlich nach der gewöhnlichen auch von Matthiesen in seiner grossen Tafel (Tafel zur bequemeren Berechnung des Logarithmen der Summe

*) Kästner, der bekanntlich ein grosser Bücherliebhaber war, sagt in den Astronomischen Abhandlungen. Thl. II. S. 18. (indem er übrigens, was hierbei gelegentlich erinnert zu werden verdient, die oben angeführten Sherwin'schen von Gardiner neu herausgegebenen Tafeln und die eigentlichen Gardiner'schen Tafeln ganz fälschlich für verschiedene Ausgaben eines und desselben Buchs hält): „Dieser zweifachen Ausgabe ohngeachtet, sind diese Tafeln ungemein selten. Ich weiss nicht, ob einer der Schriftsteller de libris rarioribus das angemerkt hat, aber diesen Schriftstellern ist gewöhnlichermassen die Seltenheit mathematischer Bücher am wenigsten wichtig. Herr Joh. Bernoulli hat sie für das Königl. Observatorium zu Berlin in London mit 4 Guineen bezahlt (Recueil pour les Astronomes. T. II. p. 314.). Das Exemplar, das ich vor mir habe, gehört auf die hiesige Universitätsbibliothek. Ich selbst habe diese Tafeln nie bekommen können, ohngeachtet ich allemal zu dem Preise, den sie hätten, bereit war. Und weil ich den Eigensinn habe, dass ich Bücher, die ich stark brauchen soll, selbst besitzen muss, so habe ich mich des nur angezeigten Exemplars nicht so bedient, wie es mir frei gestanden hätte, sondern mich mit den Tafeln, die mein eigen waren, beholfen.“

Digitized by Google

oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Altona. 1817.) drei mit *A*, *B*, *C* bezeichnete Spalten enthält, hat der Herr Verfasser eine andere Einrichtung gegeben, welche wir hier der Kürze wegen nicht weiter beschreiben können, die aber, wie es uns scheint, allerdings bei Ungeübteren weniger Irrungen zulässt als die Berücksichtigung der drei Spalten, und deshalb wohl empfohlen zu werden verdient.

Die Erläuterungen des Gebrauchs der Tafeln sind sehr vollständig und lassen, so weit wir dieselben bis jetzt kennen gelernt haben, nichts zu wünschen übrig. Streng genommen müssen dieselben als ein kleines Lehrbuch der Logarithmentheorie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie betrachtet werden, indem alle Hauptformeln vollständig entwickelt worden sind, und bei den Logarithmen auch die betreffenden unendlichen Reihen Berücksichtigung gefunden haben. Unter diesen Entwickelungen kommt auch manches dem Herrn Verfasser Eigenthümliche vor, z. B. eine recht nette, von der gewöhnlichen ganz verschiedene, auf einen Satz vom Viereck mit zwei parallelen und zwei gleichen Gegenseiten gestützte Entwickelung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, eine eigenthümliche Ableitung der Gaussischen Gleichungen aus den Cagnolischen, und manches Andere, was sich hier nicht Alles namhaft machen lässt.

Der Stereotypendruck und das Papier genügen allen billigen Anforderungen, und das Format ist so gewählt, dass man das Büchlein noch bequem genug in der Tasche bei sich führen kann.

Bei dem aus dem Obigen hervorgehenden reichen Inhalte, bei der Zweckmässigkeit der Anordnung, der guten äussereren Ausstattung und dem verhältnissmässig sehr geringen Preise von nur 15 Sgr. halten wir dieses Buch für eine für alle Lehranstalten und auch für solche Personen, die viel mit logarithmischen, trigonometrischen und andern Rechnungen umzugehen haben, sehr erfreuliche Gabe und wünschen demselben aus Ueberzeugung eine möglichst grosse Verbreitung, welche ihm gewiss auch nicht fehlen wird. Dass die obige etwas ausführlichere, als sonst in diesen literarischen Berichten gewöhnlich ist, Berichterstattung dazu das Ihrige beitragen möge, wünschen wir gleichfalls.

Die Hinzufügung der natürlichen Linien, deren Gebrauch in manchen Fällen bequem ist und, wenigstens zum Theil, bei den Schiffsrechnungen nicht entbehrt werden kann, weshalb sich dieselben (wenigstens die Sinus versus) in dem oben angeführten ausgezeichneten Lehrbuche der Schiffahrtskunde und in den Tafeln von Hantschl (vollständig alle acht Linien) finden, wäre nach unserer Ueberzeugung allerdings in gewisser Rücksicht wünschenswerth gewesen, würde aber das Volumen des Buchs doch zu sehr vergrössert haben, und ist für den gewöhnlichen Schulgebrauch entbehrlich, weshalb wir dem Herrn Verfasser beistimmen müssen, dass er sie weggelassen hat. Die Schiffahrtsschulen finden das für sie in dieser Beziehung Nöthige auch schon in den für sie ausschliesslich bestimmten Büchern. Gr.

Anleitung zur Auflösung, Entwickelung und Berechnung der wichtigsten Aufgaben, Formeln und Ta-

Digitized by Google

hellen der einfachen und zusamengesetzten Zins- und Zeitrenten-Rechnung. Ein Handbuch für Lehrer der Mathematik, Kameralisten, Forstmänner, Architekten, Oekonomen, Banquiers etc., von Professor L. F Ritter. Stuttgart. 1846. 4. 1 Rthlr. 21 Sgr.

Eine sehr ausführliche und deutliche Darstellung eines schon oft behandelten Gegenstandes, welche vorzüglich Praktikern, die mit den nöthigen Vorkenntnissen versehen sind, wegen ihrer Ausführlichkeit zur Beachtung empfohlen werden kann. Der bekannten Frage über die Berechnung der Zeiten für Jahrestheile, d. h. überhaupt für einzelne Theile der zum Grunde gelegten Zeiteinheit, nach oder vor Ablauf derselben, hat der Herr Verfasser mit Recht besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Auch sind einige Tafeln beigefügt.

Den Artikel „Antistrauch“ im Literar. Ber. Nr. XXIX. S. 427. betreffend.

Von dem Herausgeber.

Um dem Herrn Dr. Strauch in Muri alle Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, hält der Herausgeber dem Publikum gegenüber sich zu der Erklärung verpflichtet, dass von demselben ihm eine Entgegnung auf den oben genannten Artikel zur Aufnahme in den Literar. Ber. eingesandt worden ist. Wenn nun aber der Herausgeber gleich bei der Aufnahme dieses Artikels in den Literar. Ber. es sich zum Princip machte, keine gegen denselben eingehende directe oder indirecte Erwiderung aufzunehmen, und diesem Princip nun auch wirklich ohne alle Ausnahme folgt, so wird dies in Folgendem hoffentlich seine vollständige Erklärung finden, und zugleich auch die briefliche Anfrage des Herrn Dr. Strauch, „weshalb denn der Herr Verfasser des Antistrauch nicht die Heidelberger Jahrbücher, in denen Herrn Dr. Strauchs Recension erschien, zu dessen Veröffentlichung gewählt habe,“ erledigen. — Die Einrückung des Antistrauch in die genannte kritische Zeitschrift hätte nämlich als eine Antikritik sehr theuer bezahlt werden müssen. Dass dies aber dessen Herr Verfasser nicht gern wollte, war ihm gewiss nicht zu verdenken, und da nun hiermit die Ansichten des Herausgebers in diesen Dingen vollkommen übereinstimmen, so öffnete er ihm gern *ganz unentgeltlich*, wie er als ehrlicher Mann und ohne erst noch ein besonderes Zeugniss anzurufen, versichern kann, die Spalten des Literarischen Berichts, hofft nun aber auch, dass die Gegenpartei zu ihren Erwiderungen jetzt dasjenige Journal wähle, in welchem der erste Angriff erfolgt ist, was *ihm* unter den obwaltenden Umständen so sehr in der Natur der Sache zu liegen scheint, dass er wirklich die ihm in derselben gemachten Zusendungen mit einiger Verwunderung entgegen genommen und bis auf Weiteres ad Acta reponirt hat. Dass aber endlich der Herr Verfasser des Antistrauch keineswegs von dem Herausgeber, wie Herr Dr. Strauch sich ausdrückt, „persönlich bevorzugt wird“, ist derselbe jederzeit dadurch zu beweisen bereit, dass er unter gleichen Verhältnissen wie die vorliegenden ihm eingesandte — und zwar immer vor allen Dingen die etwa gegen in dem Literar. Berichte selbst erschienene

Digitized by Google

Beurtheilungen gerichteten — Antikritiken, von wem dieselben auch kommen mögen, wenn sie nur die den Literarischen Berichten gesteckten Gränzen nicht auf ungebührliche Weise überschreiten, eben so unentgeltlich wie im vorliegenden Falle in den Literar. Bericht aufnehmen oder in einer andern Weise im Archive abdrukken lassen wird.

Geometrie.

Vollständige Theorie des ebenen Dreiecks. Auf eigenthümliche Art dargestellt von J. B. Féaux, Dr. der Philosophie. Münster. 1846. 8. 5 Sgr.

Auch bei dem besten Willen haben wir in diesem Schriftchen nicht viel finden können, was uns berechtigte, auf dasselbe hier besonders aufmerksam zu machen.

Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren, namentlich: der ein- und umgeschriebenen Vielecke, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Brennpunkte, der gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte, der Oskulation und der doppelten Berührung und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller und imaginärer Bedingungen im Zusammenhange mit Jakob Steiner's Geometrie dargestellt von Franz Seydewitz, Oberlehrer der Mathematik und Physik (am Gymnasium zu Heiligenstadt). Mit elf lithographirten Tafeln. Auch unter dem Titel: Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren. Erster Theil, enthaltend: die Theorie der projektivischen und involutorischen Gebilde, der ein- und der umgeschriebenen Vielecke nebst der bekannten erweiterten Aufgabe des Pappus, der Theilung der Strecken und Winkel, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Aehnlichkeit und Affinität der Kegelschnitte, der Brennpunkte und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller Bedingungen, von u. s. w. Mit fünf lithographirten Tafeln. Heiligenstadt. 1846. 8. 1 Rthlr.

Die Arbeiten des Herrn Verfassers auf dem Felde der neueren Geometrie sind den Lesern des Archivs hinreichend bekannt, und können unbedenklich dem Besten, was in dieser Beziehung geleistet worden ist, an die Seite gestellt werden. Der Titel ist so ausführlich, dass uns der Herr Verfasser dadurch völlig der Mühe einer besondern Angabe des Inhalts seiner Schrift überhoben hat. Ueber die Entstehung derselben spricht er sich in der Vorrede folgendermassen aus: „Die hier zur Hälfte vorliegende Arbeit entsprang aus dem Versuche, eine vor mehreren Jahren von mir

bekannt gemachte Erweiterung des Apollonischen Problems der Taktionen auf ihre einfachsten geometrischen Prämissen zurückzuführen, ohne von dem der Vorstellungsweise der Geometrie durchaus widerstrebenden Begriffe des Imaginären Gebrauch zu machen. Es boten sich hierzu zwei Wege dar: die Transversalentheorie und Steiner's „Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander"; allein die erstere führte, trotz ihrer sonstigen Eleganz, schon bei der Betrachtung der einfachsten Systeme von Kegelschnitten auf den Weg der Kunstgriffe und Kunststücke, welchen die Wissenschaft eben so sehr als die Natur verschmäht; und so — da in jener Aufgabe die unter dem Namen „Involution" bekannte Eigenschaft von sechs Punkten die Hauptrolle spielt, blieb nur übrig, diejenige Stelle aufzusuchen, welche diese Eigenschaft im Systeme der Steiner'schen Geometrie einzunehmen hat, und von da aus weiter vorzudringen. Hierbei war vorauszusehen, dass statt des bisher bekannten Etwas viel allgemeineres, nicht bloss sechs, sondern unzählige Elemente einer Geraden und eines Strahlbüschels betreffendes hervorgehen und zu manchen interessanten Entdeckungen führen würde; und in der That: nachdem einmal die Existenz involutorischer als besonderer Art projektivischer Gebilde erkannt, und in dem Umstande, dass die letzteren involutorisch sind, wenn irgend ein Paar ihrer Elemente sich in doppeltem Sinne entsprechen, ein höchst bequemes Kriterium dieser Besonderheit gefunden war, sah ich nicht nur mich im Besitze des Mittels, den genannten Zweck vollständig und leichter, als ich gedacht, zu erreichen, sondern auch über viele Gegenden der Geometrie, welche zu betreten ausser dem anfänglichen Plane lag, das genügendste Licht zu verbreiten. Gleich den Gebilden der Natur traten eine Menge bekannter und unbekannter geometrischer Erscheinungen sogleich aus den ursprünglichen Eigenschaften der involutorischen Gebilde wie aus ihrem Keime hervor, und noch mehr als die Mannigfaltigkeit der Gegenstände war es die Einfachheit und Selbstständigkeit der Methode, welche das Interesse der Untersuchung steigerte. So kam es denn, dass jene Aufgabe allmählig von der Masse der übrigen Konstruktionen und Lehrsätze, und die anfängliche Bestimmung dieser Schrift von derjenigen, welche jetzt der Titel zeigt, in den Hintergrund gestellt wurden."

„Diese Tendenz aber, die geometrischen Ideen zu erweitern, bildet gleichwohl nicht das Hauptinteresse dieser Schrift; letzteres steht vielmehr in naher Beziehung zu der Frage nach dem gegenseitigen Verhältniss der neueren und Euklidischen Geometrie, welche für das wissenschaftliche System der Geometrie gegenwärtig zur Lebensfrage geworden ist. Wird nämlich, was am richtigsten scheint, die eine als die der Lage, die andere als die der Gestalt und der Grösse bezeichnet, und unter allen geometrischen Principien das der Projektivität für das natürlichste und umfassenste erkannt, so ist es doch nicht gelungen, diesem Principe, so wie im Gebiete der ersteren, auch in dem der letzteren die Herrschaft zu verschaffen. Im zweiten Kapitel nun wird man die zwischen beiden bestehende Schranke mehrfach durchbrochen finden: — Die allgemeinen Eigenschaften der projektivischen und involutorischen Gebilde schliessen nämlich gewisse specielle Fälle in sich, deren Charakter sich in ganz einfachen

Digitized by Google

Grössenbestimmungen ausspricht; durch diese Fälle aber sind in den Figuren eigenthümliche Punkte und Linien, und hiermit Grössenbestimmungen gesetzt, welche auf ihre Weise selbst die Figuren charakterisiren. — Dieser Umstand ist es, welchen ich bei dem Ausdrucke „individuelle Eigenschaften der Figuren" vorzugsweise im Auge hatte. — Einen Zuwachs an Interesse erhalten solche eigenthümliche Erscheinungen dadurch, dass in denselben das Princip der Dualität sich noch erhält."

Wir haben es für das Angemessenste gehalten, die Hauptpunkte über die Tendenz dieser Schrift mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers anzugeben, verweisen aber, da die Beschränktheit des Raumes ein weiteres Eingehen uns hier leider verbietet, auf den übrigen Inhalt der überhaupt sehr lesenswerthen Vorrede. Jedenfalls ist diese Schrift eine wichtige viele neue Aufschlüsse über mehrere Partien gebende Erscheinung auf dem Gebiete der neueren Geometrie, und darf von keinem für diese Studien sich lebhaft Interessirenden unberücksichtigt gelassen werden. Daher sehen wir auch dem recht baldigen Erscheinen des zweiten Theils mit grossem Verlangen entgegen, und wünschen zugleich sehr, dass der Herr Verfasser Musse finden möge, auch die in der Vorrede versprochene Darstellung der geometrischen Verwandtschaften in der Ebene und im Raume und der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde baldigst der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Schliesslich bemerken wir noch, dass der Herr Verfasser durch die seinen Untersuchungen über die involutorischen Gebilde sehr zweckmässig vorausgeschickte Einleitung über das Wesen der projektivischen Eigenschaften überhaupt für das leichte Verstehen seiner Schrift vollständig gesorgt hat, so dass dieselbe in der That völlig unabhängig von andern Schriften über neuere Geometrie ganz durch und für sich selbst verstanden werden kann, was zu ihrer sehr zu wünschenden weiteren und allgemeineren Verbreitung gewiss wesentlich beitragen wird.

Optik.

Optische Untersuchungen. Von Johann August Grunert. Erster Theil. Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope. Mit einer Figurentafel. Auch unter dem Titel: Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik. Mit einer Figurentafel. Leipzig. 1846. 8. 1⅓ Rthlr.

Weil es, wie ich in der Vorrede kurz aus einander zu setzen gesucht habe, jetzt noch nicht an der Zeit sein dürfte, ein ausführliches System der Optik, wie Eulers und Klügels bekannte Werke für ihre Zeit waren, zu verfassen, so habe ich mich entschlossen, in dem Werke, dessen erster Theil jetzt vorliegt, vorläufig eine Reihe optischer Untersuchungen in der Weise zu veröffentlichen, dass jeder Theil desselben ein möglichst in sich selbst abgeschlossenes Ganzes bildet.

Digitized by Google

Der vorliegende erste Theil enthält, wie sein besonderer Titel besagt, die allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, was man aber in dem folgenden Sinne zu nehmen hat. Ich betrachte nämlich in demselben die von Spiegel- und Linsen-Systemen hervorgebrachten Bilder strahlender Punkte, ohne alle Rücksicht auf die sogenannten Abweichungen, als gewisse Gränzen, denen sich die Punkte, in welchen sich die von leuchtenden Punkten ausgehenden Strahlen nach an Spiegeln oder Linsen erlittenen Zurückwerfungen oder Brechungen schneiden, unter gewissen Bedingungen nähern, und gelange dadurch zuvörderst zu völlig genauen Formeln zur Bestimmung der Lage der Bilder nach diesem Begriffe, aus denen dann bequemere Näherungsformeln abgeleitet werden. Alle diese Formeln sind zu völliger Allgemeinheit erhoben worden, so dass sie für jedes aus einer beliebigen Anzahl von i Elementen (Spiegel und Linsen) bestehende System gelten. Die möglichste Vereinfachung und elegante Darstellung dieser Formeln habe ich mir besonders angelegen sein lassen, wobei mir der hier zuerst eingeführte Begriff des Modulus eines Spiegels oder einer Linse sehr gute Dienste geleistet und die Möglichkeit herbeigeführt hat, dass die von mir gegebenen Kettenbrüche — denn dass man auf diese Form bei Untersuchungen dieser Art ganz von selbst geführt wird, darf ich als allgemein bekannt voraussetzen — gerade nur aus eben so vielen Gliedern bestehen, als das System Elemente enthält, also aus i Gliedern, so dass also diese Formeln wohl die einfachsten sein dürften, auf die man bei dem gegenwärtigen Stande der Sache kommen kann. Diese Formeln werden hierauf zur Entwickelung der allgemeinen Theorie der Fernröhre und Mikroskope, immer aber für jetzt ohne alle Berücksichtigung der sogenannten Abweichungen, angewandt, und ein Paar der einfachsten Fälle als Beispiele betrachtet, die ins Einzelne gehende Betrachtung der verschiedenen Arten optischer Instrumente aber späteren speciellen Untersuchungen überlassen. Das erste, „die Grundgesetze" überschriebene Kapitel durfte hier nur deshalb nicht wegleiben, weil dieser erste Theil zugleich als ein Lehrbuch der elementaren Optik dienen soll, und enthält sonst lauter bekannte Dinge. Der erste der beiden Anhänge ist nur seines geometrischen Interesses wegen beigefügt worden. In dem zweiten Anhange habe ich eine allgemeine Theorie der Reflexion bei den Kegelschnitten geliefert, weil dieser interessante Gegenstand bis jetzt noch nicht so untersucht worden ist, als er mir zu verdienen scheint, und bin dabei zu ganz allgemeinen Formeln gelangt, deren Entwickelung mir zugleich zu einer, wie ich glaube, bemerkenswerthen Anwendung der aus der Differentialrechnung bekannten Regeln zur Bestimmung der unbestimmt zu sein scheinenden Werthe gebrochener Functionen Veranlassung gegeben hat.

Der zweite Theil, welcher schon bis zur Hälfte gedruckt ist und jedenfalls noch in diesem Jahre erscheinen wird, enthält eine ausführliche Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre, und zwar sowohl zweifacher als dreifacher Objective, wobei ich es mir zum Gesetz gemacht habe, mir nie — wie dies bisher immer, selbst bei Herschel's Theorie geschehen ist — eine Vernachlässigung der Dicken der Linsen zu gestatten. Alle Formeln sind so weit entwickelt, dass sie eine unmittelbare Einführung der

Digitized by Google

numerischen Data gestatten, und es sind sowohl alle bis jetzt für den Bau achromatischer Objective vorgeschlagenen Principe, als auch einige neue, für zweifache und dreifache Objective einer ausführlichen Untersuchung unterworfen worden. Wenn auch jetzt dreifache Objective nicht mehr gebaut zu werden pflegen, so scheinen mir dieselben doch in theoretischer Rücksicht so wesentliche Vortheile darzubieten, dass sie nicht ohne genauere Untersuchung geradezu verworfen werden dürfen. Auch ist ja bekannt genug, dass ein so geschickter Künstler wie Peter Dollond sich besonders günstige Wirkungen von denselben versprach, und nach dem Urtheile einiger neueren geschickten Optiker dürfte in der That die grössere Lichtabsorption, welche man meistens gegen die dreifachen Objective geltend zu machen pflegt, doch nicht so gross sein, als man sich gewöhnlich vorstellt. Nach dem Erscheinen dieses zweiten Theils wird weiter über denselben berichtet werden.

Was die späteren Theile enthalten werden, lässt sich jetzt noch nicht mit völliger Bestimmtheit sagen. Jedoch denke ich in dem dritten Theile zunächst eine vollständige kritische Darstellung aller bekannten Methoden zur Bestimmung der Brechungsverhältnisse, welche jedenfalls für die Praxis von der allergrössten Wichtigkeit ist, wenn dieselbe mit der Theorie soll gleichen Schritt halten können, zu liefern und auch einiges Neue über diesen wichtigen Gegenstand der Beurtheilung des Publikums vorzulegen. Dann wird wahrscheinlich die Theorie der Oculare und einiges Andere folgen, und endlich denke ich die ganze Theorie der optischen Instrumente aus weit allgemeineren Gesichtspunkten, als dies überhaupt bis jetzt geschehen sein dürfte, zu betrachten. Nach dem gegenwärtigen Stande der Sachen kann man aber nach meiner vollkommensten Ueberzeugung am meisten hoffen, auch der Praxis durch die Theorie Einiges zu nützen, wenn man die älteren, allerdings an vielen Mängeln leidenden Theorieen möglichst zu vervollkommnen sucht, welches auch der erste und nächtes Zweck gewesen ist, welchen ich durch die Veröffentlichung dieser optischen Untersuchungen zu erreichen gesucht habe. Gr.

Physik.

In den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nro. 63. und 64. findet man eine lesenswerthe Abhandlung über die Grenzen, innerhalb welcher barometrische Höhenmessungen Vertrauen verdienen, von Herrn A. F. Carl v. Fischer.

Actes de la Société helvétique des sciences naturelles, réunie a Genève les 11., 12. et 13. Aout 1845. Trentième session. Genève. 1846. 8.

Mit grossem Interesse haben wir in dieser Sammlung vorzüglich den Discours prononcé a l'ouverture des séances de la société helvétique des sciences naturelles a Genève le 11. Aout 1845, par M. le prof. De la Rive,

Digitized by Google

président, gelesen, in welchem Herr de la Rive eine zu allgemeinerer Beachtung zu empfehlende zwar kurze, aber schön geschriebene und lichtvolle Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Electricitätslehre und deren grosse Bedeutung für die gesammte Naturwissenschaft giebt.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen bei Begründung der Königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens, herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig. 1846. 8. 5 Rthlr.

Die Herausgabe dieser prachtvoll ausgestatteten Schrift hat, wie der Titel sagt, ihre nächste Veranlassung in einem Ereignisse gefunden, welches bei allen, die sich mit der Cultur der Wissenschaften beschäftigen, das lebhafteste Interesse erregen und deren wärmste Theilnahme in Anspruch nehmen muss. Denn an Leibnizens Geburtsorte an dem Tage seiner zweihundertjährigen Geburtsfeier, in dem Herzen Deutschlands an einem Orte, welcher für das Gedeihen der Wissenschaften von jeher von der grössten Bedeutung gewesen ist, in einem stets auf der Bahn des wahren Fortschritts begriffenen Lande, der Wiege der Reformation, unter dem Schutze einer der aufgeklärtesten Regierungen Deutschlands, eines derjenigen Institute entstehen zu sehen, welche der grosse Mann selbst fortwährend für die kräftigsten Beförderungsmittel der Wissenschaften gehalten und stets als solche vorzugsweise empfohlen hat, ist gewiss, — ebenso wie die aus den Zeitungen vorläufig bekannt gewordene höchst wichtige Stiftung einer Akademie der Wissenschaften in Wien, für welche sich bekanntlich Leibniz auf das Lebhafteste interessirte —, eine Begebenheit von wahrhaft historischer Bedeutung, welche das Herz eines jeden Deutschen mit dem wärmsten Danke gegen denjenigen erfüllen muss, welcher den Gedanken einer solchen Stiftung zuerst fasste.

Die vorliegende Schrift ist ein in jeder Beziehung würdiges Denkmal dieser Stiftung und enthält die folgenden in das Gebiet der Mathematik und Physik einschlagenden Abhandlungen, für deren Trefflichkeit sämmtlich die Namen ihrer Verfasser vollständig bürgen:

Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Von A. F. Möbius.

Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. Von M. W. Drobisch.

Ueber die Schwingungen der Saiten. Von A. Seebeck.

Ueber die Spiralen der Conchylien. Von C. F. Naumann. (Auch diese Abhandlung bietet ein mathematisches Interesse in mehrfacher Beziehung dar.)

Elektrische Versuche. Von F. Reich.

Elektrodynamische Maassbestimmungen. Von Wilhelm Weber.

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professor Silliman and Benjamin Silliman. (S. Literar. Bericht. Nro. XXVIII. S. 424.)

Vol. XLIX. 1845. Nro. II. Art. I. The Coast Survey of the United States. p. 229. Diese Darstellung des Verlaufs und des jetzigen Standes der grossen amerikanischen Küstenvermessung, welche früher von dem verdienten im Jahre 1843 verstorbenen Hassler geleitet wurde, jetzt unter der trefflichen Leitung des Herrn Dr. Bache steht, wird das Interesse eines jeden Lesers lebhaft in Anspruch nehmen. — IV. Meteorological Observations made at Hudson, Ohio, during the years 1841, 2, 3 ad 4, with a summary for seven years; by Prof. Elias Lomis. p. 266. — VI. Description of the Solar Index, a new magnetical Instrument; by Marshall Conant. p. 301. — VII. A Report to the Navy Departement of the United States on American Coals, applicable to Steam Navigation and to other purposes; by Prof. Walter R. Johnson. p. 310. — Vielfache literarische Notizen und Miscellen beschliessen wie gewöhnlich auch diese Nummer.

Um den hier noch übrigen Raum zu benutzen, theilen wir folgende *Johann Heinrich Lambert* betreffende Stelle aus den oben erwähnten Notizen zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz von Herrn R. Wolf in Bern in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 54. und 55. S. 131. mit. Herr Wolf sagt nämlich: „Hingegen mögen zu näherer Kenntniss des Characters eines Mannes, der sich selbst, ohne unbescheiden zu sein, an die Seite von Euler, d'Alembert und Lagrange setzen durfte, folgende Verse mitgetheilt werden, welche er[1]) seinem Freunde und Correspondenten[2]), Herrn Oberbuchhalter Ludwig Oberreit in Dresden, ins Stammbuch schrieb:

Nicht Jeder, den mit mir Gesellschaft, Lust und Wein verbrüdert, —
Nein, wer an mir was Gutes sieht,
Das ihn nach meinem Umgang zieht,
Und meine Redlichkeit mit gleicher Treu erwiedert, —
Der nicht aus Eigensinn
Und Argwohn Alles straft, was sich noch wohl geziemet, —
Der mich bei Andern mehr als bei mir selber rühmet,
Und mir allein entdeckt, worin ich strafbar bin,
Der mein Vergehn mehr bessert als verlachet, —
Der stets so redet wie ers meint
Und den *sein* Glück nicht stolz, noch *meines* neidisch machet,
Wisst, Freunde, der nur ist mein Freund."

In der nämlichen Schrift Nr. 59. und 60. S. 18. hat derselbe Herr Verfasser die folgende Genealogie der in der Mathematik so berühmten Familie Bernoulli mitgetheilt, zu welcher er von Herrn Prof. Christoph Bernoulli in Basel, Sohn Daniel II, 1839 das Gerippe erhielt: Jacob Bernoulli (1598—1634), ein Kauf-

---

1) Siehe die Mscr. des sel. Schanzenherr Feer in Zürich.
2) Siehe Lamberts deutschen gelehrten Briefwechsel. II. 366. u. f.

mann aus einem angesehenen Geschlechte Antwerpens, das sich Alba's Religionsverfolgungen durch die Flucht entzog — wurde 1622 in das Basel'sche Bürgerrecht aufgenommen, und von dessen Sohn

a. Nicolaus (1623—1708), Rathsherr in Basel,

mögen folgende Nachkommen aufgeführt werden:

b. ***Jacob I*** (1654—1705), Sohn von *a*, Professor der Mathethematik in Basel, Erfinder der logarithmischen Spirale, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, etc. und Lehrer Johannes I und Nicolaus I. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris. A.* 1705.)

c. ***Nicolaus***, Maler, Sohn von *a.*

d. ***Johannes I*** (1667—1748), Sohn von *a*, Professor der Mathematik in Gröningen und Basel, Lehrer von Hospital, Euler, etc., erster Bearbeiter der Exponentialgrössen, etc., Correspondent und Vertheidiger von Leibniz. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris. A.* 1748. und *Mém. de Berlin. A.* 1747.)

e. Nicolaus I (1687—1759), Sohn von *c*, Professor der Mathematik in Padua, später der Rechte in Basel, Herausgeber der nachgelassenen Schriften Jacob I.

f. Nicolaus II (1695—1726), Sohn von *d*, Professor der Rechte in Bern, dann Akademiker in Petersburg. (Siehe s. *Eloge* in den *Comment. Acad. Petrop. II.*)

g. ***Daniel I*** (1700—1782), Sohn von *d*, Akademiker in Petersburg, später Professor der Physik in Basel, Verfasser der Hydrodynamik. (Siehe s. *Eloge* in den *Mém. de Paris* 1782 und *Nova Acta Helvetica I.*)

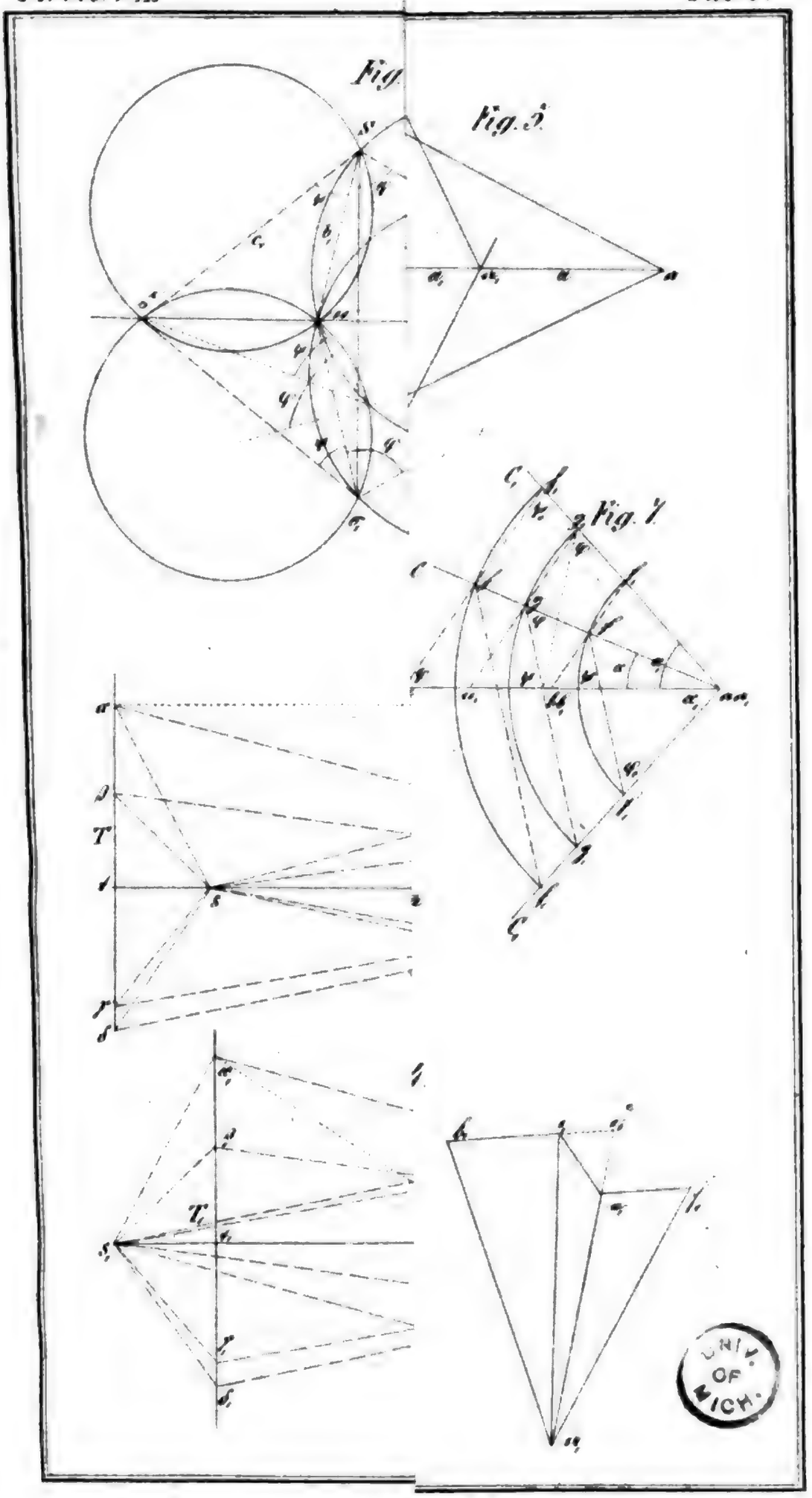
h. Jahannes II (1710—1790), Sohn von *d*, Professor der Mathematik in Basel.

i. Johannes III (1744—1807), Sohn von *h*, Director der Sternwarte in Berlin und später Director der mathematischen Classe der dortigen Akademie.

k. Daniel II (1751—1834), Sohn von *h*, Professor der Physik in Basel.

l. Jacob II (1759—1789), Sohn von *h*, Akademiker in Petersburg. (Siehe s. *Eloge* in den *Nova Acta Acad. Petrop. VII.*)

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

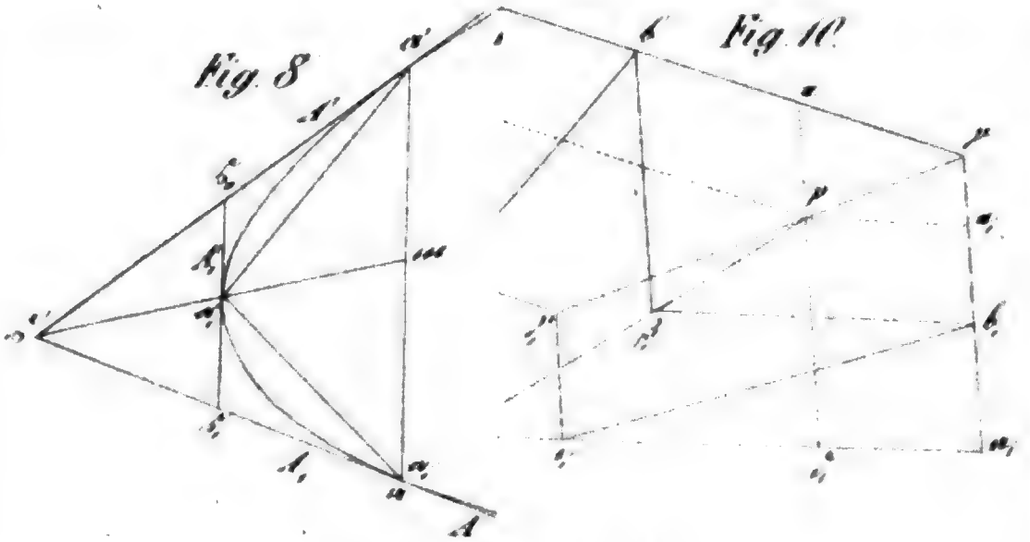


Fig. 8
Fig. 10

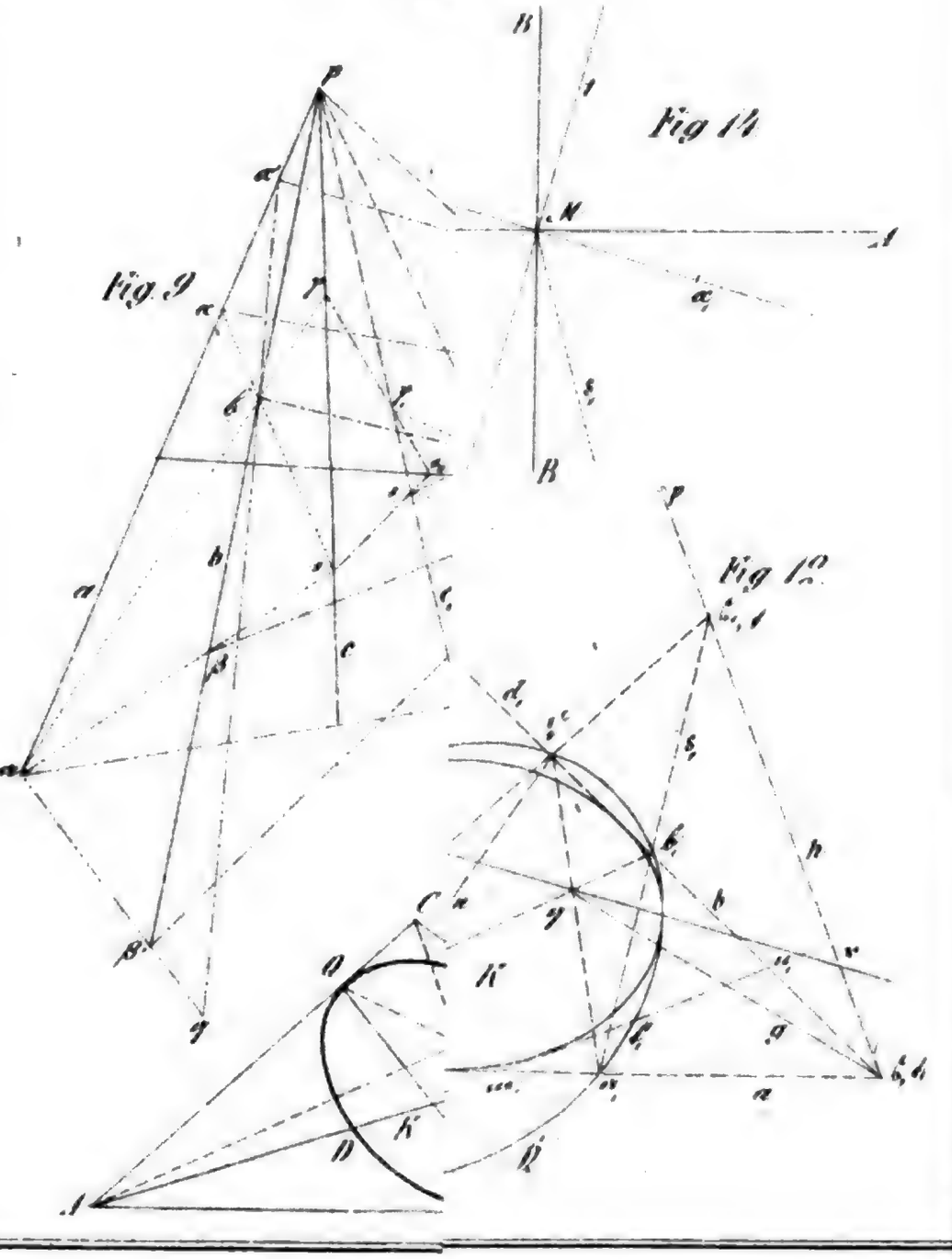
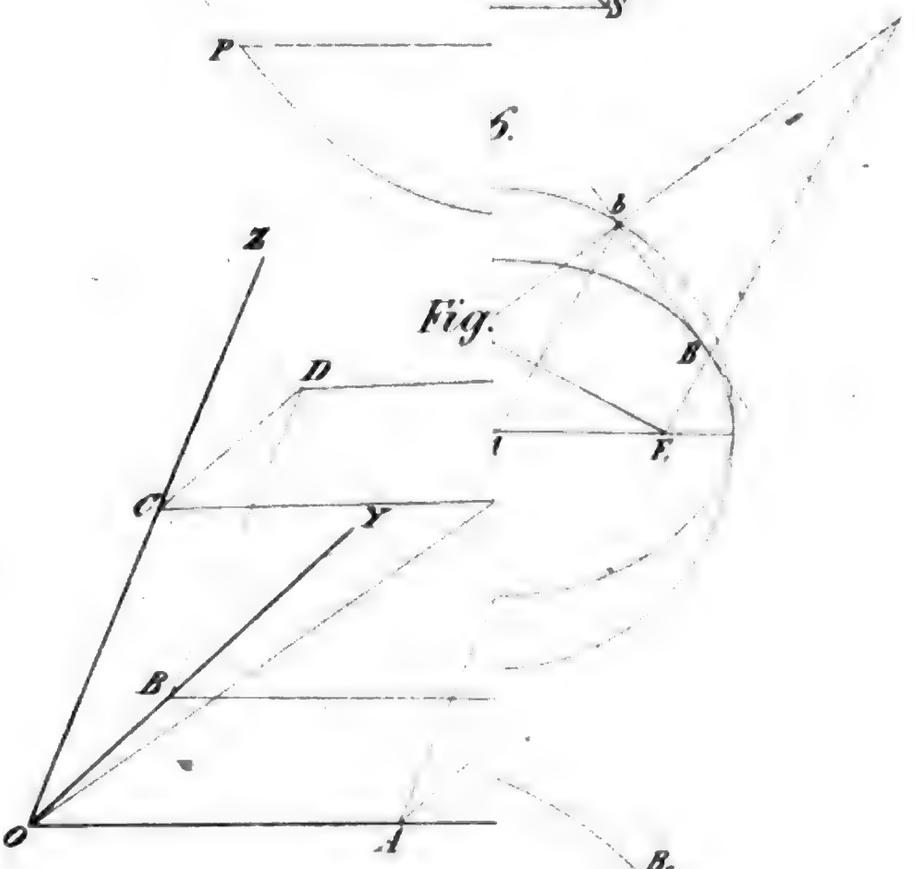


Fig. 9
Fig. 11
Fig. 12

Digitized by Google

Fig. 1.

5.



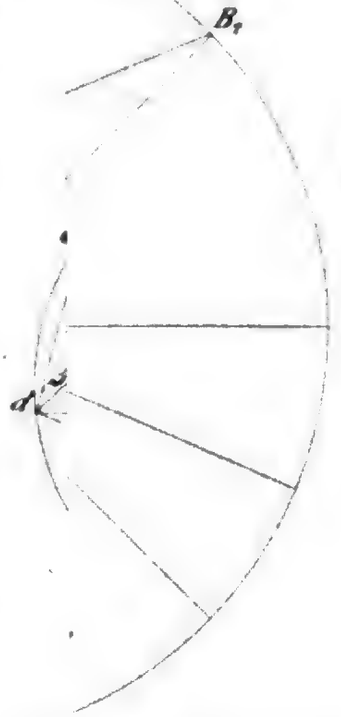


Fig. 8.

Fig. 10.

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 3.

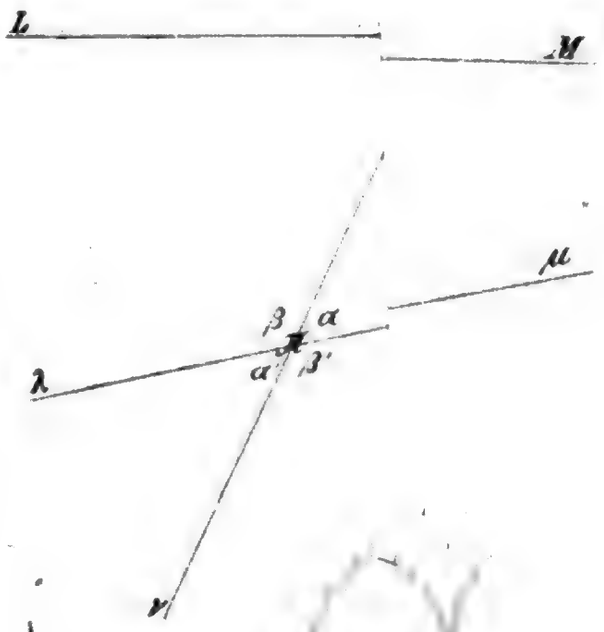


Fig. 6.

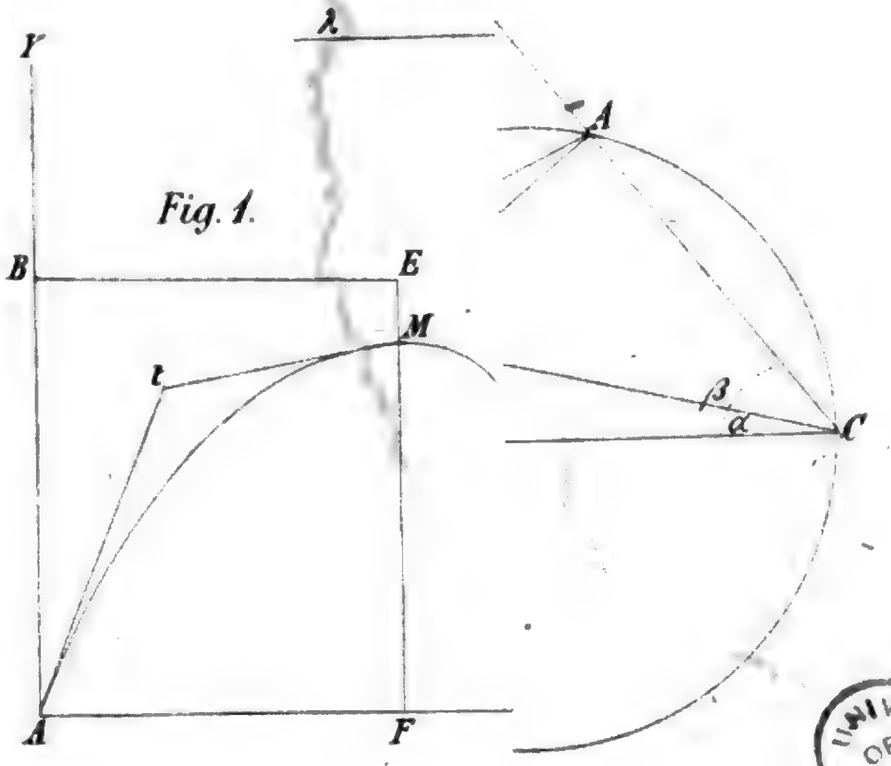


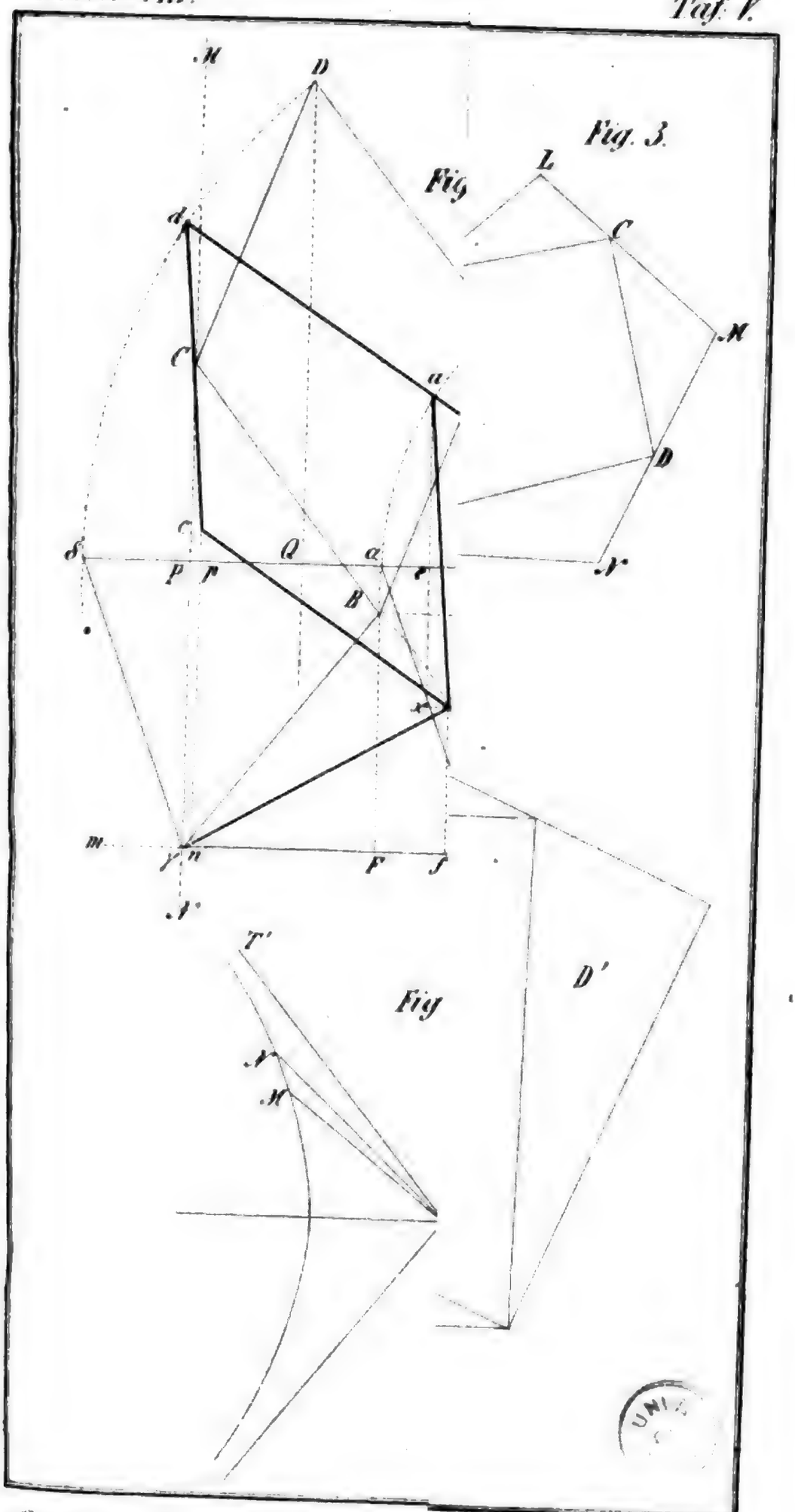
Fig. 1.

UNIV. OF MICH.

Grunert Archiv.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BOUND
DEC 19 1932
LIBRARY

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03698 0707

Digitized by Google

Digitized by Google